Azərbaycan Respublikasını Təhsil Nazirliyi

Bakı Dövlət Universiteti

Magitratura Pilləsi Üçün

İxtisas- Hesablama Riyaziyyatı

Fənn- Sərhəd Məsələlərinin Ədədi Həlli

Bakı 2023

Мювзулар üzrə саатлары bölgüsü

№	Mövzular	Saatlar		
		Cəmi	müh	Məş
		30	15	15
1	Müxtəlif sərhəd məsələlərinin qoyuluşu.	2	2	-
2	Sərhəd məsələsinin Koşi məsələsinə gətirilməsi.	2	2	-
3	Atəş üsulu ilə sərhəd məsələsinin ədədi həlli.	4	2	2
4	Diferensial qovma üsulu.	2	2	-
5	Xətti fərq tənliklər sistemi üçün Rikkati çevirməsi.	4	2	2
6	Qovma üsulunun ümumiləşmələri.	4	2	2
7	I tərtib diferensial tənlik üçün inteqral şərtli sərhəd məsələsinin ədədi həlli.	4	2	2
8	II tərtib diferensial tənlik üçün inteqral şərtli sərhəd məsələsinin ədədi həlli.	4	2	2
9	Qalyorkin və kollokasiya üsullarında bazis funksiyalarının qurulması.	4	2	2
10	Reduksiya üsulu.	2	2	-
11	Rits üsulu.	2	2	-
12	Rits üsulunun tətbiqi.	2	2	-
13	III tərtib diferensial tənlik üçün inteqral şərtli sərhəd məsələsinin ədədi həlli.	4	2	2
14	IV tərtib diferensial tənlik üçün ikinöqtəli sərhəd məsələsinin ədədi həlli.	2	2	-
15	IV tərtib diferensial tənlik üçün inteqral şərtli sərhəd məsələsinin ədədi həlli.	3	2	1

GİRİŞ

1. «Sərhəd məsələlərinin ədədi həlli» fənninin məqsədi magistrlara sərhəd məsələlərinin ədədi həll əsaslarını öyrətmək və onlarda bu üsullardan riyaziyyatın müxtəlif məsələlərinin həllində istifadə etmək vərdişlərini yaratmaqdır. «Sərhəd məsələlərinin ədədi həlli» fənninin vəzifəsi üsulların nəzəriyyəsinin fundamental anlayışlarını öyrətmək, müxtəlif məsələlərin həllinə tətbiq ediləcək xüsusi üsulları nəzərdən keçirməkdir.

2. Magistrlar sərhəd məsələlərinin ədədi həlli ilə tanış olmalı və onları müxtəlif məsələlərin həllinə tətbiq edə bilməlidirlər.

3. Magistrlar sərhəd məsələlərinin ədədi həll üsullarına dərindən yiyələnərək bu üsullarla hesablama düsturlarını almağı, xətaları hesablamağı bacarmalıdırlar. Onlar bu üsullar üçün müasir proqramlaşdırma dillərində proqramlar quraraq onları kompyuterdə realizə etməyi bacarmalıdırlar.

4. Magistrlar sərhəd məsələlərinin ədədi həlli zamanı hesablama təcrübəsində məsələnin qoyuluşu, hesablama prosesinin planlaşdırılması, hesablama nəticələrinin emalı kimi vərdişlərə yiyələnməlidirlər.

5. «Sərhəd məsələlərinin ədədi həlli» fənni magistrlara mühazirə və məşğələ dərslərində II kursun I semestrində 30 saat mühazirə və 15 saat məşğələ olmaqla 45 saat həcmində tədris olunur.

1. Müxtəlif sərhəd məsələlərinin qoyuluşu [8].

Burada əvvəlcə II tərtib diferensial tənliyin ədədi həlli üçün sərhəd məsələlərinin müxtəlif verilişləri öyrənilir. Diferensial tənliyə $[a,b]$ parçasında baxıldıqda sərhəd şərtləri həllin a və b nöqtələrindəki qiymətləri ilə verilə bilər. Digər sərhəd məsələsində a nöqtəsində həllin qiyməti, b nöqtəsində isə həllin törəməsinin qiyməti verilir. Bir başqa məsələdə a nöqtəsində həllin törəməsinin qiyməti, b nöqtəsində isə həllin qiyməti verilir. Bəzi hallarda həllin a və b nöqtələrindəki qiymətləri ilə törəmənin qiymətləri arasında əlaqə verilir.

2. Sərhəd məsələsinin Koşi məsələsinə gətirilməsi [9].

Burada II tərtib diferensial tənlik üçün iki nöqtəli sərhəd məsələsinə baxılır. Baxılan tənlik üçün Koşi məsələsi qurulur. Alınan Koşi məsələsinin həlli üçün qüvvət sıraları üsulu təklif edilir və $y_1(t), y_2(t)$ funksiyaları qurulur. Göstərilir ki, qurulan funksiyalar sərhəd şərtlərini və verilən tənliyi ödəyir. Sərhəd məsələsinin həlli isə $y_1(t), y_2(t)$-dən asılı şəkildə qurulur.

3. Atəş üsulu ilə sərhəd məsələsinin ədədi həlli [5].

Bu üsul ilə sərhəd məsələsi Koşi məsələsinə gətirilir. Bunun üçün sərhəd şərtlərindən biri götürülür və I tərtib törəmənin qiyməti başlanğıc nöqtədə $tg\alpha$ kimi verilir. α elə seçilir ki, Koşi məsələsinin həlli sərhəd məsələsinin həllinə yaxın olsun. Atəş üsulu həmişə dayanıqlı üsul deyil.

Aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxılır:

$$y'' - a^2 y = 0 \ (0 \le x \le 1), \quad y(0) = y_0, \ y(1) = y_1 .$$

Göstərilir ki, y_0, y_1 qiymətlərini kiçik dəyişdikdə həll də kiçik dəyişir. Yəni sərhəd məsələsi y_0, y_1-dən kəsilməz asılı məsələdir. Həllin qiyməti $x = 1$ olanda artım alır. a-nın kafi qədər böyük qiymətlərində həllin artımındaki $\frac{e^{-a}}{2a}$ ifadəsi kafi qədər kiçik, $\frac{e^{a}}{2a}$ ifadəsi isə kafi qədər böyük olur. Bu halda atəş üsulu dayanıqsız üsul olur və tətbiq edilmir.

4. Diferensial qovma üsulu [6], [7].

Bu üsulla sərhəd şərtlərində $[a,b]$ parçasının uc nöqtələrindəki qiymətləri ilə törəmənin qiymətləri arasında əlaqələr verilən sərhəd məsələsi həll edilir. Verilən II tərtib diferensial tənliyin $y = y(x)$ həlli $\delta = \delta(x)$ və $\gamma = \gamma(x)$ funksiyalarının köməyi ilə I tərtib diferensial tənliyin həlli kimi axtarılır. $\delta = \delta(x)$ və $\gamma = \gamma(x)$ funksiyaları I tərtib diferensial tənliklər sistemini ödəməlidirlər. $[a,b]$ parçasında bu sistem üçün Koşi məsələsi qurulur və qüvvət sıraları üsulu ilə həll edilərək $\delta(x), \gamma(x)$ funksiyaları təyin edilir. Beləliklə, diferensial qovma üsulu ilə xətti sərhəd məsələsinin həlli I tərtib diferensial tənlik üçün iki düz Koşi məsələsinin və bir tərs Koşi məsələsinin həllinə gətirilir. Əvvəlcə paralel və ya ardıcıl qaydada olaraq tənliklər başlanğıc şərtləri ilə düz istiqamətdə a-dan b-yə həll edilir, sonra isə tərs istiqamətdə b-dən a-ya tənlik başlanğıc şərti ilə həll edilir.

5. Xətti fərq tənliklər sistemi üçün Rikkati çevirməsi [2], [4].

Xətti fərq tənliklər sistemində $u_0 = c$ və $v_N = d$ qiymətləri məlumdur. Sistemin həlli aşağıdakı kimi tapılır:

$$v_i = R_i u_i + S_i .$$

Burada R_i − matrisi və S_i − vektoru u_i və v_i − dən asılı deyil.

R_i, S_i əmsalları üçün rekurent münasibətlər qurulur. v_N məlum olduğundan R_N, S_N məlum olur. Beləliklə, R_i, S_i əmsallarını təyin etmək üçün Koşi məsələsi alınır. Bu zaman başlanğıc nöqtə $i = N$ olur və həll əks istiqamətdə qurulur. u_i əmsallarını təyin etmək üçün $u_0 = c$ başlanğıc şərtli Koşi məsələsi alınır. u_0, v_0 məlum olduğundan $u_1, v_1, ..., u_n, v_n$ yuxarıda qeyd edilən ayrılışdan təyin edilir.

6. Qovma üsulunun ümumiləşmələri [6].

Qovma üsulu bakalavrlar üçün sərhəd şərtləri $y(a) = A,\ y(b) = B$ olduqda tətbiq olunur. Burada isə sərhəd şərtləri məsələn, $y'(a) = A,\ y(b) = B$ şəklində verilə bilər. $[a,b]$ parçası h addımı ilə bölünür. Fərqlər sxemi qurulur, $y'(a) \approx \dfrac{y_1 - y_0}{h} = A$ kimi əvəz edilir. Buradan $y_0 = y_1 - Ah$ alınır. Rikkati çevirməsinə görə $R_0 = 1, S_0 = -Ah$. Bu qayda ilə R_i, S_i əmsalları təyin edilir və həll əks istiqamətdə qurulur.

Əgər sərhəd şərtləri $y(a) = A, y'(b) = B$ şəklində verilibsə, bu halda $y'(b) \approx \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h} = B$, $y_{n-1} = y_n - Bh$. V_N məlum olduğundan R_N, S_N məlum olur və həllin qalan qiymətləri $V_i = R_i V_{i+1} + S_i$ ayrılışından istifadə edilərək təyin edilir.

7. I tərtib diferensial tənlik üçün inteqral şərtli sərhəd məsələsinin ədədi həlli [2], [10].

Burada inteqral şərtli məsələyə baxılır:

$$y' = a(x)y + b(x) \quad (0 \le x \le T),$$

$$\int_0^T \alpha(s)y(s)ds = A.$$

Məlumdur ki, $\alpha(s) \ne 0$.

$$V(x) = \int_0^x \alpha(s)y(s)ds$$

funksiyası daxil edilir. Aydındır ki, $V(0) = 0$, $V(T) = A$ və $V'(x) = \alpha(x)y(x)$. Beləliklə, baxılan sərhəd məsələsi

$$y' = a(x)y + b(x) \quad (0 \le x \le T),$$

$$V'(x) = \alpha(x)y(x),$$

$$V(0) = 0, V(T) = A$$

I tərtib tənliklər sistemi üçün sərhəd məsələsinə gətirilir.

$[0,T]$ parçası $h = \dfrac{T}{N}$ addımı ilə N bərabər hissəyə bölünür.

$$y_{i+1} = (1 + ha_i)y_i + hb_i,$$
$$V_{i-1} = V_i + h\alpha_i y_i, \ \ (i = \overline{0, N-1}),$$
$$V_0 = 0, \ V_N = A$$

fərqlər sxemi alınır. $V_N = A$ qiyməti məlum olduğundan $V_i = R_i V_{i+1} + S_i$ ayrılışı tətbiq edilir.

8. II tərtib diferensial tənlik üçün inteqral şərtli sərhəd məsələsinin ədədi həlli [2], [10].

Burada

$$y'' = p(x)y' + g(x)y + f(x) \ \ (0 \le x \le T),$$
$$y(0) = \gamma_1, \int_0^T \alpha(s)y(s)ds = \gamma_2$$

sərhəd məsələsi öyrənilir.

Köməkçi funksiyalar daxil etməklə baxılan məsələ I tərtib xətti diferensial tənliklər sistemi üçün ikinöqtəli sərhəd məsələsinə gətirilir. Sonra I tərtib törəmələr sonlu fərqlər nisbəti ilə əvəz edilir. Sonuncu qiymət məlum olduğundan, dəyişənə görə ayırma üsulu tətbiq edilir. Bu qayda ilə düyün nöqtələrindəki həllin və onun törəmələrinin qiymətləri təyin edilir.

9. Qalyorkin və kollokasiya üsullarında bazis funksiyalarının qurulması [6], [7].

Hər iki üsulda sərhəd məsələsinin təqribi həlli

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x) \qquad (1)$$

şəklində axtarılır.

Burada $\varphi_0(x)$ funksiyası verilmiş sərhəd şərtlərini, $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$ bazis funksiyaları isə verilmiş sərhəd şərtlərinə uyğun bircins şərtləri ödəyirlər. c_i əmsallarını tapmaq üçün xətti cəbri tənliklər sistemi alınır. Bu üsulların tətbiqinin müvəffəqiyyətli olması $\varphi_i(x)\ (i = 1,2,..., n)$ bazis funksiyalarının seçimindən çox asılıdır.

$\varphi_i\ (i = 1,2,..., n)$ bazis funksiyalarının seçimi sərhəd şərtlərinin bircins olduğu zaman çox sadələşir. Bu halda (1) ifadəsində φ_0 funksiyası lazım olmur, $\varphi_i\ (i = 1,2,..., n)$ funksiyalarının yerinə isə məsələn,

$$\varphi_i(x) = (x-a)^i (b-x)$$

və ya

$$\varphi_i(x) = \sin \frac{i(x-a)}{b-a}\pi$$

funksiyaları seçilir.

10. Reduksiya üsulu [7], [8].

Burada

$$y'' = p(x)y' + g(x)y + f(x) \quad (0 \le x \le T),$$

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = \gamma_1,$$

$$\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_2$$

sərhəd məsələsinin $y = y(x)$ həlli

$$y = cu(x) + v(x)$$

şəklində axtarılır. Harada ki, $c,\ u=u(x), \nu=\nu(x)$-hər hansı bir sabit və funksiyalardır.

Verilmiş sərhəd məsələsinin həlli $u(x)$ və $\nu(x)$ funksiyalarına görə I tərtib diferensial tənlik üçün Koşi məsələsinin həllinə gətirilir.

11. Rits üsulu [6].

Burada sərhəd məsələsinin həlli verilmiş sərhəd şərtlərini ödəyən və

$$F(y)=\int_a^b [p(x)y'^2+q(x)y^2+2f(x)y]dx \qquad (1)$$

funksionalına minimum qiymət verən $y(x)$ funksiyasının tapılması məsələsi ilə əvəz edilir.

H-hilbert fəzası verilir, A-additiv operatoru H-ın hər hansı H_A çoxluğunda müəyən edilir.

$$Ay=f \qquad (2)$$

tənliyinə baxılır. Burada $f\in H-$məlum element, $y\in H_A-$axtarılan elementdir. (2) tənliyinə görə $F(y)=(Ay,y)-2(y,f)$ funksionalı qurulur.

Əgər

$$Ay=-\frac{d}{dx}(py')+qy$$

olarsa (2) tənliyi

$$Ay=-f \qquad (3)$$

şəklində yazılır və $F(y)=(Ay,y)+2(y,f)$ funksionalı qurulur. Göstərilir ki, A müsbət və simmetrik olduqda (2), (3) tənliklərinin həlli $F(y)$-ə minimum qiymət verir və tərsinə.

Minimal ardıcıllığın tərifi verilir. Minimum qiymət verən nöqtə y_n ilə işarə edilir. n-ə qiymətlər verməklə Rits ardıcıllığı alınır. Göstərilir ki, hər bir minimal ardıcıllıq (2), (3) tənliklərinin həllinə yığılır.

12. Rits üsulunun tətbiqi [6].

Burada

$$\frac{d}{dx}(py') - qy = f(x) \quad (a \le x \le b), \qquad (1)$$
$$y(a) = 0,\ y(b) = 0$$

sərhəd məsələsi öyrənilir.

n sayda $a_1,..., a_n$ parametrdən asılı olan və verilən sərhəd şərtlərini ödəyən hər hansı $y(x; a_1,..., a_n)$ funksiyalar sisteminə baxılır. Bu sistemi (1) məsələsinə qoyduqda n dəyişəndən asılı olan

$$F(y) = \Phi(a_1,..., a_n)$$

funksiya alınır və verilmiş məsələ bu funksiyanın minimum qiymətinin tapılmasına gətirilir. Minimum qiymət verən nöqtə $y_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x)$ şəklində axtarılır. Minimum şərtindən $a_1,..., a_n -$lərə görə xətti tənliklər sistemi alınır. $\varphi_i\ (i = 1,2,..., n)$ funksiyaları isə məsələn,

$$\varphi_i(x) = (x-a)^i (b-x)$$

və ya

$$\varphi_i(x) = \sin\frac{i(x-a)}{b-a}\pi$$

şəklində seçilir.

13. III tərtib diferensial tənlik üçün inteqral şərtli sərhəd məsələsinin ədədi həlli [2], [10].

Burada

$$y''' = a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y + f(x) \qquad (0 \le x \le T),$$

$$y(0) = \gamma_1, \ \ y(T) = \gamma_2, \ \int_0^T \alpha(s)y(s)ds = \gamma_3$$

sərhəd məsələsinə baxılır.

Köməkçi funksiyalar daxil etməklə bu məsələ I tərtib tənliklər sistemi üçün ikinöqtəli sərhəd məsələsinə gətirilir.

14. IV tərtib diferensial tənlik üçün ikinöqtəli sərhəd məsələsinin ədədi həlli [2], [9].

Burada

$$y^{IV} = a(x)y''' + b(x)y'' + c(x)y' + d(x)y + f(x) \qquad (0 \le x \le T),$$

$$y(0) = \gamma_1, \ \ y(T) = \gamma_2, \ y'(0) = \gamma_3, \ y'(T) = \gamma_4$$

sərhəd məsələsi öyrənilir.

Köməkçi funksiyalar daxil etməklə qoyulan məsələdən I tərtib tənliklər sistemi üçün sərhəd məsələsi alınır. Ayırma üsulu tətbiq edilir.

15. IV tərtib diferensial tənlik üçün inteqral şərtli sərhəd məsələsinin ədədi həlli [2], [3], [9].

Burada

$$y^{IV} = a(x)y''' + b(x)y'' + c(x)y' + d(x)y + f(x) \qquad (0 \le x \le T),$$

$$y(0) = \gamma_1, \;\; y(T) = \gamma_2, \; \int_0^T \alpha(s)y(s)ds = \gamma_3, \; \int_0^T \beta(s)y(s)ds = \gamma_4$$

sərhəd məsələsi tədqiq edilir.

Köməkçi funksiyalar daxil etməklə verilən məsələ I tərtib diferensial tənliklər sistemi üçün ikinöqtəli məsələyə gətirilir və ayırma üsulu ilə həll edilir.

Əsas ədəbiyyat

1. Məmmədov Y.C. Təqribi hesablama üsulları. Bakı, «BDU», 2008, 288 səh.

2. Беллман Р., Энджел Э. Динамическое программирование и уравнения в частных производных. Москва, «Мир», 1974, 204 стр.

3. Сеидов З.Б. Численное решение нелокальных краевых задач для уравнений IV порядка. Bakı, «Bilgi dərgisi», 2002, 65 стр.

4. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. Москва, «Наука», 1989, 432 стр.

5. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. Москва, «Наука», 1977, 439 стр.

6. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. «Физматгиз», т.2, 1962, 620 стр.

7. Вержбицкий В.М. Численные методы. Москва, «Высшая школа», 2001, 382 стр.

8. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Москва, «Наука», 1962, 368 стр.

9. Richard L. Burden, J.Douglas Faires Numerical Analysis. India, Cengage learning, 7-th edition, 2001, 850 pp.

10. Сеидов З.Б. Численное решение краевой задачи с интегральными уравнениями. Bakı, «Bilgi dərgisi», 2006, 62 стр.

Əlavə ədəbiyyat

11. Бахвалов Н.С. Численные методы. Москва, «Наука», 1973, 631стр.

12. Милн В.Э. Численное решение дифференциальных уравнений. ИЛ, 1955, 290 стр.

13. Михлин С.Г. Прямые методы в математической физике. Гостех-издат., 1950, 430 стр.

14. Сеидов З.Б., Мехтиева Г.Ю. Численное решение краевых задач для специальной системы линейных дифференциальных уравнений. Bakı Universitetinin Xəbərləri, Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, №1,УДК 519.622, 2014, səh. 5-8.

15. Сеидов З.Б., Мехтиева Г.Ю. Численное решение краевой задачи с интегральными условиями для дифференциальных уравнений IV порядка. Bakı Universitetinin Xəbərləri, Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, №1, УДК 519.622, 2015, səh. 5-8.

Fərdi islərin mövzuları:

1. Müxtəlif sərhəd məsələlərinin qoyuluşu.
2. Sərhəd məsələsinin Koşi məsələsinə gətirilməsi.
3. Atəş üsulu ilə sərhəd məsələsinin ədədi həlli.
4. Diferensial qovma üsulu.
5. Xətti fərq tənliklər sistemi üçün Rikkati çevirməsi.
6. Qovma üsulunun ümumiləşmələri.
7. I tərtib diferensial tənlik üçün inteqral şərtli sərhəd məsələsinin ədədi həlli.
8. II tərtib diferensial tənlik üçün inteqral şərtli sərhəd məsələsinin ədədi həlli.
9. Qalyorkin və kollokasiya üsullarında bazis funksiyalarının qurulması.
10. Reduksiya üsulu.
11. Rits üsulu.
12. Rits üsulunun tətbiqi.
13. III tərtib diferensial tənlik üçün inteqral şərtli sərhəd məsələsinin ədədi həlli.
14. IV tərtib diferensial tənlik üçün ikinöqtəli sərhəd məsələsinin ədədi həlli.
15. IV tərtib diferensial tənlik üçün inteqral şərtli sərhəd məsələsinin ədədi həlli.