# Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyi

# Bakı Dövlət Universiteti

## MAGİSTRATURA PİLLƏSİ ÜÇÜN

**İXTİSAS- Hesablama riyaziyyatı**

## FƏNN-İnteqral tənliklərin təqribi üsullarla həlli

**Bakı 2023**

## Мювзу üzrə saatların bölgüsü

| № | Мювзулар | Мцщ. саат. миг. | Мяш. саат. миг. |
|---|---|---|---|
| 1 | İнтеграл тянликлярин ядяди щялли haqqında ümumi məlumat. | 2 | 1 |
| 2 | Cırlaşmış nüvələr üsulunun xətti Volter tənliyinin həllinə tətbiqi. | 2 | 1 |
| 3 | Квадратур цсулун хятти Волтер тянлийинин щяллиня тятбиги. | 2 | 1 |
| 4 | Ardıcıl yaxınlaşma üsulunun xətti Volter tənliyinin həllinə tətbiqi. | 2 | 1 |
| 5 | Гейри-хятти ЫЫ нюв Волтер интеграл tənliyinin həllinə ardıcıl yaxınlaşma цсулун тятбиги. | 2 | 1 |
| 6 | Aşkar və qейри-ашкар цсулların бязи хцсусиййятляри. Proqnoz-korreksiya üsulu və onun yığılmasının tədqiqi. | 2 | 1 |
| 7 | Sabit əmsallı çoxaddımlı üsulların bəzi xüsusi hallarının Волтер типли интеграл тянликлярин ядяди щяллиня тятбиги. | 2 | 1 |
| 8 | Чохаддымлы цсулларын дягиглик дяряъяляринин ян бюйцк гиймяти щаггында. | 2 | 1 |
| 9 | Naməlum əmsallar цсулунun çохаддымлы цсулларын tədqiqinə tətbiqi. Чохаддымлы цсулларын | 2 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | əmsalları üzərinə qoyulan məhdudiyyətlər. | | |
| 10 | Бязи конкрет ədədi цсулларын гурулмасы. | 1 | |
| 11 | Ədədi цсулларын йыьылан олмасы цчцн зярури вя кафи шяртляр. | 1 | 1 |
| 12 | Sonlu fərqlər üsulunun Volter tipli inteqral tənliyin həllinə tətbiqi və onların sabit əmsallı çoxaddımlı üsullarla əlaqəsi. | 1 | |
| 13 | Yüksək dəqiqliyə malik hibrid üsulların qurulması və onların əmsalları üzərinə qoyulan məhdudiyyətlər. | 1 | |
| 14 | Bəzi konkret hibrid üsulların qurulması və model tənliklərin həllinə tətbiqi. | 1 | 1 |
| 15 | Hibrid üsulların Volter tipli inteqral tənliklərin həllinə tətbiqi. | 2 | 1 |
| **Cəm** | | 45 | |

**Elmi redaktor:** Bakı Dövlət Universitetinin «Hesablama riyaziyyatı» kafedrasının müdiri, f.r.e.d., prof. Mehdiyeva Qalina Yuryevna.

**Tərtib edənlər:** Bakı Dövlət Universitetinin «Hesablama riyaziyyatı» kafedrasının əməkdaşları f.r.e.d., prof. Mehdiyeva Qalina Yuryevna, f.r.e.n., baş müəllim Şəfiyeva Gülşən Xaliq qızı.

**Rəyçilər:** Bakı Dövlət Universitetinin «Hesablama riyaziyyatı» kafedrasının professoru, f.r.e.d. İbrahimov Vaqif Rza oğlu, AMEA-nın Riyaziyyat və Mexanika İnstitunun «Funksional analiz» şöbə-

sinin müdiri, ф.p.e.d., prof. Aslanov Həmdulla İsrafil oğlu.

# G İ R İ Ş

**1.** «İnteqral tənliklərin təqribi üsullarla həlli» fənninin məqsədi magistrlara inteqral tənliklərin təqribi üsullarla həllinin əsaslarını öyrətmək və onlarda bu üsullardan riyaziyyatın müxtəlif məsələlərinin həllində istifadə etmək vərdişlərini yaratmaqdır. «İnteqral tənliklərin təqribi üsullarla həlli» fənninin vəzifəsi bu üsulların nəzəriyyəsinin fundamental anlayışlarını öyrətmək, müxtəlif məsələlərin həllinə tətbiq ediləcək xüsusi üsulları nəzərdən keçirmək və konkret misallar vasitəsi ilə nəzəri nəticənin doğruluğunu magistrlara çatdırmaqdir.

**2.** Magistrlar inteqral tənliklərin təqribi üsullarla həlli ilə tanış olmalı və onları müxtəlif məsələlərin həllinə tətbiq edə bilməlidirlər.

**3.** Magistrlar inteqral tənliklərin təqribi üsullarla həllinə dərindən yiyələnərək bu üsullarla hesablama düsturlarını almağı, xətaları hesablamağı bacarmalıdırlar. Onlar bu üsulları müqayisə etməyi, hesablama texnikasının geniş tətbiqini nəzərə alaraq inteqral tənliklərin təqribi həll üsulları üçün müasir proqramlaşdırma dillərində proqramlar quraraq onları kompyuterdə realizə etməyi bacarmalıdırlar.

**4.** Magistrlar inteqral tənliklərin təqribi üsullarla həlli zamanı hesablama təcrübəsində məsələnin qoyuluşu, hesablama prosesinin planlaşdırılması, hesablama nəticələrinin emalı kimi vərdişlərə yiyələnməlidirlər.

**5.** «İnteqral tənliklərin təqribi üsullarla həlli» fənni magistrlara mühazirə və məşğələ dərslərində I kursun II semestrində 30 saat mühazirə və 15 saat məşğələ olmaqla 45 saat həcmində tədris olunur.

## 1. İnteqral tənliklərin ədədi həlli haqqında ümumi məlumat.

Son dövrlərdə inteqral tənliklərin təqribi, ədədi və hesablama texnikasında həll üsullarının öyrənilməsi mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

Burada inteqral tənliklər nəzəriyyəsində tədqiq edilən əsas xətti inteqral tənliklər haqqında ümumi məlumat verilir.

I və II növ Volter inteqral tənliklərini müqayisə edərək birindən digərinə keçid nümayiş etdirilir, Fredholm tənliyinin Volter tənliyi ilə əlaqəsinin şərhi verilir.

Volter tipli inteqral tənliklərin və adi diferensial tənliklərin ekvivalentliyini, birindən digərinə keçidi göstərməklə onların tədqiqat oblastlarının genişləndirilməsi göstərilir .

Volter inteqral tənliklərin təqribi həlli üçün bir çox ixtisasçılar tərəfindən müxtəlif xassələrə malik üsullar təklif olunmuşdur. Bunlardan biri analitik üsullar, digəri isə ədədi üsullardır. Analitik üsulların klassik nümayəndəsi Pikar ardıcıl yaxınlaşmaları, ədədi üsulların isə ən şox istifadə olunan nümayəndəsi kvadratur üsuldur.

## 2. Cırlaşmış nüvələr üsulunun xətti Volter tənliyinin həllinə tətbiqi.

Diferensial tənliklərin həll üsulları yaxşı işləndiyindən bir çox hallarda inteqral tənliyin ekvivalent diferensial tənliyə gətirilməsi əlverişli olur. Lakin bu keçid həmişə mümkün olmur və hər şeydən əvvəl $K(x,s)$ nüvəsindən asılıdır.

Tutaq ki, $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş sonlu sayda $\alpha_1(x),\alpha_2(x),...,\alpha_m(x)$ və $\beta_1(s),\beta_2(s),...,\beta_m(s)$ xətti asılı olmayan kəsilməz funksiyalar sistemi verilmişdir. Biri $x$, digəri isə $s$ dəyişənindən asılı iki funksiyanın hasilləri cəmindən düzələn

$$K(x,s)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)\beta_i(s)$$

şəkilli nüvəyə cırlaşmış nüvə (bölünən, ayrılan nüvələr) deyilir. Nüvənin ifadəsi II növ xətti Volter inteqral tənliyində yerinə yazıldıqda cırlaşmış nüvəli inteqral tənliyi alınır. Müəyyən işarəmələrdən və çevirmələrdən sonra diferensial tənliklər sistemi alınır, başlanğıc şərtlər tapılır. Bu sistemi həll edərək axtarılan $y(x)$ həlli tapılır.

## 3. Kvadratur üsulun xətti Volter tənliyinin həllinə tətbiqi.

II növ xətti Volter inteqral tənliyinin ədədi həlli zamanı $x$ və $s$ dəyişənlərinin sonlu intervalda dəyişdiyi qəbul edilir. İnteqral tənliyi istənilən üsulla ədədi həll edərkən tənliyə daxil olan inteqral sonlu cəmlə əvəz edilir. Cəmdəki düyün nöqtələrini və sabitləri konkret seçməklə konkret kvadratur düsturlar almaq olar.

İnteqrallama parçasının uc nöqtələri interpolyasiyanın düyün nöqtələridirsə, parçanın özü isə $n-1$ sayda bərabər hissəyə bölünübsə, onda müvafiq kvadratur düstur qapalı tip düstur adlanır. İnteqrallama parçasının uc nöqtələri interpolyasiyanın düyün nöqtələri deyilsə, parçanın özü isə $n+1$ sayda bərabər hissəyə bölünübsə, onda müvafiq kvadratur düstur açıq tip düstur adlanır.

Volter tənliyində adi məsələlərdən fərqli olaraq inteqralaltı funksiya məlum olmur. Ona görə də inteqral tənliyin həlli üçün hansı kvadratur düsturun seçilməsi nüvənin xassəsi və axtarılan həllin xarakterindən asılıdır.

## 4. Ardıcıl yaxınlaşma üsulunun xətti Volter tənliyinin həllinə tətbiqi.

Burada II növ xətti Volter tənliyinə baxılır. Fərz edilir ki, $K(x,s), f(x)$ $(a \le x \le b, a \le s \le b)$ funksiyaları kəsilməzdirlər. Başlanğıc yaxınlaşma olaraq ixtiyarı $y_0(x)$ $(a \le x \le b)$ kəsilməz funksiyası götürülür (xüsusi halda $y_0(x)$ olaraq $f(x)$ sərbəst həddini götürmək olar) və aşağıdakı ardıcıl yaxınlaşmalar qurulur:

$$y_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,s) y_{n-1}(s) ds, \; n = 1,2,\dots . \quad (1)$$

Sonra göstərilir ki, ixtiyari $\lambda$ üçün (1) düsturu ilə düzələn $\{y_n(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığı yığılır və limit funksiyası $y^*(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$ baxılan tənliyin yeganə həllidir.

İstənilən $n$ natural ədədi üçün $\{y_n(x)\}$ funksiyalar ardıcıllığının $y^*(x)$ həllinə yığılma sürəti

$$\left| y_n(x) - y^*(x) \right| \le \frac{[|\lambda| M(b-a)]^n}{n!} \max_{a \le s \le b} \left| y_0(s) - y^*(s) \right|,$$

düsturu ilə təyin edilir. Burada $M = \max\limits_{a \le x, s \le b} |K(x,s)|$.

## 5. Qeyri-xətti II növ Volter inteqral tənliyin həllinə kvadratur üsulun tətbiqi.

Xətti tənliklərə analoji olaraq iterasiya üsulunu müxtəlif növ qeyri-xətti tənliklərə də tətbiq etmək olar.

$$y(x) = f(x) + \int_a^x K(x,s,y(s))ds, \qquad (1)$$

II növ qeyri-xətti Volter inteqral tənliyi üçün iterasiya ardıcıllıqları aşağıdakı qaydada qurulur:

$$y_{n+1}(x) = f(x) + \int_a^x K(x,s,y_n(s))ds, \; n = 0,1,2,\ldots. \qquad (2)$$

Qeyd edək ki, xətti tənliklərdən fərqli olaraq qeyri-xətti tənliklər üçün iterasiya prosesinin yığılması daha məhdud sinfi əhatə edir. Burada (2) düsturu ilə düzələn $\{y_n(x)\}$ ardıcıllığının (1) tənliyinin həllinə sanki hər yerdə mütləq və müntəzəm yığılma şərti verilir. Alınan həllin sanki hər yerdə sıfra bərabər olan funksiya dəqiqliyi ilə yeganəliyi isbat edilir.

Daha sürətlə yığılan iterasiya prosesini qurmaq üçün müxtəlif üsullar vardır. Burada bu üsulların ən əhəmiyyətlilərindən biri II növ qeyri-xətti Volter inteqral tənliklərinin həllinə tətbiq edilir.

## 6. Aşkar və qейри-ашкар цсулların бязи хцсусиййятляри. Proqnoz-korreksiya üsulu və onun yığılmasının tədqiqi.

Burada aşkar və qeyri-aşkar üsullar haqqında geniş məlumat verməklə, onların birinin digərinə nəzərən üstün cəhətləri əsaslandırılır.

Məlumdur ki, qeyri-aşkar üsulların tətbiqi zamanı bir çox ixtisasçılar proqnoz-korreksiya sxemlərindən istifadəyə üstünlük verirlər. Bu səbəbdən də, burada proqnoz-korreksiya üsulunun müxtəlif variantları haqqında məlumat verilir, qeyri-aşkar üsullara proqnoz-korreksiya sxeminin tətbiqi nümayiş olunur və onların yığılması tədqiq edilir.

## 7. Sabit əmsallı çoxaddımlı üsulların bəzi xüsusi hallarının Volter tipli inteqral tənliklərin ədədi həllinə tətbiqi.

İnteqral tənliklərin tətbiq sahələri genişləndikdən sonra məlum oldu ki, bir çox məsələlərin həlli zamanı xətti model tənliyin həlli vasitəsindən istifadə etmək mümkün deyil. Buna görə də bir çox alimlər Volter tənliklərinin qeyri-xətti formasının tədqiqini prioritet istiqamət kimi təqdim edərək bu tip tənliklərin ədədi həlli üçün müxtəlif xüsusiyyətlərə malik üsulların qurulmasına üstünlük verirlər.

Burada ənənəvi üsullardan fərqli olaraq hər addımda inteqral nüvəsinin hesablanma işinin nəticəsi sabit olan üsul tədqiq edilir. Bu məqsədlə, II növ qeyri-xətti Volter tipli inteqral tənliyin həlli üçün aşağıdakı sabit əmsallı çoxaddımlı üsulun qurulması verilir:

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i y_{n+i} = \sum_{i=0}^{k}\alpha_i f_{n+i} + h\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{k}\beta_i^{(j)}K(x_{n+j}, x_{n+i}, y_{n+i}),\ h>0.$$

Harada ki, $\alpha_i, \beta_i^{(j)}$ $(i, j = 0,1,...,k)$ əmsalları hər hansı həqiqi ədədlərdir.

## 8. Çoxaddımlı üsulların dəqiqlik dərəcələrinin ən böyük qiyməti haqqında.

Sabit əmsallı çoxaddımlı üsul o zaman dayanıqlı adlandırılır ki, onun

$$\rho(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{k}\alpha_i \lambda^i$$

xarakteristik çoxhədlisinin kökləri vahid radiuslu çevrə daxilində yerləşsin və çevrə üzərində təkrarlanan kökləri olmasın.

Tam qiymətli $p$ kəmiyyətinə aşağıdakı asimptotik bərabərlik ödəndikdə

$$\sum_{i=0}^{k}\Big(\alpha_i\,(y(x+ih) - f(x+ih)) -$$

$$\left. - h\sum_{j=0}^{k}\beta_i^{(j)}K(x+jh, x+ih, y(x+ih))\right) = O(h^{p+1})$$

sabit əmsallı çoxaddımlı üsulunun dərəcəsi deyilir.

Burada sabit əmsallı çoxaddımlı dayanıqlı üsulların qurulması üçün istifadə edilən düsturlar verilir.

## 9. Naməlum əmsallar üsulunun çoxaddımlı üsulların tədqiqinə tətbiqi. Əmsallar üzərinə qoyulan məhdudiyyətlər.

Hər bir üsulun xüsusiyyətləri onun əmsallarının qiymətləri ilə təyin edilir. Burada üsulun $\alpha_i, \beta_i^{(j)}$ $(i, j = 0,1,..., k)$ əmsallarının tapılması üçün xətti cəbri tənliklər sistemi qurulur və onun həllinin varlığı araşdırılır. Hər bir üsulun tipi həmin üsulun əmsallarının tapılma sxemi ilə təyin edilir. Sabit əmsallı çoxaddımlı üsulları müxtəlif sxemlərin köməyi ilə qurmaq olar. Buna görə, çoxaddımlı üsulların $\alpha_i, \beta_i^{(j)}$ $(i, j = 0,1,..., k)$ əmsallarının tapılmasına naməlum əmsallar üsulu tətbiq olunur. Bu məqsədlə, sabit əmsallı çoxaddımlı üsulun xüsusi halı aşağıdakı Volter tipli qeyri-xətti inteqral tənliyin həllinə tətbiq edilir

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} K(s, y(s))ds \qquad (1)$$

və

$$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i y_{n+i} = y(x_0) \sum_{i=0}^{k} \alpha_i + h \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{k} \beta_i^{(j)} y'_{n+i} \qquad (2)$$

üsulu alınır.

(2) üsulunun dərəcəsinin $p$-yə bərabər olması üçün zəruri və kafi şərt həmin üsulun əmsallarının müəyyən bircins xətti cəbri tənliklər sistemini ödəməsidir və bu sistemdəki tənliklərin sayı $p+1$-ə, məchulların sayı isə $(k+2)(k+1)$-ə bərabərdir.

## 10. Bəzi konkret ədədi üsulların qurulması.

Burada $k = 2$ olduqda dayanıqlı üsulun qurulmasına baxılır. Bu məqsədlə, öncə üsulun əmsallarını tapmaq üçün cəbri tənliklər sistemi qurulur. Əgər sistemin sıfırdan fərqli həlli olarsa, onda bu həll vasitəsi ilə təyin olunan üsulun ən böyük dərəcəsi $p = 4$ olur.

Qeyd edək ki, dərəcəsi $p = 4$ olan üsul yeganə deyil. $\beta_i^{(j)}$ $(i, j = 0,1,2)$ əmsallarının qiymətlərini seçməklə burada dərəcəsi $p = 4$ olan müxtəlif xüsusiyyətli üsullardan biri qurulur.

## 11. Ədədi üsulların yığılan olması üçün zəruri və kafi şərtlər.

Yığılan çoxaddımlı üsulların əmsalları müəyyən məhdudiyyət şərtlərini ödəməlidir. Bu şərtləri aşağıdakı kimi yazmaq olar:

A. $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 0,1,...,k)$ əmsalları hər hansı həqiqi ədədlərdir və $\alpha_k \neq 0$.

B. Üsulun xarakteristik çoxhədlilərinin

$$\rho(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \lambda^i \; ; \; \delta(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{k} \beta_i \lambda^i \; ; \; \rho(\lambda) \equiv \sum_{i=0}^{k} \rho_i \lambda^{i+\nu_i}$$

sabitdən fərqli ortaq vuruqları yoxdur.

C. $\rho \geq 1$ və $\delta(1) \neq 0$.

## 12. Sonlu fərqlər üsulunun Volter tipli inteqral tənliyin həllinə tətbiqi və onların sabit əmsallı çoxaddımlı üsullarla əlaqəsi.

Burada çoxaddımlı üsulların qurulmasına sonlu fərqlər sxemi tətbiq edilir. Sonlu fərqlər üsulunun dəyişən sərhədli inteqral tənliklərin ədədi həllinə tətbiqi üçün II növ qeyri-xətti Volter tipli inteqral tənliyində $x = x_{n+k}$ qəbul edilir və aşağıdakı kimi yazılır:

$$y(x_{n+i}) = f(x_{n+i}) + \int_{x_0}^{x_{n+i}} K(x_{n+i}, s, y(s))ds \qquad (1)$$

$$(i = 0,1,2,...,k;\ n = 0,1,2,...)\ .$$

Fərz edilir ki, baxılan II növ qeyri-xətti Volter tipli inteqral tənliyinin $y(x)$ həlli hər hansı bir üsulla tapılmışdır. Bu həll baxılan tənlikdə nəzərə alınaraq müəyyən çevirmələr aparıldıqdan sonra birinci tərtib törəməli sonlu fərqlər tənliyi kimi yazıla bilər.

Sonra sonlu fərqlər üsulunun dəqiqliyini göstərmək üçün dərəcə anlayışından istifadə edilir. Üsulun dərəcəsinin $p$-yə bərabər olması üçün onun əmsallarının ödədiyi zəruri və kafi şərtlər verilir.

Bundan əlavə sonlu fərqlər üsulunu Volter tipli qeyri-xətti inteqral tənliyin həllinə tətbiq etməklə sabit əmsallı çoxaddımlar üsullarının bir variantının alınmasına baxılır.

## 13. Yüksək dəqiqliyə malik hibrid üsulların qurulması və onların əmsalları üzərinə qoyulan məhdudiyyətlər.

Son vaxtlar inteqral tənliklərin həllinin hibrid üsulları vasitəsi ilə tədqiqinə elmi ədəbiyyatda geniş yer verilir. Hibrid üsullar Adams və Runqe-Kutta üsulları üzərində qurulmuş, sonra isə ilk dəfə 1974-cü ildə Makroqlou tərəfindən Volter inteqral tənliyinin həllinə tətbiq edilmişdir. Çoxaddımlı üsullardan istifadə etməklə hibrid üsulların qurulmasına alimlər XX əsrin ikinci yarısında baxmışlar.

Burada hibrid üsulların qurulması məqsədilə aşağıdakı fərqə baxılır:

$$y(x_{n+1})-y(x_n)=g(x_{n+1})-g(x_n)+$$
$$+h\int_{x_0}^{x_n}K'_x(\xi_n,s,y(s))ds+\int_{x_n}^{x_{n+1}}K(x_{n+1},s,y(s))ds$$

harada ki, $x_n<\xi_n<x_n+h$. Hibrid üsulların əmsallarının ödədiyi müəyyən məhdudiyyət şərtləri verilir. Dəqiqliyini göstərmək üçün dərəcə anlayışından istifadə edilir.

## 14. Bəzi konkret hibrid üsulların qurulması və model tənliklərin həllinə tətbiqi.

Burada inteqral tənliklərin həllinin hibrid üsullar vasitəsi ilə tətbiqi məsələsinə baxılır. Bu üsulların məlum üsullardan üstün cəhətləri göstərilir və hibrid üsulların dəqiqliyini müqayisə edərək onların tətbiq dairələri müəyyənləşdirilir.

Aşağıdakı üsula baxılır:

$$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i y_{n+i}=h\sum_{i=0}^{k}\beta_i y'_{n+i}+h\sum_{i=0}^{k}\gamma_i y'_{n+i+\nu_i}\,, \qquad (1)$$

harada ki, $\beta_i,\gamma_i$ $(i=0,1,...,k)$ əmsalları aşağıdakı şərtləri ödəyir:

$$\sum_{j=0}^{k}\beta_i^{(j)}=\beta_i;\quad \sum_{j=0}^{k}\gamma_i^{(j)}=\gamma_i \quad (i=0,1,2,...,k). \qquad (2)$$

Adətən, $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$ $(i=0,1,...,k)$ əmsalları başqa bir sistemdən tapılır və sonra bu qiymətlərin köməyi ilə $\beta_i^{(j)},\gamma_i^{(j)}$ $(i,j=0,1,...,k)$ əmsalları (2) sistemindən tapılır.

(1) üsulu qeyri-aşkar üsullar sinfinə daxildir, bu isə onun tətbiqi zamanı bir çox çətinliklərə səbəb olur. Buna görə də, aşkar üsulun qurulmasına baxılır.

## 15. Hibrid üsulların Volter tipli inteqral tənliklərin həllinə tətbiqi.

Burada bəzi üsullar Volter inteqral tənliyinin həllinə tətbiq edilir. Fərz edilir ki, $y_0$ və $y_{1/2}$ başlanğıc qiymətləri məlumdur. Onda aşağıdakı yazıla bilər:

$$\begin{aligned}
y_{n+1}&=y_n+g_{n+1}-g_n+h(2K(x_{n+1},x_{n+1},y_{n+1})+\\
&+K(x_{n+1},x_n,y_n)+K(x_{n+1},x_n,y_n))/24+\\
&+5hK((x_{n+1},x_{n+1/2-\sqrt{5}/10},y_{n+1/2-\sqrt{5}/10})+\\
&+K(x_{n+1/2-\sqrt{5}/10},x_{n+1/2-\sqrt{5}/10},y_{n+1/2-\sqrt{5}/10})+\\
&+K(x_{n+1},x_{n+1/2-\sqrt{5}/10},y_{n+1/2+\sqrt{5}/10})+\\
&+K(x_{n+1/2+\sqrt{5}/10},x_{n+1/2+\sqrt{5}/10},y_{n+1/2+\sqrt{5}/10}))/24.
\end{aligned}$$

## Əsas ədəbiyyat

1. Məmmədov Y.C. Təqribi hesablama üsulları. Бакы, «BDU», 2008, 288 s..

2. Aslanov H.İ., Hüseynov Z.Q. İnteqral tənliklər: təqribi həll üsulları, EHM-in tətbiqi. Бакы, «ADİLOĞLU», 2001, 182 s..
3. Mehdiyeva Q.Y., İmanova M.N. II növ Volter inteqral tənliyinin həllinə çoxaddımlı üsulların tətbiqi. Бакы, «MBM», 2015, 112 s..
4. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев, «Наукова Думка», 1986, 544 с..
5. Corduneanu C. İntegral equations and applications. Cambridge University press, New York, Port Chester, Melbourne, Sydney, 1991, 366 p..
6. Манжиров А.В., Полянин А.Д. Справочник по интегральным уравнениям: методы решения. Москва, «Факториал Пресс», 2000, 384 с..
7. Вержбицкий В.М. Численные методы. Москва, «Высшая школа», 2001, 382 с..
8. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. «Физматгиз», т.2, 1962, 620 с..
9. Мамедов Я.Д., Аширов С.А. Нелинейные уравнения Вольтерра. Ашхабад, «Илым», 1977.
10. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. Москва, «Наука», 1982, 304 с..

## Əlavə ədəbiyyat

1. Makroglou A.A. Hybrid Methods in the numerical solution of Volterra integro-differential equations. Journal of Numerical Analysis, 1982, №2, p.21-35.

2. Мамедов Я.Д., Аширов С.А. Методы последовательных приближений для решения операторных уравнений. Ашхабад, 1980, 118 с.
3. Ибрагимов В.Р., Мехтиева Г.Ю. Об одном обобщении метода квадратур. Вестник Бакинского Университета, серия физ.-мат. наук, №1, 2008, с.92-98.
4. Мехтиева Г.Ю., Ибрагимов В.Р., Иманова М.Н. Об одной модификации метода квадратур. Вестник Бакинского Университета, серия физ.-мат. наук, №3, 2009, с.101-108.
5. Мехтиева Г.Ю., Иманова М.Н., Ибрагимов В.Р. Об одном применении методов типа Коэлла. Вестник Бакинского Университета, серия физ.-мат. наук, №2, 2010, с.92-99.
6. Mehdiyeva G.Yu., Imanova M.N., Ibrahimov V.R. On one application of forward jumping methods. Applied Numerical Mathematics 72 (2013), p.234-245.
7. Atkinson K.E. A survey of numerical methods for solving nonlinear integral equations. Journal of integral equations and applications. v.4, №1, 1992, p.15-46.
8. Brunner H. The solution of Volterra integral equations of the first kind by piecewise polynomials. J.Math. and Appl., №12, 1973, p.295-302.
9. Feldstein A., Sopka J.R. Numerical methods for nonlinear Volterra integro-differential equations. SİAMJ. Numer. Anal., 1974, v.11, №4, p.826-846.
10. Linz P. Linear Multistep Methods for Volterra integro-differential equations. Journal of the

Association for Computing Machinery, 1969, v.16, №2, p.295-301.

## Fərdi işlərin mövzuları:

1. İнтеграл тянликлярин ядяди щялли haqqında ümumi məlumat.
2. Cırlaşmış nüvələr üsulunun xətti Volter tənliyinin həllinə tətbiqi.
3. Квадратур цсулун хятти Волтер тянлийинин щяллиня тятбиги.
4. Ardıcıl yaxınlaşma üsulunun xətti Volter tənliyinin həllinə tətbiqi.
5. Гейри-хятти ЫЫ нюв Волтер интеграл tənliyin həllinə kvadratur цсулун тятбиги.
6. Aşkar və qейри-ашкар цсулların бязи хцсусиййятляри. Proqnoz-korreksiya üsulu və onun yığılmasının tədqiqi.
7. Sabit əmsallı çoxaddımlı üsulların bəzi xüsusi hallarının Волтер типли интеграл тянликлярин ядяди щяллиня тятбиги.
8. Чохаддымлы цсулларын дягиглик дяряъяляринин ян бюйцк гиймяти щаггында.
9. Naməlum əmsallar цсулунун çохаддымлы цсулларын tədqiqinə tətbiqi. Чохаддымлы цсулларын əmsalları üzərinə qoyulan məhdudiyyətlər.
10. Бязи конкрет ədədi цсулларын гурулмасы.
11. Ədədi цсулларын йыьылан олмасы цчцн зярури вя кафи шяртляр.

12. Sonlu fərqlər üsulunun Volter tipli inteqral tənliyin həllinə tətbiqi və onların sabit əmsallı çoxaddımlı üsullarla əlaqəsi.
13. Yüksək dəqiqliyə malik hibrid üsulların qurulması və onların əmsalları üzərinə qoyulan məhdudiyyətlər.
14. Bəzi konkret hibrid üsulların qurulması və model tənliklərin həllinə tətbiqi.
15. Hibrid üsulların Volter tipli inteqral tənliklərin həllinə tətbiqi.