

AZƏRBAYCAN RESPUBLİKASI ELM VƏ TƏHSİL NAZİRLİYİ  
**BAKİ DÖVLƏT UNİVERSİTETİ**



AZƏRBAYCAN XALQININ ÜMUMMİLLİ LİDERİ  
HEYDƏR ƏLİYEVİN ANADAN OLMASININ  
103-CÜ İLDÖNÜMÜNƏ HƏSR OLUNMUŞ

**TƏTBİQİ RİYAZİYYATIN MÜASİR PROBLEMLƏRİ**

**XXVI RESPUBLİKA ELMİ KONFRANSININ  
MATERİALLARI**

Bakı, 12-13 may 2026-cı il

BAKİ – 2026

Azərbaycan xalqının Ümummilli Lideri Heydər Əliyevin anadan olmasının 103-cü ildönümünə həsr olunmuş "Tətbiqi riyaziyyatın müasir problemləri" mövzusunda XXVI Respublika elmi konfransının materialları. Bakı, 12-13 may 2026-cı il. Bakı: BDU Nəşr Evi, 2026. – 442 səh.

ISBN: 978-9952-588-76-7

© Bakı Dövlət Universiteti, 2026

## **TƏŞKİLAT KOMİTƏSİ**

### **Sədr:**

Ələkbər Əliyev

Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsinin  
dekanı

### **Sədr müavini:**

Yusif Məmmədov

Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsinin  
Riyazi-fizika tənlikləri kafedrasının müdiri

### **Üzvlər:**

Abbas Mehdiyev

Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsinin  
tədris işləri üzrə dekan müavini

Səadət Əliyeva

Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsinin  
Riyazi kibernetika kafedrasının dosenti

Aygün Abbasova

Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsinin  
Riyazi fizika tənlikləri kafedrasının dosenti

Tutu Orucova

Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsinin  
İnformasiya texnologiyaları və  
proqramlaşdırma kafedrasının dosenti

Saleh Əhmədov

Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsinin  
Riyazi fizika tənlikləri kafedrasının dosenti

Çinarə Tariverdiyeva

Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsinin  
İnformasiya texnologiyaları və  
proqramlaşdırma kafedrasının müəllimi

Günay Səfərova

Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsinin  
Optimallaşdırma və idarəetmə kafedrasının  
müəllimi

Aynurə Məmmədova

Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsinin  
magistratura təhsil səviyyəsi üzrə II kurs  
tələbəsi

## **PROQRAM KOMİTƏSİ**

### **Sədr:**

Rafiq Tağıyev                      Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsinin  
Optimallaşdırma və idarəetmə kafedrasının müdiri

### **Üzvlər:**

|                       |                                                                                                                                                                                           |
|-----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Həmzəağa Orucov       | Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsinin Tətbiqi riyaziyyat kafedrasının müdiri                                                                                                     |
| Rövşən Əliyev         | Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsinin Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika kafedrasının müdiri                                                                               |
| Mübariz Xəlilov       | Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsinin İnformatika kafedrasının müdiri                                                                                                            |
| Fərhad Mirzəyev       | Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsinin İqtisadi kibernetika kafedrasının müdiri                                                                                                   |
| Aydın Əliyev          | Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsinin İnformasiya texnologiyaları və proqramlaşdırma kafedrasının müdiri                                                                         |
| Aqil Xanməmmədov      | BDU-nun Tətbiqi riyaziyyat kafedrasının professoru                                                                                                                                        |
| Jalə Əhmədova         | Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsinin Riyazi kibernetika kafedrasının dosenti                                                                                                    |
| Ramiz Əhmədov         | Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsinin Riyazi fizika tənlidləri kafedrasının dosenti                                                                                              |
| Araz Əliyev           | Azərbaycan Dövlət Neft və Sənaye Universitetinin Ümumi və tətbiqi riyaziyyat kafedrasının müdiri                                                                                          |
| Ramin Rzayev          | Azərbaycan Respublikasının Elm və Təhsil Nazirliyinin (ARETN) İdarəetmə Sistemləri İnstitutunun Qərarlarının qəbul edilməsini dəstəkləyən informasiya sistemləri laboratoriyasının müdiri |
| Məsumə Məmmədova      | Azərbaycan Respublikasının Elm və Təhsil Nazirliyinin (ARETN) İnformasiya Texnologiyaları İnstitutunun 11 sayılı şöbəsinin müdiri                                                         |
| Ramiz Alıquliyev      | Azərbaycan Texniki Universitetinin (AzTU) Data Elmi və Süni İntellekt İnstitutunun direktoru                                                                                              |
| Atif Namazov          | AzTU-nun Mühəndis riyaziyyatı və süni intellekt kafedrasının müdiri                                                                                                                       |
| Sevinc Əliyeva        | Bakı Mühəndislik Universitetinin İnformasiya texnologiyaları və proqramlaşdırma kafedrasının müdiri                                                                                       |
| <b>Tərtibatçılar:</b> |                                                                                                                                                                                           |
| Çinarə Tariverdiyeva  | Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsinin İnformasiya texnologiyaları və proqramlaşdırma kafedrasının müəllimi                                                                       |
| Günay Səfərova        | Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsinin Optimallaşdırma və idarəetmə kafedrasının müəllimi                                                                                         |



## QEYRİ-BİRCİNS MÜHİTDƏ İSTİLİK DALĞALARININ YAYILMASININ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ FƏZASINA GÖRƏ RİYAZİ MODELƏŞDİRİLMƏSİ

**Abbasov Zəfər Duman oğlu**

(GDU, Riyaziyyat informatika fakültəsi)

zafer.abbasov@gdu.edu.az

**Xülasə:** Baxılan iş qeyri-bircins mühitlərdə istilik dalğalarının yayılmasının  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  fəzasında analitik həllinin tapılması və riyazi xüsusiyyətlərinin tədqiq olunmasına həsr olunmuşdur. Tədqiqatda istilik siqnallarının sonlu yayılma sürətini nəzərə alan və bununla da Furiye qanununa xas olan "sonsuz yayılma sürəti" anlayışını aradan qaldıran Kattaneo-Vernott prinsipinə əsaslanan kvazi-xətti hiperbolik istilikkeçirmə tənliyi üçün bir sərhəd məsələsi araşdırılmışdır. Burada həm temperatur sahəsinin, həm də məkan qradientinin kvadratik integrallanan olmasını təmin edən sonsuzölçülü Sobolev fəzasında dəyişənlərə ayırma və məxsusi funksiyaların ayrılışı üsulundan istifadə edilərək, dövri istilik yüklənməsinə və Neyman sərhəd şərtlərinə tabe olan sistem üçün aşkar analitik həll müəyyən edilmişdir.

**Açar sözlər:** Qradyent, qeyri-bircins mühit, temperatur sahəsi, istilik dalğaları, analitik həll, Neyman şərti

**Məsələnin riyazi qoyuluşu:** Burada qeyri-bircins mühitdə istilik dalğalarının  $[0, T]$  zaman intervalında  $\partial\Omega$  sərhədli  $n$  – ölçülü  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  oblastında  $U(x, t)$  temperatur sahəsinin dəyişməsi zamanı istilik yayılmasının sonlu sürətini nəzərə almaq üçün Kattaneo-Vernotta relaksasiya effektini özündə birləşdirən aşağıdakı (1) kvazi-xətti hiperbolik tənlik üçün (2) Neyman sərhəd şərti və (3)-(4) Koşi şərtlərini ödəyən qarşışıq məsələnin ümumilləşmiş həllinə baxılır [1-7].

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\tau \rho c} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial \lambda(x)}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_i} + \lambda(x) \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} \right] + S(x) [T(t) + \tau T'(t)] \right\}, \quad (1)$$

burada  $T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(\omega_k t) + b_k \sin(\omega_k t)]$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,

$$-\lambda(x) \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0, x \in \partial\Omega, \quad (2)$$

$$U(x, 0) = \varphi(x), x \in \Omega, \quad (3)$$

$$U_t(x, 0) = \psi(x), x \in \Omega, \quad (4)$$

**Məsələnin analitik həlli:** (1)-(4) məsələsinin xüsusi həllini Furiye metoduna görə

$$U(x, t) = \sum_{m=1} \Phi_m(x) T_m(t), \quad (5)$$

sırası şəklində axtarılır. (5)-i (1) tənliyində nəzərə alıb, qruplaşdırma aparsaq,

aşağıdakı münasibəti alırıq.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(x) T''_m(t) + \frac{1}{\tau} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(x) T'_m(t) = \frac{1}{\tau \rho c} \times$$

$$\times \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} T_m(t) \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda(x) \frac{\partial \Phi_m}{\partial x_i} \right) \right] + F(x, t) \right\}, \quad (6)$$

$$F(x, t) = S(x)[T(t) + \tau T'(t)],$$

Buradan,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda(x) \frac{\partial \Phi_m(x)}{\partial x_i} \right) + \Lambda_m \Phi_m = 0 \\ \frac{\partial \Phi_m}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

tənliklər sistemi və bu sistemi ödəyən,  $\{\Phi_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$  məxsusi funksiyalardan asılı

$$\Phi_m(x) = \prod_{i=1}^n \cos\left(\frac{m_i \pi x_i}{L_i}\right), \Lambda_m = \prod_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{m_i \pi}{L_i}\right)^2, m = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n, \quad (8)$$

həlləri və zamana nəzərən ikinci tərtib bircins olmayan adi diferensial tənliyin həlli ilə əlaqədardır [8,9].

$$T''_m(t) + \frac{1}{\tau} T'_m(t) + \omega_m^2 T_m(t) = f_m(t), \omega_m^2 = \frac{\Lambda_m}{\tau \rho c} \quad (9)$$

burada,  $f_m(t) = \frac{S_m}{\tau \rho c} [T(t) + \tau T'(t)]$  qəbul olunmuşdur. Bu tənliyin ümumi həllini yazsaq:

$$T_m(t) = T_m^t + T_m^p, \quad (10)$$

$$T_m^t = e^{-\frac{t}{2\tau}} [C_{m,1} \cos(\bar{\omega}_m t) + C_{m,2} \sin(\bar{\omega}_m t)], \bar{\omega}_m = \sqrt{\omega_m^2 - \frac{1}{4\tau^2}} \quad (11)$$

$$T_m^p = \frac{A_{m,0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [A_{m,k} \cos(\omega_k t) + B_{m,k} \sin(\omega_k t)], \quad (12)$$

$$A_{m,k} = \frac{S_m}{\tau \rho c D_{m,k}} \left[ \bar{a}_k (\omega_m^2 - \omega_k^2) - \bar{b}_k \left( \frac{\omega_k}{\tau} \right) \right],$$

$$B_{m,k} = \frac{S_m}{\tau \rho c D_{m,k}} \left[ \bar{b}_k (\omega_m^2 - \omega_k^2) - \bar{a}_k \left( \frac{\omega_k}{\tau} \right) \right], k = 0: A_{m,0} = \frac{S_m a_0}{2 \Lambda_m};$$

Harmonik dəyişmə zamanı  $k \geq 1: D_{m,k} = (\omega_m^2 - \omega_k^2)^2 + \left( \frac{\omega_k}{\tau} \right)^2$

$\bar{a}_k = a_k + \tau \omega_k b_k$ ,  $\bar{b}_k = b_k - \tau \omega_k a_k$ , əmsalların uyğun qiymətlərini (12), (11), (10) -da yerinə yazıb, məxsusi funksiyalar çoxluğunun (8) ifadəsi ilə birlikdə (5), xüsusi həll düsturunda nəzərə alsaq, qoyulmuş (1)-(4) məsələsinin ümumi həllini tapmış olarıq. Yəni:

$$U(x, t) = \sum_m \left\{ e^{-\frac{t}{2\tau}} [C_{m,1} \cos(\bar{\omega}_m t) + C_{m,2} \sin(\bar{\omega}_m t)] + T_m^p \right\} \prod_{i=1}^n \cos\left(\frac{m_i \pi x_i}{L_i}\right) \quad (13),$$

Bu həll düsturunda (3)-(4) Koşi şərtlərini nəzərə alsaq, verilmiş məsələnin birqiymətli, başlanğıc məlumatlardan asılı kəsilməz həllini tapmış olarıq.

**Lemma. (Ortoqonallıq)**

$\Phi_m(x) = \prod_{i=1}^n \cos\left(\frac{m_i \pi x_i}{L_i}\right)$  məxsusi funksiyaları  $L_2(\Omega)$  fəzasında tam ortoqonal bazis əmələ gətirir və onların qradientləri  $\nabla \Phi_m$  kvadratı inteqrallanan funksiyalardır o zaman ki, aşağıdakı şərtləri ödəyir:

$$\frac{1}{\|\Omega\|} \int_{\Omega} \Phi_m(x) \Phi_k(x) d\Omega = \delta_{mk}, \quad \frac{1}{\|\Omega\|} \int_{\Omega} \nabla \Phi_m(x) \nabla \Phi_k(x) d\Omega = \delta_{mk},$$

burada  $\delta_{mk} = \begin{cases} 1, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases}$

**İsbatı.** Şərtə görə lemmanın isbatı Laplas operatorunun Neyman sərhəd şərtləri daxilində öz-özünə qoşma olmasından çıxır. Elliptik operatora  $\Omega$  məhdud paralelepiped oblastında baxıldığından, belə spektral məsələ  $\Lambda_m \rightarrow \infty$  şərtini ödəyən hesabi sayda məxsusi qiymətlər çoxluğunun və Hilbert fəzasında tam ortonormal bazisin mövcudluğunu təmin edir.  $\square$

### Ədəbiyyat

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математические физики Москва, Наука. 2017, ст. 644
2. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М., Уравнения в частных производных математической физики» М., 2020, ст.710
3. Владимиров В.С., Уравнение математические физики, Москва: Наука, 2008, ст. 512
4. Соболев С.Л., Уравнение математической физики., Москва Наука 2009, ст. 628
5. В.П.Михайлов., Дифференциальные уравнения в частных производных.. Москва, Наука 1999, ст. 392
6. Z.D.Abbasov, Riyazi fizika tənlikləri, Bakı- 2018, 380 səh.
7. Zəfər D.Abbasov., Xüsusi törəməli diferensial tənliklər. Gəncə-2024, 140 səh.
8. Abbasov, Z. D., Juraev, D. A., Abdullaev, O. K., Nurhidayat, I., Shah, M. A. (2025). Heat Transfer in n-Dimensional Parallelepipeds Under Zero Dirichlet Conditions. Engineering Reports. <https://doi.org/10.1002/eng2.70458>
9. Abbasov, Z. D. (2019). Application of the Fourier method to a mixed boundary-value problem. ESU, 3(60), pp. 42–48

## **AZƏRBAYCANDA ƏHALİ QOCALMASI: DEMOQRAFİK KEÇİD VƏ SOSIAL-İQTİSADI ADAPTASIYA**

**Abbasova Səbinə Qılıncxan qızı, Xəlilova Aygün İftar qızı,**

**Abasov Muhəmməd Əvəz oğlu**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*abbasova.sabina@bsu.edu.az, xalilova.aygun.iftar@bsu.edu.az*

*abasov.muhammed88@gmail.com*

**Xülasə:** *Bu işdə Azərbaycan əhalisinin qocalma prosesi demoqrafik göstəricilər əsasında təhlil edilmiş, qocalma indeksinin dinamikası öyrənilmiş və gələcək tendensiyalar proqnozlaşdırılmışdır.*

**Açar sözlər:** *doğum səviyyəsi, qocalma prosesi, demoqrafik təhlil, qocalma indeksi, əhali proqnozu, yaş struktur, aktiv qocalma.*

Əhalinin qocalması müasir dünyanın ən aktual sosial-iqtisadi problemlərindən biridir. Azərbaycanda son onilliklər ərzində orta ömür uzunluğunun artması və doğum səviyyəsinin azalması nəticəsində yaşlı əhalinin payı ardıcıl olaraq yüksəlməkdədir. Bu prosesin təhlili ölkənin gələcək sosial siyasətinin formalaşdırılması baxımından böyük əhəmiyyət kəsb edir.

Doğum səviyyəsinin stabilləşməsi və orta ömür uzunluğunun artması ölkənin yaş strukturunda ciddi dəyişikliklərə yol açır. Bu proses təkcə statistik rəqəmlərin dəyişməsi deyil, həm də səhiyyə, sosial müdafiə və əmək bazarının tamamilə yenidən qurulmasını tələb edən strateji bir sınaqdır.

BMT-nin meyarlarına görə, bir ölkədə 65 yaşdan yuxarı insanların sayı ümumi əhalinin 7%-ni keçirsə, həmin cəmiyyət "qocalan cəmiyyət" hesab olunur. Azərbaycanın cari statistikasına nəzər saldıqda, bu göstəricinin sürətlə 7% həddinə yaxınlaşdığı və bəzi proqnozlara görə artıq keçdiyi müşahidə olunur. Müstəqilliyin ilk illəri ilə müqayisədə Azərbaycanda orta ömür uzunluğu artaraq 73-75 yaş həddinə çatmışdır. 1990-cı illərin əvvəllərində hər qadına düşən doğum sayı 2.9 idisə, hazırda bu rəqəm 1.5-1.7 civarına enmişdir ki, bu da nəslin bərpası üçün lazım olan 2.1 göstəricisindən aşağıdır.

Azərbaycanda qocalma prosesi bir neçə faktorun təsiri altında sürətlənir:

1. **Urbanizasiya:** Şəhər həyat tərzini ailə modelini kiçildir. Böyük şəhərlərdə yaşayan gənc ailələr daha çox bir və ya iki uşağa üstünlük verirlər.
2. **Təhsil və karyera:** Qadınların təhsilə və əmək bazarına aktiv inteqrasiyası ilk nikah və ilk uşağın doğum yaşını yuxarı çəkir.
3. **Səhiyyənin inkişafı:** Yoluxucu xəstəliklərlə mübarizə və ana-uşaq sağlamlıq

lığının qorunması orta yaş həddini artırır.

Əhalinin qocalması Azərbaycan iqtisadiyyatı üçün ikiqat yük yaradır:

- **Əmək qabiliyyətli əhalinin azalması:** Gənc işçi qüvvəsinin nisbi azalması əmək bazarında təklifin zəifləməsinə və gələcəkdə iqtisadi artımın ləngiməsinə səbəb ola bilər.
- **Sosial xərclərin artması:** Pensiya ödənişləri ilə yanaşı, yaşlı əhaliyə göstərilən tibbi xidmətlərin xərcləri də artır. Yaşlı insanlar daha çox xroniki xəstəliklərdən əziyyət çəkdikləri üçün icbari tibbi sığorta sisteminə düşən maliyyə təzyiqi güclənir.  
Azərbaycan hökuməti bu çağırışlara cavab olaraq bir sıra mühüm addımlar atmışdır:
- **Pensiya yaşının artırılması:** 2017-ci ildən tətbiq edilən qanunvericilik dəyişikliyi ilə həm kişilər, həm də qadınlar üçün pensiya yaşının mərhələli şəkildə 65-ə çatdırılması nəzərdə tutulub. Bu, sistemin aktuar balansını qorumaq üçün zəruri idi.
- **Dayanıqlı inkişaf proqramları:** "Aktiv qocalma" konsepsiyası çərçivəsində yaşlıların cəmiyyətdən təcrid olunmaması üçün DOST mərkəzləri vasitəsilə müxtəlif layihələr (məsələn, "Üçüncü bahar") həyata keçirilir.
- **Özəl Pensiya Fondları layihəsi:** Hazırda ölkədə yığım komponentinin gücləndirilməsi üçün özəl pensiya fondlarının yaradılması üzərində işlər aparılır. Qocalmanı yalnız problem kimi deyil, həm də fürsət kimi dəyərləndirmək mümkündür.
- Yaşlı əhalinin təcrübəsindən mentorluq və məsləhətçi sahələrində istifadə edilməsi;
- Yaşlılar üçün turizm, reabilitasiya və rəqəmsal xidmətlərin inkişafı iqtisadiyyata yeni nəfəs verə bilər.

Əhalinin yaş-cins piramidasının təhlili göstərir ki, 15–64 yaş qrupu (əmək qabiliyyətli əhali) 2000–2023-cü illər ərzində ümumi əhalinin 64,1%-dən 70,2%-ə qalxmış, lakin 0–14 yaş qrupu 30,1%-dən 22,3%-ə enmiş, 65+ yaş qrupu isə 5,8%-dən 7,5%-ə yüksəlmişdir[1-3].

Azərbaycanda əhalinin qocalması hələ ki kritik həddə çatmasa da, növbəti 20 il üçün proqnozlar ciddi hazırlıq tələb edir. Pensiya sisteminin rəqəmsallaşması, qeyri-neft sektorunun inkişafı vasitəsilə yeni gəlir mənbələrinin yaradılması və "ömürboyu təhsil" prinsipi ilə yaşlıların əmək bazarına uyğunlaşdırılması Azərbaycanın bu demoqrafik keçiddən uğurla çıxmasını təmin edən əsas sütunlar olacaqdır.

### **Ədəbiyyat**

1. A.F.Musayev, R.S.Kərimov, Demografik proseslərin riyazi modelləşdirilməsi – Bakı: BSU nəşriyyatı, 2018. – 312 s.
2. Azərbaycan Respublikasının Dövlət Statistika Komitəsi. Əhalinin demografik göstəriciləri. – Bakı, 2023.
3. Caswell H., Matrix Population Models: Construction, Analysis, and Interpretation – Sinauer Associates, 2001. – 722 p.

## **AZƏRBAYCANDA ƏHALİNİN DOĞUM ƏMSALININ TƏHLİLİ**

**Abbasova Səbinə Qılıncxan qızı, Abasov Muhəmməd Əvəz oğlu**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*abbasova.sabina@bsu.edu.az*

*abasov.muhammed88@gmail.com*

**Xülasə:** Bu məqalədə Azərbaycanda əhalinin doğum əmsalının mövcud vəziyyəti və ona təsir edən əsas amillər araşdırılmışdır. Məqalədə doğum göstəricilərinin ölkənin demografik inkişafında mühüm rol oynadığı qeyd edilmiş, son illərdə doğum əmsalında müşahidə olunan dəyişikliklər təhlil olunmuşdur. Eyni zamanda iqtisadi vəziyyət, urbanizasiya, təhsil səviyyəsi, məşğulluq və sosial dəyişikliklərin doğum göstəricilərinə təsiri izah edilmişdir. Məqalədə doğum əmsalının azalmasının gələcəkdə əhalinin yaşlanması və əmək bazarında müəyyən problemlər yarada biləcəyi vurğulanmışdır. Sonda isə demografik sabitliyin qorunması üçün dövlət dəstəyi və sosial siyasətin əhəmiyyəti qeyd olunmuşdur.

**Açar sözlər:** Doğum əmsalı, demografiya, əhali artımı, urbanizasiya, sosial inkişaf, iqtisadi amillər, ailə siyasəti, Azərbaycan əhalisi, demografik vəziyyət, sosial rifah.

Əhalinin doğum əmsalı ölkənin demografik vəziyyətini müəyyən edən əsas göstəricilərdən biridir. Doğum əmsalı müəyyən dövrdə hər min nəfərə düşən doğulan uşaqların sayını ifadə edir. Bu göstərici əhalinin artım sürətini, cəmiyyətin sosial vəziyyətini və gələcək iqtisadi inkişaf imkanlarını müəyyənləşdirmək baxımından mühüm əhəmiyyət daşıyır. Hər bir dövlət üçün əhalinin sayı və onun yaş tərkibi strateji əhəmiyyətə malikdir. Buna görə də doğum göstəricilərinin öyrənilməsi və təhlili demografiyanın əsas məsələlərindən biri hesab olunur.

Azərbaycan tarixən yüksək doğum göstəricilərinə malik ölkələrdən biri olmuşdur. Xüsusilə kənd yerlərində çoxuşaqlı ailələr geniş yayılmışdır. Lakin son illərdə ölkədə sosial-iqtisadi dəyişikliklər, urbanizasiya prosesinin sürətlənməsi və həyat tərzinin dəyişməsi nəticəsində doğum əmsalında müəyyən azalma müşahidə olunur. Bu dəyişikliklər həm cəmiyyətin sosial strukturuna, həm də ölkənin gələcək inkişafına təsir göstərir[1].

Azərbaycanda əhalinin sayı uzun illər ərzində artmışdır. Müstəqillik dövrünün ilk illərində baş verən iqtisadi çətinliklər doğum göstəricilərinə mənfi təsir etsə də, sonrakı illərdə vəziyyət nisbətən sabitləşmişdir. Bununla belə, son dövrlərdə doğulan uşaqların sayında azalma müşahidə edilir. Statistik məlumatlar göstərir ki, əvvəlki dövrlərlə müqayisədə ailələr daha az uşaq sahibi olmağa üstünlük verirlər.

Doğum əmsalının azalmasının əsas səbəblərindən biri insanların həyat şəraitinin dəyişməsidir. Müasir dövrdə ailələrin maddi xərcləri artmış, uşaqların təhsili və tərbiyəsi üçün daha çox vəsait tələb olunmağa başlamışdır. Buna görə də bir çox ailələr az sayda uşaq böyütməyi daha uyğun hesab edir.

Şəhərlərdə yaşayan ailələrdə doğum səviyyəsi kənd yerlərinə nisbətən daha aşağıdır. Bunun səbəbi şəhər həyatının daha bahalı olması, mənzil probleminin mövcudluğu və insanların daha çox karyera qurmağa üstünlük verməsidir. Kənd yerlərində isə ənənəvi ailə dəyərləri daha güclü olduğu üçün çoxuşaqlı ailələrə daha çox rast gəlinir.

Azərbaycanda doğum əmsalına təsir edən müxtəlif sosial, iqtisadi və mədəni amillər vardır. Əhalinin maddi rifahı doğum göstəricilərinə birbaşa təsir edir. İşsizlik, yaşayış xərclərinin artması, mənzil probleminin mövcudluğu ailələrin uşaq sayına təsir göstərir. Maddi vəziyyəti zəif olan ailələr daha çox uşağa sahib olmaqdan çəkinirlər. Buna baxmayaraq, dövlət tərəfindən sosial müavinətlərin və ailələrə verilən dəstəyin artırılması müəyyən müsbət təsir göstərə bilər. Təhsil səviyyəsinin yüksəlməsi və qadınların əmək bazarında daha fəal iştirak etməsi də doğum əmsalına təsir edən mühüm amillərdəndir. Müasir qadınlar əvvəlki dövrlərlə müqayisədə daha çox təhsil almağa və karyera qurmağa çalışırlar. Bu isə evlənmə yaşının yüksəlməsinə və uşaqların sayının azalmasına səbəb olur[2].

Müasir cəmiyyətdə ailə modeli əvvəlki dövrlərlə müqayisədə dəyişmişdir. İnsanlar şəxsi inkişaf, karyera və maddi rifahı daha çox ön plana çəkirlər. Bundan əlavə, gənclər arasında ailə qurmağa münasibətin dəyişməsi də doğum göstəricilərinə təsir edir.

Səhiyyə xidmətlərinin inkişafı ana və uşaq sağlamlığının qorunmasında mühüm rol oynayır. Azərbaycanda son illərdə səhiyyə sahəsində aparılan islahatlar nəticəsində ana və uşaq ölümü azalmışdır. Bu da demografik vəziyyətə müsbət təsir göstərən amillərdən biridir.

Doğum əmsalının azalması gələcəkdə bir sıra sosial və iqtisadi problemlərə səbəb ola bilər. Əhalinin yaşlanması əmək qabiliyyətli insanların sayının azalmasına gətirib çıxarır. Bu isə ölkənin iqtisadi inkişafına mənfi təsir göstərə bilər. Gənc əhalinin azalması gələcəkdə əmək bazarında işçi qüvvəsinin çatış-

mazlığına səbəb ola bilər.

Bundan başqa, yaşlı insanların sayının artması sosial təminat sisteminə əlavə yük yaradır. Pensiya və sosial yardım xərclərinin artması dövlət büdcəsinə təsir edir. Buna görə də dövlət doğum göstəricilərinin sabit saxlanılması üçün müxtəlif sosial proqramlar həyata keçirməlidir.

Azərbaycanda əhalinin doğum əmsalı son illərdə müəyyən qədər azalma meyli göstərsə də, ölkədə demoqrafik vəziyyət ümumilikdə sabit hesab olunur. Doğum göstəricilərinə iqtisadi vəziyyət, təhsil səviyyəsi, şəhərləşmə və sosial dəyişikliklər ciddi təsir edir. Əhalinin sayının və yaş strukturunun balanslı şəklində qorunması ölkənin gələcək inkişafı üçün mühüm əhəmiyyət daşıyır[3].

Doğum əmsalının artırılması üçün gənc ailələrə dövlət dəstəyinin gücləndirilməsi, məşğulluğun artırılması, sosial rifahın yaxşılaşdırılması və ailə institutunun qorunması vacibdir. Bu tədbirlər gələcəkdə Azərbaycanın demoqrafik inkişafına müsbət təsir göstərə bilər.

#### **Ədəbiyyat**

1. Həsənov A. Demoqrafiya və əhali coğrafiyası. Bakı: "Təhsil" nəşriyyatı, 2020.
2. Məmmədov R. Azərbaycan əhalisinin sosial-demoqrafik inkişafı. Bakı, 2019.
3. Azərbaycan Respublikası Əmək və Əhalinin Sosial Müdafiəsi Nazirliyi. Əhali və sosial inkişaf üzrə hesabat. Bakı, 2023.

### **MİLLİ İQTİSADI TƏHLÜKƏSİZLİK: RƏQƏMSAL MÜHİTDƏ QIYMƏTLƏNDİRMƏ VƏ İDARƏETMƏ**

**Abbasova Şərqiyyə Abbas qızı, Şahmarova Nəzrin Cəsarət qızı**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*Sh.abbas@mail.ru, nezrinsss@outlook.com*

**Xülasə:** *Məqalədə rəqəmsallaşma şəraitində milli iqtisadi təhlükəsizliyin təmin olunması mexanizmləri və bu sahədə mövcud olan risklərin qiymətləndirilməsi metodologiyası tədqiq edilir. Müasir dövrdə iqtisadi sistemlərin kiber-dayanıqlılığının ölçülməsi üçün riyazi modellərin tətbiqi və strateji idarəetmə qərarlarının qəbulu məsələlərinə baxılır.*

**Açar sözlər:** *rəqəmsal iqtisadiyyat, milli təhlükəsizlik, risk, qiymətləndirilməsi, strateji idarəetmə.*

Müasir dövrdə qloballaşma proseslərinin intensivləşməsi və rəqəmsal texnologiyaların sürətli inkişafı iqtisadi sistemlərin strukturunda fundamental dəyişikliklərə səbəb olmuşdur. İnformasiya-kommunikasiya texnologiyalarının geniş tətbiqi nəticəsində iqtisadi fəaliyyətin təşkili yeni formalar almış, rəqəm-



sal iqtisadiyyat daha çox əhəmiyyət kəsb etməyə başlamışdır [1]. Bu şəraitdə milli iqtisadi təhlükəsizlik anlayışı da genişlənərək yalnız klassik iqtisadi göstəricilərlə deyil, həm də rəqəmsal mühitdən qaynaqlanan risk faktorları ilə müəyyən olunur [2].

Milli iqtisadi təhlükəsizlik ölkə iqtisadiyyatının daxili və xarici təsirlərə qarşı dayanıqlılığını, resurslardan səmərəli istifadəni və davamlı inkişafın təmin edilməsini əhatə edən kompleks sistem kimi çıxış edir. Rəqəmsal transformasiya bu anlayışın tərkibinə informasiya təhlükəsizliyi, kibermühafizə və rəqəmsal infrastrukturun qorunması kimi yeni komponentlər əlavə etmişdir [3]. Eyni zamanda iqtisadi proseslərin böyük hissəsinin rəqəmsal mühitə keçməsi məlumat axınlarını artırmış və iqtisadi sistemlərin texnologiyadan asılılığını gücləndirmişdir.

Rəqəmsal mühitdə iqtisadi təhlükəsizliyin kəmiyyət və keyfiyyət göstəriciləri ilə qiymətləndirilməsi idarəetmə qərarlarının optimallaşdırılması üçün zəruridir. İqtisadi sistemin rəqəmsal risk səviyyəsini ( $R$ ) riyazi olaraq aşağıdakı ehtimal modeli ilə ifadə etmək olar:

$$R = \sum_{i=1}^n P_i \times L_i$$

Burada  $P_i$  – hər hansı kiber-təhdidin reallaşma ehtimalı,  $L_i$  – həmin təhdid nəticəsində yaranan maliyyə-iqtisadi itkilərin həcmidir. Bu yanaşma, məhdud resursların ən kritik sahələrin mühafizəsinə yönəldilməsinə imkan verir [3]. Bununla yanaşı, iqtisadi sistemin ümumi dayanıqlılıq potensialını  $E_{si}$  müəyyən etmək üçün aşağıdakı asılılıqdan istifadə olunması təklif edilir:

$$E_{si} = \frac{A \times D}{R + 1}$$

Burada  $A$  rəqəmsal infrastrukturun əlçatanlıq dərəcəsini,  $D$  isə verilənlərin mühafizə indeksini təmsil edir. İndeksin yüksək qiyməti ölkənin rəqəmsal iqtisadi mühitinin kənar şoklara qarşı daha dözümlü olduğunu göstərir [4].

Nəticə etibarilə, kibertəhdidlər, məlumatların sızması və informasiya sistemlərinin dayanıqlılığının pozulması kimi risklər iqtisadi təhlükəsizliyə birbaşa təsir göstərən əsas amillərə çevrilmişdir. Bu səbəbdən rəqəmsal mühitdə iqtisadi təhlükəsizliyin qiymətləndirilməsi çoxölçülü yanaşma tələb edir. Bu qiymətləndirmədə informasiya sistemlərinin etibarlılığı, kibertəhlükəsizlik səviyyəsi, rəqəmsal infrastrukturun inkişaf göstəriciləri və insan resurslarının rəqəmsal bacarıqları mühüm indikatorlar kimi qəbul edilir [2].

Rəqəmsal mühitdə iqtisadi təhlükəsizliyin təmin olunması üçün səmərəli idarəetmə mexanizmlərinin formalaşdırılması vacibdir. Bu çərçivədə dövlət sə-

viyyəsində normativ-hüquqi bazanın təkmilləşdirilməsi, kibertəhlükəsizlik strategiyalarının hazırlanması və rəqəmsal infrastrukturun inkişaf etdirilməsi əsas istiqamətlərdəndir. Xüsusilə, süni intellekt və böyük verilənlər (Big Data) texnologiyalarının iqtisadi monitoring proseslərinə integrasiyası risklərin vaxtında müəyyən edilməsinə şərait yaradır [4].

Ümumilikdə, rəqəmsal mühitdə milli iqtisadi təhlükəsizlik müasir iqtisadi sistemlərin dayanıqlığını müəyyən edən əsas faktor kimi çıxış edir. Rəqəmsallaşma həm yeni imkanlar yaradır, həm də yeni risklərin meydana çıxmasına səbəb olur və bu səbəbdən onların idarə olunması kompleks və sistemli yanaşma tələb edir. Müasir texnologiyaların tətbiqi və strateji idarəetmə mexanizmlərinin inkişaf etdirilməsi bu sahədə effektiv nəticələrin əldə olunmasında həlledici rol oynayır.

### **Ədəbiyyat**

1. Bogomolov V.A. və b. Ekonomicheskaya bezopasnost': ucheb. posobiye dlya studentov vuzov, obuchayushchikhsya po spetsial'nostyam ekonomiki i upravleniya. 2-ye izd., Moskva: YUNITI-DANA, 2012. 295 s.
2. Krivorotov V.V., Kalina A.V. Ekonomicheskaya bezopasnost' gosudarstva i regionov: ucheb. posobiye. Yekaterinburg: UGTU-UI, 2010. 365 s.
3. ISO/IEC 27005:2018. Information technology — Security techniques — Information security risk management. Geneva: International Organization for Standardization, 2018.
4. NIST. Guide for Conducting Risk Assessments (SP 800-30). Gaithersburg: National Institute of Standards and Technology, 2012.

## **SİMİN RƏQS TƏNLİYİ ÜÇÜN GECİKƏN ARQUMENTLİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ**

**Abdurahmanova Tünzalə Natiq qızı**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*abtunzale94@gmail.com*

**Xülasə:** *Təqdim olunan işdə gecikən arqumentli hiperbolik tipli optimal idarəetmə prosesi araşdırılmışdır. İdarəetmə prosesi simin rəqs tənliyi ilə təsvir olunmuş və idarəedici təsirin gecikmə ilə sistemə təsiri nəzərə alınmışdır. Proses üçün başlanğıc və sərhəd şərtləri verilmiş, idarəedici funksiyanın tarixçəsinin daxil edilməsinin zəruriliyi göstərilmişdir. Optimal idarəetmə məsələsinin məqsədi sistemin son vəziyyətini əvvəlcədən verilmiş arzuolunan vəziyyətə maksimal yaxınlaşdırmaqdan ibarət olmuşdur. Bu məqsədlə xüsusi keyfiyyət funksionalı qurulmuş və onun minimumlaşdırılması məsələsi qoyulmuşdur. Opti-*

mal idarəedicinin tapılması üçün variasiya üsulu, qoşma məsələ və maksimum prinsipindən istifadə edilmişdir. İşdə hiperbolik tipli gecikən arqumentli sistemlər üçün optimalıq şərtləri əldə edilmiş və maksimum prinsipinə əsaslanan zəruri şərtlər verilmişdir.

**Açar sözlər:** Hiperbolik tənliklər, Gecikən arqument, Simin rəqs tənliyi, Optimal idarəetmə, Maksimum prinsip, Qoşma məsələ, Sərhəd məsələsi, İdarəedici funksiya.

Təqdim olunan işdə  $Q = (0, l) \times (0, T)$  silindrik oblastdır. Burada  $l > 0$  fəzanın uzunluğu,  $T > 0$  isə baxılan son zaman anıdır.  $\tau > 0$  sabiti idarəedici təsirin gecikmə müddətini göstərsin. Gecikən arqumentli hiperbolik idarəetmə prosesi aşağıdakı tənliklə təsvir olunsun [1,2]:

$$u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) + v(x, t - \tau), (x, t) \in Q \quad (1)$$

burada,  $u = u(x, t)$  sistemin vəziyyət funksiyası,  $v = v(x, t)$  isə idarəedici funksiyadır. Bu tip paylanmış parametrlı sistemlər üçün optimal idarəetmə məsələləri [1,4]-də geniş tədqiq olunmuşdur.  $a > 0$  sabiti dalğanın yayılma sürətini xarakterizə edir. Tənlikdəki  $v(x, t - \tau)$  həddi onu göstərir ki,  $t$  zaman anında sistemə təsir edən idarə faktiki olaraq  $t - \tau$  anında formalaşmış idarəedici signaldır [2,5]. Deməli, sistemin dinamikası əvvəlki zaman anlarında verilmiş idarənin təsiri altında inkişaf edir.

Bu proses üçün başlanğıc şərtlər aşağıdakı kimi verilir:

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), u_t(x, 0) = \varphi_1(x), 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

burada,  $\varphi_0(x)$  başlanğıc yerdəyişməni,  $\varphi_1(x)$  isə başlanğıc sürəti təsvir edən verilmiş funksiyalardır.

Sərhəd şərtləri isə, məsələn, simin hər iki ucunun bərkidilmiş olması halında

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, 0 \leq t \leq T \quad (3)$$

şəklində qəbul edilə bilər [3].

Gecikmənin mövcudluğu məsələnin qoyuluşunda əlavə başlanğıc məlumatın verilməsini zəruri edir. Həqiqətən, (1) tənliyində  $t < \tau$  olduqda  $v(x, t - \tau)$  ifadəsi mənalı olsun deyə idarəedici funksiyanın mənfə və ya sıfıra qədərki zaman intervalında da təyin olunması tələb olunur. Buna görə idarənin "tarixi" funksiyası ayrıca verilir:

$$v(x, t) = \chi(x, t), (x, t) \in (0, l) \times [-\tau, 0] \quad (4)$$

Burada,  $\chi(x, t)$  verilmiş tarix funksiyası olub, idarəedici təsirin sistemə başlanğıc anda qədər necə tətbiq olunduğunu göstərir. Başqa sözlə, sistemin sonrakı hərəkəti təkcə  $t \in [0, T]$  aralığında seçilən idarədən deyil, həm də  $[-\tau, 0]$  intervalında məlum olan əvvəlki idarə tarixçəsindən asılıdır. Məhz bu xüsusiyyət gecikən arqumentli sistemləri klassik idarəetmə modellərindən fərqləndirir.

Beləliklə, hiperbolik proses üçün gecikən arqumentli sərhəd məsələsi (1)–(4) münasibətləri ilə müəyyən olunur. İndi optimal idarəetmə məsələsinin

məqsədini formalaşdıraraq. Tutaq ki, son zaman anında sistemin vəziyyətini əvvəlcədən verilmiş arzuolunan vəziyyətə mümkün qədər yaxınlaşdırmaq tələb olunur. Bu məqsədlə aşağıdakı keyfiyyət funksionalı daxil edilir [1,4]:

$$J(v) = \int_0^l [(u(x, T; v) - y_0(x))^2 + (u_t(x, T; v) - y_1(x))^2] dx. \quad (5)$$

Burada,  $y_0(x)$  və  $y_1(x)$  son anda sistem üçün arzu olunan vəziyyət və sürət funksiyalarıdır.  $u(x, T; v)$  və  $u_t(x, T; v)$  isə seçilmiş  $v$  idarəsinə uyğun olaraq (1)–(4) məsələsinin həllinin son andakı qiymətləridir. Deməli, funksionalın fiziki mənası bundan ibarətdir ki, o, sistemin son vəziyyətinin istənilən vəziyyətdən nə dərəcədə uzaq olduğunu ölçür.  $J(v)$ -nin minimuma endirilməsi sistemin son anda verilmiş hədəfə maksimal yaxınlaşdırılması deməkdir.

### Ədəbiyyat

1. Лионс Ж. Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями в частных производных. Нью-Йорк: Springer-Verlag, 1971, 420 с.
2. Хейл Дж. К. Теория функционально-дифференциальных уравнений. Нью-Йорк: Springer-Verlag, 1977, 365 с.
3. Эванс Л. К. Уравнения в частных производных. Провиденс: American Mathematical Society, 2010, 749 с.
4. Трёлтцш Ф. Оптимальное управление уравнениями в частных производных: теория, методы и приложения. Провиденс: American Mathematical Society, 2010, 417 с.
5. Колмановский В., Мышкис А. Прикладная теория функционально-дифференциальных уравнений. Дордрехт: Kluwer Academic Publishers, 1992, 516 с.

## KANONİK HİPERBOLİK İNTEQRO-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏ TƏSVİR OLUNAN BİR OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ÜÇÜN ZƏRURİ VƏ KAFİ ŞƏRT

**Abidli Əsəd Ramiz oğlu**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

abidlhasad22@gmail.com

**Xülasə:** İşdə kanonik hiperbolik tip inteqro-diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunan, paylanmış parametrlə idarə funksiyaları vasitəsilə idarə olunan bir optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün zəruri və kafi olan şərt isbat olunur ([1, 3]).

**Açar sözlər:** klassik hiperbolik tip inteqro-diferensial tənlik, mümkün idarə, zəruri şərt, Pontryagin maksimum prinsipi, optimal idarə, kafi şərt.

Fərz edək ki, idarə olunan proses verilmiş  $D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1] = T \times X$  düzbucaqlısında

$$z_t(t, x) = A_1(t, x)z(t, x) + B_1(t, x)y(t, x) \int_{t_0}^{t_1} C_1(\tau, x)z(\tau, x)d\tau + f(t, x, u(t, x)), \quad (1)$$

$$y_x(t, x) = A_2(t, x)z(t, x) + B_2(t, x)y(t, x) \int_{x_0}^{x_1} C_2(t, s)y(t, s)ds + g(t, x, u(t, x)), \quad (2)$$

tənliklər sistemi və

$$z(t_0, x) = a(x), x \in X, \quad (3)$$

$$y(t, x_0) = b(t), t \in T, \quad (4)$$

sərhəd şərtləri ilə təyin olunur. Burada,  $z(t, x)$  və  $y(t, x)$  vəziyyəti xarakterizə edən uyğun olaraq  $n$  və  $m$  ölçülü vektorlar olub  $z_t$  və  $y_x$  xüsusi törəmələri ilə birlikdə kəsilməzdirlər.

$A_1(t, x)$  ( $n \times n$ ),  $A_2(t, x)$  ( $m \times n$ ),  $B_1(t, x)$  ( $n \times m$ ),  $B_2(t, x)$  ( $m \times m$ ),  $C_1(\tau, x)$  ( $1 \times n$ ),  $C_2(t, s)$  ( $1 \times m$ ) ölçülü matris funksiyalardır. İdarə funksiyasından asılı olan  $f(t, x, u(t, x))$  və  $g(t, x, u(t, x))$  verilmiş, kəsilməz olan  $n$  və  $m$  ölçülü vektor-funksiyalar həm də  $u$  -ya görə xüsusi törəmələrə malikdir. Yəni,  $f_u(t, x, u(t, x)) \in R^{n \times r}$  və  $g_u(t, x, u(t, x)) \in R^{m \times r}$ .

$a(x_0) = b(t_0)$  verilmiş sabit vektorlar,  $a(x)$ ,  $b(t)$  isə verilmiş, uyğun olaraq  $n$ -və  $m$  - ölçülü kəsilməz diferensiallanan vektor-funksiyalardır.

$u(t, x)$  mümkün idarə olub qiymətini boş olmayan məhdud və  $r$  -ölçülü  $U \subset R^r$  çoxluğundan alır.

$$u(t, x) \in U \subset R^r, (t, x) \in D \quad (5)$$

Ölçülən və məhdud olaraq (1)-(5) şərtini ödəyən  $u(t, x)$  -ə mümkün idarə deyəcəyik [2].

Qeyd edək ki, (1)-(4) məsələsinin mümkün idarələrə uyğun həlləri kəsilməz həllər başa düşülür.

Məqsəd idarə funksiyasının müəyyən boş olmayan və məhdud qiymətləri üçün (1)-(5) məsələsində sistemin həlləri üzərində məqsəd funksionalının minimumunun tapılmasından ibarətdir:

$$S(u) = \int_{x_0}^{x_1} C'z(t_1, x)dx + \int_{t_0}^{t_1} D'y(t, x_1)dt \rightarrow \min. \quad (6)$$

Burada  $z(t, x) \in R^n$ ,  $y(t, x) \in R^m$ ,  $C \in R^n$ ,  $D \in R^m$  şərtləri ödənilir.

Məqsədımız baxılan optimal idarəetmə məsələsində optimallıq üçün zəruri və kafi şərt tapmaqdır.

Fərz edək ki,  $u(t, x)$  və  $\bar{u}(t, x)$  iki mümkün idarə və onlara uyğun olaraq  $(z(t, x), y(t, x))$  və  $(\bar{z}(t, x), \bar{y}(t, x))$  vəziyyətləri mövcuddur.

Qoşma məsələnin həlli olan  $\psi(t, x)$  və  $\varphi(t, x)$  qoşma funksiyaları nəzərə alınaraq Hamilton-Pontryagin funksiyası aşağıdakı kimi təyin edilir [4-6]:

$$H(t, x, z, y, u, \psi, \varphi) = \psi'(t, x)[A_1(t, x)z +$$

$$+B_1(t, x)y \int_{t_0}^{t_1} C_1(\tau, x)z(\tau, x)d\tau + f(t, x, u) \Big] + \\ +\varphi'(t, x) \Big[ A_2(t, x)z+B_2(t, x)y \int_{x_0}^{x_1} C_2(t, s)y(t, s)ds + g(t, x, u) \Big].$$

Əgər qoşma funksiyalar  $\psi(t, x)$  və  $\varphi(t, x)$  aşağıdakı sistemi ödəyirsə [2, 3,6]:

$$-\psi_1(t, x) = A_1'(t, x)\psi(t, x) + A_2'(t, x)\varphi(t, x) + \\ +C_1'(t, x) \int_{x_0}^{x_1} y(\xi, x)B_1'(\xi, x)\psi(\xi, x)d\xi, \quad (t, x) \in D, \quad (7)$$

$$-\varphi_x(t, x) = B_1'(t, x)\psi(t, x) \int_{t_0}^{t_1} C_1'(\tau, x)z(\tau, x)d\tau + \\ + B_2'(t, x)\varphi(t, x) \int_{x_0}^{x_1} C_2(t, s)y(t, s)ds + \\ + \int_{x_0}^{x_1} C_2'(t, x)y(t, \xi)B_2'(t, \xi)\varphi(t, \xi)d\xi, \quad (t, x) \in D, \quad (8)$$

və sərhəd şərtləri

$$\psi(t_1, x) = -C, \quad x \in X, \quad (9)$$

$$\varphi(t, x_1) = -D, \quad t \in T \quad (10)$$

verilərsə funksionalın artım düsturu üçün

$$\Delta S = - \iint_D [\psi'(t, x)\Delta_u f(t, x) + \varphi'(t, x)\Delta_u g(t, x)]dt dx + R, \quad (11)$$

səkində alınır və burada  $R$  qalıq hədd olub

$$R = - \iint_D \psi'(t, x)R_1(t, x)dtdx - \iint_D \varphi'(t, x)R_2(t, x)dtdx. \quad (12)$$

kimi yazılır.

Artım üsulunun (bax məsələn [1, 2]) köməyi ilə minimumu axtarılan funksionalın artım düsturu aşağıdakı şəkildə yazılır

$$\Delta S = - \iint_D H_u(t, x, \dots)\Delta u(t, x)dtdx + o(\|\Delta u\|) \quad (13)$$

Aşağıdakı teorem isbat edilmişdir.

**Teorem. (Optimallıq üçün zəruri şərt).** Fərz edək ki,  $u^*(t, x) \in U$  optimal idarədir,  $(z^*(t, x), y^*(t, x))$  ona uyğun vəziyyətlər cütü və  $(\psi^*(t, x), \varphi^*(t, x))$  isə (7)-(10) qoşma məsələsinin həllidir. Həmçinin fərz edək ki,  $f$  və  $g$  funksiyaları mümkün idarəyə görə diferensillanandır. Onda ixtiyari  $v(\cdot, \cdot) \in U$  mümkün idarəsi üçün

$$\iint_D H_u(t, x, z^*, y^*, u^*, \psi^*, \varphi^*)(v(t, x) - u^*(t, x))dtdx \leq 0 \quad (14)$$

bərabərsizliyi ödəyir.

Əgər  $U \subset R^r$  açıq çoxluqdirsə, onda buradan

$$H_u(t, x, z^*, y^*, u^*, \psi^*, \varphi^*) = 0, \quad (15)$$

demək olar ki, bütün  $(t, x) \in D$  üçün stasionarlıq şərti alınır[4, 5].

**Teroem. (Optimallıq üçün kafi şərt).** Fərz edək ki,  $U \subset R^r$  qabarıq

çoxluq,  $u^*(t, x) \in U$  mümkün idarədir.  $u^*(t, x)$  mümkün idarəsinə uyğun vəziyyətlər cütü  $(z^*, y^*)$ , uyğun qoşma sistem  $(\psi^*, \varphi^*)$  üçün həll mövcuddur. Hamilton-Pontryagin funksiyası  $u$ -ya görə qabarıq olarsa, bütün  $(t, x) \in D$ -də  $u^*(t, x)$  mümkün idarəsinin optimallığı üçün

$$\langle H_u(t, x, z^*, y^*, u^*, \psi^*, \varphi^*), v - u^*(t, x) \rangle \leq 0, \quad \forall v \in U \quad (16)$$

nöqtəvi variasiya bərabərsizliyinin ödənməsi kafi şərtidir [5, 6].

### Ədəbiyyat

1. Р. Габасов, Ф.М. Кириллова. В.В.Альсевич и др. Методы оптимизации. Минск. Изд.-во, Четыре четверти.2011, 472 с.
2. К.Б. Мансимов, М.Дж. Марданов. Качественная теория оптимального управления сис темами Гурса – Дарбу. Баку: Изд-во ЭЛМ, 2010. 360 с.
3. М.М. Новоженков, В.И. Сумин, М.И Сумин. Методы оптимального управления системами математической физики.Горбкий Изд.-во ГГУ, 1986, 87 с.
4. Срочко В.А. Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах оптимального управления. Иркутск, изд.-во ИГУ, 1983, 160 с.
5. Liberzon D. Calculus of Variations and Optimal Control Theory: A Concise Introduction. Princeton; Oxford: Princeton University Press, 2011, 239 p.
6. Raymond J.-P. Optimal Control of Partial Differential Equations: Lecture notes. Toulouse, 2016, 122 p.

## XƏTTİ OLMAYAN OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ÜÇÜN ZƏRURİ ŞƏRTLƏR

**Abidli Əsəd Ramiz oğlu**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*abidlidasad22@gmail.com*

**Xülasə:** *İşdə qeyri-xətti integro-diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunan, paylanmış parametrlə idarə funksiyaları vasitəsilə idarə olunan bir optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Optimallıq üçün zəruri və kafi olan şərt isbat olunur ([3, 6]).*

**Açar sözlər:** *qeyri-xətti integro-diferensial tənlik, mümkün idarə, zəruri şərt, Pontryagin maksimum prinsipi, optimal idarə, kafi şərt, variasiyalı bərabərsizlik, qradient tipli optimallıq.*

Fərz edək ki, idarə olunan proses verilmiş  $D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1] = T \times X$  düzbucaqlısında

$$z_t(t, x) = f(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x)) + \int_{t_0}^{t_1} A(\tau, x) z(\tau, x) d\tau, (t, x) \in D, (1)$$

$$y_x(t, x) = g(t, x, z(t, x), y(t, x), u(t, x)) + \int_{x_0}^{x_1} B(t, s) y(t, s) ds, (t, x) \in D, (2)$$

qeyri – xətti integro-diferensial tənliklər sistemi [2, 3, 6] və

$$z(t_0, x) = a(x), \quad x \in X, \quad (3)$$

$$y(t_0, x) = b(t), \quad t \in T, \quad (4)$$

başlanğıc sərhəd şərtləri ilə təsvir olunur([2]).

İdarə funksiyası üçün

$$u(t, x) \in U \subset R^r, \quad (t, x) \in D \quad (5)$$

Bu məhdudiyyətlər çərçivəsində məqsəd funksionalının [1,3, 5]

$$S(u) = \int_{x_0}^{x_1} \phi_1(z(t_1, x))dx + \int_{t_0}^{t_1} \phi_2(y(t, x_1))dt \rightarrow \min \quad (6)$$

tapılmasına baxılır. Burada,  $z(t, x)$  və  $y(t, x)$  vəziyyəti xarakterizə edən uyğun olaraq  $n$  və  $m$  ölçülü vektorlar olub  $z_t$  və  $y_x$  xüsusi törəmələri ilə birlikdə kəsilməzdirlər.  $A(t, x), B(t, s), a(x), b(t), \phi_1, \phi_2$  funksiyaları kifayət qədər hamardır. İdarə funksiyasından asılı olan  $f(t, x, u(t, x))$  və  $g(t, x, u(t, x))$  verilmiş, kəsilməz olan  $n$  və  $m$  ölçülü vektor-funksiyalar həm də  $u$  –ya görə xüsusi törəmələrə malikdir.  $f_z, f_y, f_w, g_z, g_y, g_u$  xüsusi törəmələri mövcuddur və kəsilməzdir.

$u(t, x)$   $r$  –ölçülü idarə funksiyası qiymətlərini  $U \subset R^r$  açıq çoxluğundan alır.

$$u(t, x) \in U \subset R^r, (t, x) \in D \quad (7)$$

(1)-(5) şərtini ödəyən  $u(t, x)$  -ə mümkün idarə ([2, 5, 6]) deyəcəyik.

Qeyd edək ki, hər bir mümkün idarəyə (1)-(4) məsələsinin uyğun olan yeganə həlli var.

Hamilton-Pontryagin funksiyası [4, 5, 6]daxil edilir:

$$H(t, x, z, y, u, p, q) = pf(t, x, z, y, u) + qg(t, x, z, y, u). \quad (8)$$

Burada  $p = p(t, x)$  və  $q = q(t, x)$  qoşma funksiyalar olub qoşma sistemin [2,4, 6] həllidirlər.

$$p_t(t, x) = -H_z(t, x, z^*, y^*, u^*, p, q) - A(t, x) \int_{t_0}^{t_1} p(\tau, x) d\tau, \quad (9)$$

$$q_t(t, x) = -H_y(t, x, z^*, y^*, u^*, p, q) - B(t, x) \int_{x_0}^{x_1} q(\tau, s) ds, \quad (10)$$

sərhəd şərtləri [2,3, 6] ilə birlikdə

$$p(t_1, x) = -\phi_1^*(z^*(t_1, x)), \quad x \in X, \quad (11)$$

$$q(t, x_1) = -\phi_2^*(y^*(t, x_1)), \quad t \in T. \quad (12)$$

Onda məqsəd funksionalını artımı ([1, 4,5])

$$\Delta S(u^*; v) = \iint_D H_u(t, x, z^*(t, x), y^*(t, x), u^*(t, x), p(t, x), q(t, x))v(t, x) dt dx \quad (13)$$

şəklində ifadə olunur.

**Teorem.** Tutaq ki,  $u^*$  idarəsi və  $U \subset R^r$  açıq çoxluqdur. Onda, elə  $p(t, x)$  və  $q(t, x)$  qoşma funksiyaları mövcuddur ki,  $(z^*, y^*)$  vəziyyət funksiyaları (1)-(5) sistemini ödəyir,  $p$  və  $q$  funksiyaları (7)-(11) qoşma sisteminin həllidir.  $u^*$  idarəsinin (1)-(6) optimal idarəetmə məsələsində lokal optimal həll olması üçün istənilən  $(t, x) \in D$  üçün



$$H_u(t, x, z^*(t, x), y^*(t, x), u^*(t, x), p(t, x), q(t, x)) = 0. \quad (14)$$

düsturunun ödənməsi zəruri [2, 4-6] şərtidir. Başqa sözlə, istənilən  $(t, x) \in D$  üçün

$$p(t, x)f_u(t, x, z^*(t, x), y^*(t, x), u^*(t, x)) + \\ + q(t, x)g_u(t, x, z^*(t, x), y^*(t, x), u^*(t, x)) = 0. \quad (15)$$

**Qeyd 1.**  $U$  qapalı və qabarıq çoxluq olduqda, ixtiyari işarəli variasiyalar mümkün olmur, ona görə də optimallıq üçün zəruri şərt stasionar şəkildə deyil, variasiya bərabərsizliyi şəklində alınır [5, 6].

**Qeyd 2.** Qeyri-xətti optimal idarəetmə məsələsinə baxılır, idarə çoxluğu məhdud və qabarıq olduğu fərz edilir. Optimallıq üçün zəruri şərtin alınması məqsədilə kvazivariasia üsulu tətbiq olunur. Nəticədə nöqtəvi formada qradient tipli optimallıq şərtləri əldə olunmuşdur [4, 6].

### Ədəbiyyat

1. Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, В.В.Альсевич и др. Методы оптимизации. Минск. Изд.-во, Четыре четверти.2011, 472 с.
2. К.Б. Мансимов, М.Дж. Марданов. Качественная теория оптимального управления сис темами Гурса – Дарбу. Баку: Изд-во ЭЛМ, 2010. 360 с.
3. М.М. Новоженев, В.И. Сумин, М.И. Сумин. Методы оптимального управления системами математической физики. Горбкий Изд.-во ГГУ, 1986, 87 с.
4. Срочко В.А. Вариационный принцип максимума и методы линеаризации в задачах опимального управления. Иркутск, изд.-во ИГУ, 1983, 160 с.
5. Liberzon D. Calculus of Variations and Optimal Control Theory: A Concise Introduction. Princeton; Oxford: Princeton University Press, 2011, 239 p.
6. Raymond J.-P. Optimal Control of Partial Differential Equations: Lecture notes. Toulouse, 2016, 122 p.

## РƏQƏMSAL TRANSFORMASIYA ŞƏRAİTİNDƏ SÜNİ İNTELLEKTİN TƏHSİL VƏ CƏMIYYƏTƏ TƏSİRİNİN ELMİ TƏHLİLİ

**Ağayeva Firuzə Allahqulu qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

*f.aliyevainf@mail.ru*

**Xülasə:** Məqalədə rəqəmsal transformasiya dövründə süni intellekt texnologiyalarının təhsil və cəmiyyət üzərində yaratdığı təsirlər elmi baxımdan təhlil edilmişdir. Süni intellektin təhsil sistemində fərdiləşdirilmiş öyrənmə, avtomatlaşdırılmış qiymətləndirmə və məlumatların analizi kimi imkanları araşdırılmışdır [1]. Eyni zamanda, süni intellektin cəmiyyətin sosial, iqtisadi və mədəni inkişafına təsiri qiymətləndirilmişdir [4]. Məqalədə bu texnologiyaların tətbiqi zamanı yaranan etik problemlər, informasiya təhlükəsizliyi və

*rəqəmsal bərabərsizlik məsələlərinə də toxunulmuşdur [5;6]. Tədqiqat nəticəsində müəyyən edilmişdir ki, süni intellekt texnologiyalarının düzgün və məqsədyönlü tətbiqi təhsil keyfiyyətinin yüksəlməsinə və cəmiyyətin innovativ inkişafına mühüm töhfə verir.*

**Açar sözlər:** *Süni intellekt, rəqəmsal transformasiya, təhsil texnologiyaları, innovasiya, cəmiyyət, avtomatlaşdırma, rəqəmsal təhsil.*

Müasir dövrdə informasiya texnologiyalarının sürətli inkişafı cəmiyyətin bütün sahələrində mühüm dəyişikliklərə səbəb olmuşdur. Xüsusilə rəqəmsal transformasiya prosesi təhsil, iqtisadiyyat, səhiyyə və idarəetmə sistemlərinin yenidən formalaşmasına təsir göstərmişdir [4]. Bu prosesdə ən mühüm texnoloji yeniliklərdən biri süni intellekt texnologiyaları hesab olunur. Süni intellekt insan düşünmə mexanizmlərini təqlid edən və məlumatları analiz edərək qərar qəbul edə bilən proqram və sistemlərin məcmusudur [1].

Son illərdə süni intellektin tətbiq sahələri əhəmiyyətli dərəcədə genişlənməmişdir. Təhsil sahəsində bu texnologiyalar tələbələrin fərdi xüsusiyyətlərinə uyğun tədris metodlarının hazırlanmasına, öyrənmə prosesinin avtomatlaşdırılmasına və distant təhsilin inkişafına imkan yaratmışdır [5]. Məsələn, ağıllı tədris platformaları tələbələrin bilik səviyyəsini analiz edərək onlara uyğun tapşırıqlar təqdim edir. Bu isə təhsilin daha səmərəli və əlçatan olmasına şərait yaradır.

Cəmiyyət baxımından süni intellekt əmək bazarının dəyişməsi, yeni peşələrin yaranması və rəqəmsal iqtisadiyyatın inkişafı ilə müşayiət olunur [4]. Bir çox müəssisələr istehsal və xidmət sahələrində avtomatlaşdırılmış sistemlərdən istifadə etməyə başlamışdır. Bunun nəticəsində məhsuldarlıq artsa da, bəzi peşələrin sıradan çıxması və işsizlik riskinin yüksəlməsi kimi problemlər meydana çıxır.

Süni intellekt texnologiyalarının geniş tətbiqi etik və hüquqi məsələlərin aktuallaşmasına da səbəb olmuşdur. Şəxsi məlumatların qorunması, informasiya təhlükəsizliyi və qərarvermə prosesində şəffaflığın təmin olunması əsas problemlərdən biri hesab edilir [6]. Bundan əlavə, rəqəmsal texnologiyalara çıxış imkanlarının bərabər olmaması cəmiyyətdə rəqəmsal fərqliliyin yaranmasına gətirib çıxarır [5].

Bu məqalənin əsas məqsədi rəqəmsal transformasiya şəraitində süni intellektin təhsil və cəmiyyətə təsirini elmi baxımdan təhlil etmək, onun üstünlüklərini və yaratdığı problemləri araşdırmaqdan ibarətdir. Aparılmış tədqiqat göstərir ki, süni intellekt texnologiyaları rəqəmsal transformasiyanın əsas hərəkətverici qüvvələrindən biridir [1]. Bu texnologiyalar təhsil sistemində öyrənmə prosesinin fərdiləşdirilməsi, məlumatların sürətli analizi və tədris keyfiyyətinin yüksəldilməsi baxımından mühüm imkanlar yaradır [5]. Eyni za-

manda, süni intellekt cəmiyyətin sosial və iqtisadi inkişafına müsbət təsir göstərərək innovativ yanaşmaların formalaşmasına şərait yaradır [4].

Bununla yanaşı, süni intellektin tətbiqi müəyyən problemlərlə də müşayiət olunur. İnformasiya təhlükəsizliyi, etik normaların qorunması və rəqəmsal bərabərsizliyin aradan qaldırılması gələcəkdə həll olunmalı əsas məsələlərdəndir [6]. Bu səbəbdən süni intellekt texnologiyalarının tətbiqində hüquqi və etik mexanizmlərin formalaşdırılması mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

Nəticə etibarilə qeyd etmək olar ki, süni intellektin düzgün idarə olunması və səmərəli tətbiqi həm təhsil sisteminin inkişafına, həm də cəmiyyətin rəqəmsal gələcəyinin formalaşmasına mühüm töhfə verəcəkdir.

### **Ədəbiyyat**

1. Artificial Intelligence: A Modern Approach. Pearson Education, 2021.
2. Süni İntellekt Sistemləri. Bakı: Elm nəşriyyatı, 2020.
3. Siri, Siri in my Hand: Who's the Fairest in the Land?, Kaplan A., Haenlein M., 2019.
4. The Fourth Industrial Revolution. World Economic Forum, 2017.
5. UNESCO. *Artificial Intelligence and Education: Guidance for Policy-makers*. Paris, 2021.
6. Ethics of Artificial Intelligence and Robotics. Oxford University Press, 2020.

## **IoT VƏ BIG DATA EKOSİSTEMİNİN QARŞILIQLI ƏLAQƏSİ**

**Ağayeva Firuzə Allahqulu qızı**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*f.aliyevainf@mail.ru*

**Xülasə:** *Əşyaların İnterneti (IoT) və Big Data texnologiyaları müasir rəqəmsal transformasiyanın əsas istiqamətlərindən biri hesab olunur. IoT cihazları vasitəsilə yaranan böyük həcmli məlumatların emalı və analizi Big Data texnologiyalarının tətbiqini zəruri etmişdir. Məqalədə IoT və Big Data ekosisteminin qarşılıqlı əlaqəsi, onların müasir informasiya sistemlərində rolu və tətbiq imkanları araşdırılmışdır. Tədqiqat nəticəsində müəyyən edilmişdir ki, IoT sistemlərindən əldə edilən məlumatların Big Data platformaları vasitəsilə emalı ağıllı şəhər, səhiyyə, sənaye və nəqliyyat sistemlərinin inkişafında mühüm rol oynayır.*

**Açar sözlər:** *IoT, Big Data, sensor sistemlər, bulud texnologiyaları, ağıllı şəhər, verilənlərin analitikası.*

Müasir dövrdə internet texnologiyalarının inkişafı nəticəsində fiziki cihazların bir-biri ilə əlaqə yaratması mümkün olmuşdur. Əşyaların İnterneti adlanan bu texnologiya müxtəlif cihazların internet vasitəsilə məlumat mübadiləsi aparmasına imkan yaradır [1]. Sensorlar, ağıllı cihazlar və avtomatlaşdırılmış sistemlər vasitəsilə böyük həcmdə məlumat yaranır və həmin məlumatların

emalı Big Data texnologiyalarının tətbiqini tələb edir.

IoT texnologiyalarının əsas məqsədi cihazlar arasında avtomatik əlaqə yaratmaq və məlumatların real vaxt rejimində analizini təmin etməkdir. Bu texnologiyalar sənaye, səhiyyə, nəqliyyat və kənd təsərrüfatı kimi sahələrdə geniş istifadə olunur [2].

Big Data texnologiyaları isə IoT cihazlarından toplanan məlumatların saxlanılması və emalı üçün mühüm infrastruktur yaradır. Tədqiqatçılar qeyd edirlər ki, IoT və Big Data sistemlərinin integrasiyası rəqəmsal iqtisadiyyatın inkişafında əsas faktor hesab olunur [3].

IoT sistemləri milyonlarla sensor və cihaz vasitəsilə davamlı məlumat yaradır. Bu məlumatların ənənəvi üsullarla emalı mümkün olmadığından Big Data platformalarından istifadə edilir [4].

Hadoop və Apache Spark kimi sistemlər IoT məlumatlarının paralel emalına imkan yaradır. Sensorlardan daxil olan məlumatlar real vaxt rejimində analiz olunur və nəticələr əsasında avtomatik qərarlar qəbul edilir [5].

Bulud texnologiyaları da IoT və Big Data ekosistemində mühüm rol oynayır. Bulud platformaları məlumatların uzaq serverlərdə saxlanılmasını və istənilən vaxt əlçatan olmasını təmin edir [6].

Ağıllı şəhər sistemlərində IoT cihazları nəqliyyat axınının idarə olunması, enerji sərfiyyatının optimallaşdırılması və təhlükəsizlik sistemlərinin monitorinqi üçün istifadə edilir. Toplanan məlumatlar Big Data texnologiyaları vasitəsilə analiz olunaraq şəhər idarəetməsinin səmərəliliyini artırır [7].

Səhiyyə sektorunda ağıllı tibbi cihazlar xəstələrin sağlamlıq göstəricilərini real vaxt rejimində izləyir. Bu məlumatların təhlili nəticəsində xəstəliklərin erkən aşkarlanması mümkün olur [2].

Kənd təsərrüfatında IoT sensorları torpağın rütubətini, temperaturu və hava şəraitini analiz edir. Big Data analitikası isə məhsuldarlığın artırılması üçün optimal qərarların qəbuluna imkan yaradır [8].

Sənaye sahəsində ağıllı istehsal sistemləri avadanlıqların texniki vəziyyətini izləyərək mümkün nasazlıqları əvvəlcədən müəyyən edir. Bu isə istehsal xərclərinin azalmasına və məhsuldarlığın artmasına səbəb olur [3].

IoT sistemlərində çoxlu sayda cihazın internetə qoşulması kibertəhlükələrin artmasına səbəb olur. Məlumatların icazəsiz əldə olunması və sistemlərin kiberhücumlara məruz qalması ciddi təhlükəsizlik problemləri yaradır [9].

Bu problemlərin aradan qaldırılması üçün şifrələmə texnologiyaları, identifikasiya sistemləri və təhlükəsizlik protokollarından istifadə edilir. Eyni zamanda Big Data platformalarında məlumatların qorunması üçün ehtiyat nüsxələmə və təhlükəsizlik monitorinqi mühüm əhəmiyyət daşıyır [5].

IoT və Big Data texnologiyalarının integrasiyası müasir rəqəmsal transformasiyanın əsas istiqamətlərindən biridir. Bu texnologiyalar real vaxt rejimində böyük həcmli məlumatların emalını və idarə olunmasını təmin edir [1].

Məqalədə müəyyən edilmişdir ki, IoT və Big Data sistemlərinin birgə tətbiqi ağıllı şəhər, səhiyyə, sənaye və kənd təsərrüfatı sahələrində idarəetmə səmərəliliyini artırır. Bununla yanaşı, təhlükəsizlik və məxfilik problemləri bu sahədə əsas çağırışlardan biri olaraq qalır [9].

Gələcəkdə 5G şəbəkələri, süni intellekt və bulud texnologiyalarının inkişafı IoT və Big Data ekosisteminin imkanlarını daha da genişləndirəcəkdir.

### **Ədəbiyyat**

1. Gubbi, J., Buyya, R. "Internet of Things (IoT): A Vision, Architectural Elements and Future Directions". *Future Generation Computer Systems*, 2013.
2. Marz, N., Warren, J. *Big Data: Principles and Best Practices of Scalable Real-Time Data Systems*. Manning Publications, 2015.
3. Zikopoulos, P., Eaton, C. *Understanding Big Data*. McGraw-Hill, 2011.
4. White, T. *Hadoop: The Definitive Guide*. O'Reilly Media, 2015.
5. Han, J., Pei, J. *Data Mining: Concepts and Techniques*. Morgan Kaufmann, 2018.
6. Cisco. *IoT and Cloud Computing Technologies Report*. 2020.
7. Ələkbərov R.Q. *Müasir informasiya sistemləri və IoT texnologiyaları*. Bakı, 2019.
8. Məmmədova M.H. *Əşyaların interneti və rəqəmsal texnologiyalar*. Bakı, 2021.
9. Əliyev F.H. "Big Data və sensor sistemlərinin integrasiyası problemləri". *Informasiya Texnologiyaları Problemləri*, Bakı, 2020.

## **BİG DATA ANALİTİKASI VƏ SÜNİ İNTELLEKTİN İNTEQRASIYASI**

**Ağayeva Firuzə Allahqulu qızı, Kazımova İlahə Məmməddağı qızı**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*f.aliyevainf@mail.ru , kazımova.1973@mail.ru*

**Xülasə:** Müasir informasiya texnologiyalarının inkişafı böyük həcmli verilənlərin yaranmasına və onların daha səmərəli emal olunmasına olan ehtiyacı artırmışdır. Big Data analitikası və süni intellekt texnologiyalarının integrasiyası verilənlərin emalı prosesində yeni imkanlar yaratmışdır. Məqalədə Big Data və süni intellekt anlayışlarının qarşılıqlı əlaqəsi, tətbiq sahələri və müasir informasiya sistemlərinə təsiri elmi baxımdan təhlil edilmişdir. Eyni zamanda maşın öyrənməsi, dərin öyrənmə və analitik sistemlərin böyük verilənlərin emalındakı rolu araşdırılmışdır. Tədqiqat nəticəsində müəyyən edilmişdir ki, Big Data və süni intellekt texnologiyalarının integrasiyası qərar qəbul etmə prosesinin sürətlənməsinə, proqnozlaşdırma imkanlarının genişlənməsinə və idarəetmə səmərəliliyinin artmasına mühüm təsir göstərir.

**Açar sözlər:** *Big Data, süni intellekt, maşın öyrənməsi, verilənlərin analitikası, dərin öyrənmə, informasiya sistemləri.*

Rəqəmsal texnologiyaların sürətli inkişafı nəticəsində dünyada yaranan məlumatların həcmi əhəmiyyətli dərəcədə artmışdır. Sosial şəbəkələr, elektron xidmətlər, sensor sistemlər və mobil tətbiqlər vasitəsilə formalaşan böyük həcmli verilənlər ənənəvi emal üsullarının imkanlarını məhdudlaşdırmışdır. Bu səbəbdən Big Data texnologiyaları və süni intellekt sistemləri müasir informasiya cəmiyyətinin əsas tədqiqat istiqamətlərindən birinə çevrilmişdir [1].

Big Data böyük həcmli, sürətli və müxtəlif formalı məlumatların saxlanması və emalını təmin edən texnologiyalar toplusudur. Süni intellekt isə kompüter sistemlərinin insan təfəkkürünə bənzər qərarvermə və öyrənmə imkanlarını formalaşdıran texnologiyadır [2]. Bu iki istiqamətin inteqrasiyası böyük verilənlərin daha dəqiq analiz olunmasına və strateji qərarların qəbuluna imkan yaradır.

Müasir dövrdə bank sektoru, səhiyyə, təhsil, sənaye və elektron ticarət sahələrində Big Data və süni intellekt texnologiyalarının tətbiqi geniş yayılmışdır. Bu texnologiyalar istifadəçi davranışlarının analizində, risklərin proqnozlaşdırılmasında və avtomatlaşdırılmış idarəetmə sistemlərinin qurulmasında mühüm rol oynayır [3].

Big Data analitikası böyük həcmdə verilənlərin toplanması, saxlanması və təhlil edilməsini təmin edir. Süni intellekt isə həmin məlumatlardan öyrənərək nəticə çıxarma və qərarvermə prosesini həyata keçirir. Bu baxımdan Big Data süni intellekt sistemləri üçün əsas məlumat mənbəyi hesab olunur [4].

Maşın öyrənməsi alqoritmləri böyük verilənlər üzərində təlim keçərək müəyyən qanuna- uyğunluqları aşkar edir. Məsələn, bank sektorunda istifadəçi əməliyyatları analiz edilərək maliyyə fırıldaqçılığı halları müəyyən edilir. Elektron ticarətdə isə istifadəçi davranışlarının təhlili nəticəsində fərdiləşdirilmiş məhsul təklifləri hazırlanır [5].

Dərin öyrənmə texnologiyaları böyük verilənlərin emalında daha mürəkkəb analiz imkanları yaradır. Neyron şəbəkələri milyonlarla məlumat nümunəsi əsasında təlim keçərək şəkil tanıma, nitqin emalı və tibbi diaqnostika kimi sahələrdə yüksək nəticələr əldə edir. Tədqiqatlar göstərir ki, süni intellekt sistemlərinin effektivliyi birbaşa istifadə olunan verilənlərin keyfiyyəti və həcmi ilə bağlıdır [2].

Səhiyyə sektorunda böyük verilənlər və süni intellekt texnologiyalarının tətbiqi xəstəliklərin erkən diaqnostikasına şərait yaradır. Elektron tibbi məlumatların təhlili nəticəsində xəstələrin vəziyyəti daha dəqiq qiymətləndirilir və fərdi müalicə üsulları hazırlanır [6].

Bank və maliyyə sektorunda bu texnologiyalar risk analizinin aparılması və kiberdələduzluq hallarının aşkarlanması üçün istifadə edilir. Süni intellekt əsaslı sistemlər milyonlarla əməliyyatı qısa müddətdə analiz edərək şübhəli fəaliyyətləri müəyyən edə bilir [1].

Təhsil sahəsində tələbə fəaliyyətlərinin təhlili vasitəsilə fərdiləşdirilmiş tədris metodları hazırlanır. Elektron təhsil platformaları tələbələrin zəif və güclü tərəflərini müəyyən etməyə imkan verir [7].

Sənaye sektorunda isə ağıllı istehsal sistemləri böyük verilənlərdən istifadə etməklə avadanlıqların texniki vəziyyətini əvvəlcədən proqnozlaşdırır. Bu isə istehsal prosesində yaranan riskləri minimuma endirir və məhsuldarlığı artırır [3].

Böyük verilənlərin emalı zamanı məlumat təhlükəsizliyi əsas problemlərdən biri hesab olunur. Şəxsi məlumatların toplanması və emalı məxfilik risklərini artırır. Bu səbəbdən məlumatların qorunması üçün şifrələmə və identifikasiya texnologiyalarından geniş istifadə olunur [8].

Süni intellekt sistemlərinin təhlükəsizliyi də mühüm əhəmiyyət daşıyır. Çünki yanlış və ya təhrif olunmuş məlumatlar sistemin səhv qərarlar verməsinə səbəb ola bilər. Bu baxımdan verilənlərin keyfiyyətinə nəzarət və kibertəhlükəsizlik tədbirlərinin gücləndirilməsi vacib hesab olunur [4].

Aparılmış təhlillər göstərir ki, Big Data analitikası və süni intellekt texnologiyalarının inteqrasiyası müasir informasiya sistemlərinin inkişafında mühüm rol oynayır. Bu texnologiyalar böyük həcmli məlumatların daha sürətli və dəqiq analiz edilməsinə imkan yaradır [1].

Məqalədə müəyyən edilmişdir ki, Big Data və süni intellektin birgə tətbiqi səhiyyə, maliyyə, təhsil və sənaye sahələrində idarəetmə səmərəliliyini artırır və strateji qərarların qəbulunu asanlaşdırır. Bununla yanaşı, məlumat təhlükəsizliyi və məxfilik problemləri gələcək inkişaf prosesində əsas çağırışlardan biri olaraq qalır [8].

Gələcəkdə süni intellekt texnologiyalarının daha da inkişaf etməsi Big Data sistemlərinin imkanlarını genişləndirəcək və ağıllı informasiya cəmiyyətinin formalaşmasına mühüm töhfə verəcəkdir.

#### **Ədəbiyyat**

1. Mayer-Schönberger, V., Cukier, K. *Big Data: A Revolution That Will Transform How We Live, Work, and Think*. London, 2013.
2. Russell, S., Norvig, P. *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. Pearson Education, 2021.
3. White, T. *Hadoop: The Definitive Guide*. O'Reilly Media, 2015.
4. Goodfellow, I., Bengio, Y., Courville, A. *Deep Learning*. MIT Press, 2016.
5. Han, J., Kamber, M. *Data Mining: Concepts and Techniques*. Morgan Kaufmann, 2018.

6. Ələkbərov R.Q. *Süni intellekt sistemləri və informasiya texnologiyaları*. Bakı, 2020.
7. Məmmədova M.H. *Verilənlərin analizi və intellektual sistemlər*. Bakı, 2021.
8. Əliyev F.H. "Big Data texnologiyalarının inkişaf perspektivləri". *İnformasiya Texnologiyaları Problemləri*, Bakı, 2022.

## MODELLƏŞDİRMƏNİN SİĞORTA VƏ MALİYYƏ MÜHİTİNDƏ BAŞ VERƏN BƏZİ EKSTREMAL HADİSƏLƏRƏ TƏTBİQİ

**Ağayeva Mirvari Həsənağa qızı, Ələkbərov Təgrül Arif oğlu**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

(SABAH qrupları)

agayevamirvari55@gmail.com, togrul.alakbarov.arif@bsu.edu.az

**Xülasə:** Sığorta və maliyyə sferasında baş verən dəyişkən proseslər ekstremal hadisələrin ehtimalının dəyərləndirilməsini və risklərin idarə edilməsini mühim məsələyə çevirmişdir. Ekstremal Dəyərlər Nəzəriyyəsinin (Extreme Value Theory-EVT) arxasında duran əsas idea bu ekstremal dəyərlərin paylanma təbiətini anlamaqdır. EVT adətən Riskə məruz dəyərin (Value-at-Risk (VaR)) və nadirən baş verən hadisələrin (məs: pandemiya) modelləşdirilməsi üçün istifadə olunur. Ekstremallıq normalıqdan uzaq (həddindən artıq sapmaya malik) olduğu kimi, burada paylanmalar həm də ağır quyruqlu davranışlı baş verə bilər. EVT bir çox tətbiqi elm sahələrində istifadə olunan, ekstremal ssenariləri (məs: valyuta böhranları, fond bazarlarındakı qarışıqlıqlar, kredit defoltları və s.) təsvir edən və statistik olaraq modellərin formalaşdırılma biləcəyi hər tərəfli nəzəriyyə bazasını təmin edən modelləşdirmədir. EVT modelinin fərqləndirici xüsusiyyəti prosesin qeyri-adi dərəcədə böyük və ya kiçik bir səviyyəsindəki stoxastik davranışın qiymətləndirilməsini təmin etməsindədir. Geniş mənada EVT nəticələrinin əldə edilməsi və risklərin proqnozlaşdırılması üçün 2 əsas parametrik modeli var: Blok Maksima modeli - Block Maxima Model (BMM) və Həddən artıq müşahidə - Peak Over Threshold (POT) modeli.

**Açar sözlər:** Ekstremal dəyərlər nəzəriyyəsi (EVT), Riskə məruz dəyər (VaR), Blok Maksima modeli (BMM), Həddən artıq müşahidə modeli (POT), Ümumiləşmiş Pareto paylanması (GPD), Gözlənilən itkisi (ES).

Tutaq ki,  $X=X(\omega)$  ədədi funksiyası (həqiqi qiymətlər alan) bizim təyin olunmuş təsadüfi kəmiyyətimiz olsun. Burada,  $X : \Omega \rightarrow R, \Omega = \{ \omega \}, X = X(\omega), F_X(x)=F(x)=P(\omega : X(\omega) \leq x), x \in R. D(F)=\{R\}, E(F)=[0,1].$

Yəni,  $0 \leq F_X(x) \leq 1. f(x)=F'(x). X$  təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası  $F_X(x)=F(x)=P(X \leq x).$

**Generalized Pareto Distribution (GPD):** Block Maxima Model (BMM) ekstremal dəyərə əsaslanır. Müəyyən zaman intervallarında baş verən maks.



(və ya min.) dəyərlər seriyasının asimptotik paylanması əsasında qurulur. Bu yanaşma zamanı formalaşan Ümumiləşmiş Ektremal dəyər paylanması (Generalized Extreme Value distribution-GEV) Gumbel, Frechet və Weibull paylanmalarının standart formasıdır [2].

**Tərif:** Ümumiləşmiş pareto paylanmasının sıxlıq funksiyası həcm (shape) parametri  $k \neq 0$ , ölçü (scale) parametri  $\sigma > 0$  və sərhəd (threshold) parametri  $\theta$  olarsa:  $p(x|k, \sigma, \theta) = \left(\frac{1}{\sigma}\right) \left(1 + k \frac{(x-\theta)}{\sigma}\right)^{-1-\frac{1}{k}}$ ,  $\theta < x$  üçün,  $k > 0$  olanda, və ya  $\theta < x < \theta - \frac{\sigma}{k}$  üçün  $k < 0$  olanda. Əgər  $k = 0$  olarsa, bu zaman sıxlıq funksiyası  $\theta < x$  üçün:

$$p(x|0, \sigma, \theta) = \left(\frac{1}{\sigma}\right) e^{-\frac{(x-\theta)}{\sigma}}.$$

Əgər  $k = 0$  və  $\theta = 0$  olarsa, bu zaman ümumiləşmiş pareto paylanması eksponensial paylanmaya və əgər  $k > 0$  və  $\lambda = \frac{\sigma}{k}$  olarsa, bu zaman ümumiləşmiş pareto paylanması pareto paylanmasına ekvivalent olur [ölçü (scale) parametri  $\lambda = \frac{\sigma}{k}$ , həcm (shape) parametri  $\alpha = \frac{1}{k}$ ] və  $(\alpha, \lambda)$  parametrlili Pareto paylanmasının (mütləq kəsilməz paylanma növü) sıxlıq və paylanma funksiyaları [3]:

$$\begin{aligned} p(x | \alpha, \lambda) &= \frac{\alpha}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{x}\right)^{\alpha+1}, \quad \alpha > 0, \quad 0 < \lambda < x. \\ F(x) &= \int_{-\infty}^x p(t) dt = \frac{\alpha}{\lambda} \int_{\lambda}^x \left(\frac{\lambda}{t}\right)^{\alpha+1} dt = \frac{\alpha}{\lambda} \int_{\lambda}^x \lambda^{\alpha+1} \left(\frac{1}{t}\right)^{\alpha+1} dt \\ &= \frac{\alpha}{\lambda} \cdot (\lambda^{\alpha+1}) \int_{\lambda}^x (t)^{-\alpha-1} dt = -\lambda^{\alpha} (x^{-\alpha} - \lambda^{-\alpha}) = 1 - \left(\frac{\lambda}{x}\right)^{\alpha}, \\ &\quad \alpha > 0, \quad 0 < \lambda < x. \end{aligned}$$

**Teorem:** Əsas paylanmaların böyük bir sinifi olan  $F$  üçün,  $F_u$  artıq paylanma funksiyası,  $u$  sərhədi üçün GPD ilə təxmini olaraq eyni təyin edilə bilər:  $F_u(y) \approx G_{\xi, \sigma}(y)$ ,  $u \rightarrow \infty$ .

**Tərif (Artıq paylanma):**  $F$  paylanma funksiyasına malik  $X$  təsadüfi kəmiyyətinin,  $u$  sərhədini aşan artıq paylanma funksiyası aşağıdakı kimi verilir:

$$\begin{aligned} F_u(y) &= P(X - u \leq y | X > u) = P(X \leq u + y | X > u) = \frac{P(u < X \leq u + y)}{P(X > u)} \\ &= \frac{P(u < X \leq u + y)}{1 - P(X \leq u)} = \frac{F(u + y) - F(u)}{1 - F(u)} = \frac{F(x) - F(u)}{1 - F(u)}, \end{aligned}$$

$0 < y < x_F - u$  üçün,  $x_F \leq \infty$  olduqda  $F$ -in sağ sərhədidir və  $y = x - u$ .

**Riskə məruz dəyər (VaR) və Gözlənilən itki (ES) [4]:** İqtisadi modelləşdirmədə ekstremal yanaşmalar həm də VaR və ES hesablanmasına tətbiq olunur. VaR müəyyən bir sərhəd səviyyəsində maksimal zərərin dəyərini müəy-

yənləşdirir, ES isə bu səviyyəni aşan ortalama zərəri hesablayır. Əgər  $F, x_F$  sağdan son sərhəd nöqtəli bir ekstremal paylanma olarsa, biz hesab edirik ki, müəyyən bir sərhəd nöqtəsi üçün  $F_u(x) = G_{\xi, \sigma}(x)$ .  $x \geq u$  üçün, quyruq ehtimalı:

$$\bar{F}(x) = \bar{F}(u) \left(1 + \xi \frac{x - u}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}.$$

Tərs əməliyyat isə bizə riskə məruz dəyəri (VaR) verir. Yəni,  $\alpha \geq F(u)$  üçün:

$$VaR_\alpha = q_\alpha(F) = u + \frac{\sigma}{\xi} \left( \left( \frac{1 - \alpha}{\bar{F}(u)} \right)^{-\xi} - 1 \right).$$

$\xi < 1$  üçün, ES:

$$ES_\alpha = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 q_x(F) dx = \frac{VaR_\alpha}{1 - \xi} + \frac{\sigma - \xi u}{1 - \xi}.$$

**Peaks Over Threshold (POT) dəyərləri [1]:** Maliyyə və ya sığorta bazarları hadisələrinin təsadüfi müşahidələrinin təhlili zaman təkcə maks. və ya min.larla deyil, həmçinin müəyyən bir sərhəddən yuxarı aşma davranışları ilə maraqlanırıq. POT: müəyyən həddi (threshold) aşan dəyərlərin paylanması təhlilidir. EVT göstərir ki, müəyyən hədd aşılmasının məhdudlaşdırıcı paylanması ümumiləşmiş pareto paylanmasıdır. Ümumi müşahidələrin sayı  $n$  və müəyyən  $u$  sərhədini aşan müşahidələrin sayını  $N_u$ , bu zaman quyruq ehtimalların

hesablanma formulası:  $\hat{F}(x) = 1 - \frac{N_u}{n} \left(1 + \frac{\hat{\xi}}{\hat{\sigma}}(x - u)\right)^{-\frac{1}{\hat{\xi}}}$ .

$p$  ehtimallı tərs əməliyyat isə bizə təxmin olunan VaR-ı verir:

$$\widehat{VaR}_p = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left( \left( \frac{n}{N_u} p \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right).$$

Bu zaman isə

$$ES: \widehat{ES}_p = \frac{\widehat{VaR}_p}{1 - \hat{\xi}} + \frac{\hat{\sigma} - \hat{\xi} u}{1 - \hat{\xi}}.$$

## Nəticə

Ekstremal modelləşdirmə müasir tətbiqi elmlərdə risklərin sistemli həlli, ehtimal paylanmalarının və sistemin qeyri-sabit vəziyyətlərində davranışını müəyyən etməyə yönəlmiş əsas metodoloji baza rolunu oynayır. Bu yanaşma iqtisadi qərarların daha elmi əsaslara söykənməsinə, proqnozlaşdırma dəqiqliyinin artırılmasına və resurs bölgüsünün optimal planlaşdırılmasına şərait yaradır.

## Ədəbiyyat

1. Abhay K. Singh, David E. Allen, Robert J. Powell. Value at Risk estimation using Extreme Value Theory, 2011, 8 s.

2. Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T. Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1997 (2023 yenidən nəşr), 515 s.
3. Rövşən Əliyev. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika (dərs vəsaiti). Bakı-BDU-2022, 516 s.
4. Thap, S., & Zhao, Y.Q. Estimating Value-at-Risk and Conditional tail Expectation for Extreme and Aggregate Risks. Arxiv preprint, 2021.

## **SİĞORTA RİSKLƏRİNİN QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİNDƏ EKSTREMAL MODELLƏRİN TƏTBİQİ**

**Ağayeva Mirvari Həsənağa qızı, Ələkbərov Toğrul Arif oğlu**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*agayevamirvari55@gmail.com , togrul.alakbarov.arif@bsu.edu.az*

**Xülasə:** *Müasir şəraitdə sığorta fəaliyyəti prosesi yalnız orta statistik göstəricilərlə (məs: orta zərər, dispersiya və variasiya əmsalı) məhdudlaşmır, çünki ekstremal hadisələr (Məs: təbii fəlakət, epidemiya və ya iri sənaye qəzaları) nadir, lakin çox yüksək zərər potensialına malik situasiyalar sığorta portfellərinin faktiki risk strukturunu köklü şəkildə dəyişir [1,2].*

**Açar sözlər:** *Extremal Value Theory (EVT); Generalized Extreme Value (GEV); Generalized Pareto Distribution (GPD); Value-at-Risk (VaR); Expected Shortfall (ES); Gumbel, Fréchet & Weibull distributions.*

Ənənəvi risk modelləri (normal paylanma, lognormal modellər və s.) çox vaxt paylanmanın "quyruq" hissəsində baş verən dəyişiklikləri nəzərə almır, lakin təcrübə göstərir ki, sığorta ödənişlərinin əhəmiyyətli hissəsi məhz bu ekstremal zonalarda formalaşır yəni, bir neçə fərdi zərər bütöv portfelin orta göstəricisini aşır və riskin ağır quyruqlu paylanma xüsusiyyətini aktualaşdırır [3,4]. Bu xüsusdan, sığorta sektorunda son onilliklərdə Extreme Value Theory (EVT) və onun tətbiqləri xüsusi əhəmiyyət qazanmış və bu teoriya əsasında formalaşan Generalized Extreme Value (GEV) və Generalized Pareto Distribution (GPD) modelləri, eləcə də Value-at-Risk (VaR) və Expected Shortfall (ES) yanaşmaları sığorta risklərinin "uc dəyərlər" üzrə daha real qiymətləndirilməsinə imkan verir [4]. 2010-cu ildən bəri, Azərbaycanda yerli sığorta şirkətləri və aktuari mütəxəssislər "GEV və GPD" modellərini tətbiq edərək, təbii fəlakətlər, avtomobil qəzaları və sənaye zərərlərinin VaR və ES göstəriciləri ilə qiymətləndirilməsinə başlamışlar [1,2]. Sığorta sektorunda ekstremal hadisələrin modelləşdiril-

məsi üçün ən çox istifadə olunan paylanmalar Gumbel (Tip 1), Fréchet (Tip 2) və Weibull (Tip 3) modelləridir. Bu üç paylanma birləşdirilərək Ümumi Ekstremal Dəyər (Generalized Extreme Value – GEV) modelinin əsasını təşkil edir. Hər üç modelin seçimi və tətbiqi hadisənin təbiətindən - yəni sığorta zərərinin paylanmasının quyruq davranışından asılıdır [1,3].

**GUMBEL PAYLANMASI** əsasən təbii və texnogen hadisələrin “orta səviyyəli” ekstremal dəyərlərinin qiymətləndirilməsində istifadə olunur.

Model  $F(x) = e^{-e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^1}}$  funksional formasına malikdir və burada  $\mu$  — paylanmanın mərkəzi parametri,  $\sigma > 0$  isə miqyas parametridir. Gumbel modeli o hallarda tətbiq olunur ki, hadisələrin ehtimal paylanması ekstremal, lakin sərhəd dəyərsiz davranış göstərir (yəni çox böyük və ya çox kiçik limit yoxdur) [3]. **Praktiki nümunə:** Azərbaycan sığorta bazarında daşqın və yanğın hadisələrinin zərər paylanmaları üzrə 2010–2020-ci illərin məlumatlarına əsasən, “PAŞA Sığorta” şirkətinin aktuari bölməsi Gumbel modelini tətbiq etmişdir. 1000 sığorta hadisəsi üzrə maks. zərər 120min AZN, orta zərər isə 32 min AZN təşkil etmişdir. Modelin nəticəsinə əsasən,  $Var(99\%) = 118400$  AZN,  $ES(99\%) = 126800$  AZN olmuşdur. Bu, o deməkdir ki, hər 100 hadisədən biri 120min AZN-dən artıq zərər potensialına malikdir [1]. Gumbel paylanması belə hallarda “orta risk – yüksək etibarlılıq” balansını təmin edir və sığorta portfellerinin optimallaşdırılmasında ilkin baza rolunu oynayır.

**FRÉCHET PAYLANMASI** “ağır quyruqlu” (heavy-tailed) paylanmadır və çox böyük zərərləri modelləşdirmək üçün istifadə edilir. Bu model xüsusilə katastrofik hadisələr, nadir sənaye qəzaları və təkrarlanma tezliyi aşağı olan, lakin təsir gücü böyük hadisələr üçün uyğundur [2]. Modelin paylanma funksiyası belədir:  $F(x) = e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-\xi}}$ ,  $x > \mu$ , burada  $\xi > 0$  quyruq qalınlığı parametridir. Əgər  $\xi$  yüksəkdirsə, deməli hadisənin ekstremal dəyər ehtimalı çox az olsa da, zərərin miqyası kəskin artır.

**Praktik nümunə:** COVID-19 pandemiyasında (İl 2020) həyat və sağlamlıq sığortası üzrə tələblərin 3,5 qat artması nəticəsində bir çox sığorta şirkətləri Fréchet modelini tətbiq etmişdir. “AzSığorta” şirkətinin analizinə əsasən, ödənişlərin Pareto tipli artımı müşahidə olunmuş, ən böyük 5% hadisə ümumi ödənişlərin 40%-ni təşkil etmişdir. Fréchet modelinin nəticələri göstərmişdir ki, 99.9% etimad səviyyəsində  $Var = 2.3$  milyon AZN,  $ES = 2.8$  milyon AZN olmuşdur. Bu, klassik Gumbel modelindən təxminən 22% daha yüksək risk göstəricisidir [2]. Beləliklə, Fréchet modeli yüksək miqyashlı, lakin az ehtimallı hadisələrin sığorta fonduna təsirini reallığa daha yaxın şəkildə qiymətləndirir.

**WEIBULL PAYLANMASI** “yüngül quyruqlu” (light-tailed) paylanmadır və

zərərin maksimum dəyərinin müəyyən fiziki və ya hüquqi limitlər daxilində olduğu hallarda tətbiq olunur. Modelin paylanma funksiyası:

$$F(x) = e^{-\left(\frac{\mu-x}{\sigma}\right)^\xi}, \quad x < \mu, \text{ burada } \xi < 0 \text{ olduqda paylanma sol quyruqlu olur.}$$

**Praktik nümunə:** "Avtomobil sığortası" & "Əmlak sığortası"nda ödəniş limitləri çox vaxt 50min–100min AZN aralığında məhdudlaşdırılır. Bu halda Weibull modeli ən uyğun ekstremal yanaşma hesab olunur [2]. Məsələn, "Atəşgah Sığorta" şirkətində 2022-ci ildə avtomobil sığortası üzrə ödəniş paylanması Weibull modelinə uyğun qiymətləndirilmişdir: Orta ödəniş = 4300 AZN, Mak. limit = 25000 AZN, 95% etimad səviyyəsində VaR = 21800 AZN, ES = 23400 AZN. Bu nəticələr göstərir ki, Weibull modeli daha çox məhdud ödəniş limitli risklərin (motor, tibbi və qısamüddətli həyat sığortası) təhlili üçün effektivdir.

Aparılan tədqiqat işi göstərir ki, bu yanaşmalar müasir sığorta elmi nəzəriyyəsi, ehtimal paylanmaları və aktuari riyaziyyatı praktikası arasında 3lü körpü rolunu oynayır və risk idarəetməsinin intellektual əsasını formalaşdırır.

### **Ədəbiyyat**

1. Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T. Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1997 (2023 yenidən nəşr), 515 s.
2. Embrechts, P., Klüppelberg, C., & Mikosch, T. Modern Extreme Value Theory at the Interface of Risk Management, Bayesian Networks and Heavy-Tailed Time Series. In: Mathematics Going Forward (Lecture Notes in Mathematics). Springer, 2022.
3. Rövsən Əliyev. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika (dərs vəsaiti). Bakı-BDU-2022, 516 s.
4. Rövsən Əliyev və Vəli Bayramov. Sığorta riski proseslərinin ehtimal xarakteristikaları, 2022.

## SİĞORTA ŞİRKƏTLƏRİNDƏ KAPİTAL ADEKVATLIĞI VƏ AKTİV-PASSİV İDARƏETMƏSİ: DİNAMİK MALİYYƏ ANALİZİ YANAŞMASI

**Ağayeva Mirvari Həsənağa qızı, Əsədova Səbinə Elmar qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

agayevamirvari55@gmail.com, ehmedlirena128@gmail.com

**Xülasə:** Bu məqalədə sığorta şirkətlərində kapital adekvatlığının qiymətləndirilməsi və aktiv-passiv idarəetməsi məsələləri dinamik maliyyə analizi çərçivəsində araşdırılır. Risklərin modelləşdirilməsi, kapitalın dəyişməsi və maliyyə sabitliyinə təsir edən amillər riyazi modellər vasitəsilə təhlil olunur. Məqalədə həmçinin Maple proqramı əsasında praktiki hesablanma nümunəsi təqdim olunur.

**Açar sözlər:** Dinamik maliyyə analizi, kapital adekvatlığı, aktiv-passiv idarəetməsi, sığorta riski, Monte-Karlo, Maple

Sığorta şirkətlərinin əsas məqsədi riskləri idarə edərək maliyyə sabitliyini qorumaqdır. Bu baxımdan əsas problem kapitalın kifayət qədər olub-olmamasının və aktivlərlə öhdəliklər arasında uyğunluğun təmin edilməsidir. Bu məqsədlə sığorta şirkətlərində kapital adekvatlığının qiymətləndirilməsi və aktiv-passiv idarəetməsi məsələləri dinamik maliyyə analizi çərçivəsində araşdırılır. Modelin əsas komponentlərindən biri sığorta hadisələrinin sayının müəyyən edilməsidir [1], [3]. Hadisələrin sayı çox vaxt Poisson paylanması ilə modelləşdirilir:  $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$

Burada  $\lambda$  hadisələrin orta intensivliyini göstərir.  $N(t)$  — müəyyən dövr üzrə sığorta hadisələrinin sayıdır. [4].

Zərərin ümumi məbləği aşağıdakı kimi hesablanır:

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

Sığorta şirkətinin gəliri aşağıdakı kimi müəyyən edilir:

$$\Pi(t) = P(t) - S(t) - E(t) + I(t)$$

Burada:

$P(t)$  — sığorta haqları;

$S(t)$  — ödənilmiş zərərlər;

$E(t)$  — əməliyyat xərcləri;

$I(t)$  — investisiya gəlirləri.

Şirkətin kapitalı isə aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$K(t) = A(t) - L(t)$$

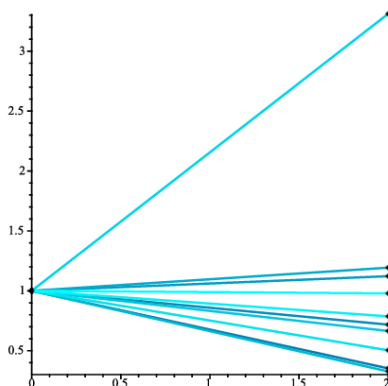
Aktivlərin dəyərinin modelləşdirilməsi üçün geometrik Brown hərəkətindən

istifadə olunur:

$$A(t) = A_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{\sigma^2}\right)t + \sigma W(t)}$$

Bu model investisiya portfelinin bazar risklərinə qarşı həssaslığını müəyyən etməyə imkan verir[2].

İşdə Maple proqramlaşdırma dilindən istifadə edilərək analiz aparılmışdır. Əvvəlcə sabit sürüşmə və dəyişkənliklə birözlü Brown hərəkəti halı nəzərdən keçirilmişdir. X funksiyaları üçün sürüşmə və diffuziya hesablanmışdır. Hazırlanmış Maple proqramı sığorta şirkətinin maliyyə axını simulyasiya etməklə, müəyyən zaman aralığında ehtiyat kapitalının tükənməsi ehtimalını müəyyən etməyə xidmət edir. Maple proqramlaşdırma dilində simulyasiyalar aparılmış və onlardan biri üçün aşağıdakı qrafik qurulmuşdur:



Aparılmış təhlil göstərir ki, kapital adekvatlığı və aktiv-passiv uyğunluğu sığorta şirkətlərinin maliyyə sabitliyinin əsas determinantlarıdır. Dinamik maliyyə analizi modeli bu göstəricilərin daha dəqiq qiymətləndirilməsinə və risklərin effektiv idarə olunmasına imkan verir.

### Ədəbiyyat

1. John C. Hull — *Risk Management and Financial Institutions*. Wiley, 2018.
2. Steven E. Shreve — *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer, 2004.
3. Alexander J. McNeil, Rüdiger Frey, Paul Embrechts — *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press, 2015.
4. International Association of Insurance Supervisors — *Insurance Core Principles*, 2019.

## SİĞORTA ŞİRKƏTLƏRİNDƏ DİNAMİK MALİYYƏ MODELİNİN TƏTBİQİ

**Ağayeva Mirvari Həsənağa qızı, Əsədova Səbinə Elmar qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

agayevamirvari55@gmail.com, ehmedlirena128@gmail.com

**Xülasə:** Bu məqalədə sığorta şirkətlərində dinamik maliyyə analizi modelinin tətbiqi çərçivəsində stress-test və ssenari analizləri araşdırılır. Müxtəlif iqtisadi şəraitlərdə kapitalın dəyişməsi modelləşdirilir və risklərin maliyyə sabitliyinə təsiri qiymətləndirilir. Praktiki hesablamalar Maple proqramında həyata keçirilmişdir.

**Açar sözlər:** Stress-test, ssenari analizi, maliyyə sabitliyi, risk modelləşdirilməsi, sığorta

Sığorta şirkətləri qeyri-müəyyən iqtisadi şəraitdə fəaliyyət göstərir. Bu səbəbdən əsas məsələ ekstremal hallarda şirkətin maliyyə dayanıqlığını qiymətləndirməkdir. Sığorta şirkətinin maliyyə vəziyyətinin modelləşdirilməsi üçün dinamik maliyyə analizi çərçivəsində əsas komponentlərdən biri olan stress-test və ssenari analizləri dinamik maliyyə analizi modelinin əsas tətbiq sahələrindən biridir[1],[3]. Bu üsullar sığorta şirkətinin ekstremal şəraitlərdə maliyyə dayanıqlığını qiymətləndirmək üçün istifadə olunur.

Stress-test zamanı aşağıdakı risk faktorları dəyişdirilə bilər:

- sığorta hadisələrinin sayının artması;
- zərərlərin orta məbləğinin yüksəlməsi;
- investisiya gəlirlərinin azalması;
- faiz dərəcələrinin dəyişməsi;
- valyuta məzənnələrinin dəyişməsi.

Stress-test nəticəsində şirkətin kapitalında baş verən dəyişikliklər qiymətləndirilir:

$$\Delta K = K_{stress} - K_{base}$$

Burada:

- $K_{stress}$  — stress ssenarisi üzrə kapital;
- $K_{base}$  — baza ssenarisi üzrə kapitaldır.

Ssenari analizi isə bir neçə risk faktorunun eyni vaxtda dəyişməsini nəzərdə tutur[2].

Risqlərin təhlili üçün Value at Risk və Tail Value at Risk göstəricilərindən istifadə olunur.

$$VaR_{\alpha} = \inf\{x: P(Loss > x) \leq 1 - \alpha\}$$

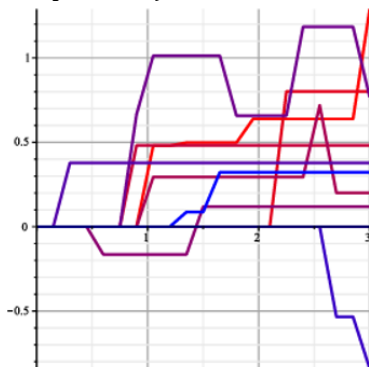
$$TVaR_{\alpha} = E(Loss | Loss > VaR_{\alpha})$$



Bu göstəricilər müəyyən etibarlılıq səviyyəsində maksimum mümkün zərərləri qiymətləndirməyə imkan verir[4].

Hazırlanmış Maple proqramı sığorta şirkətinin maliyyə axınını simulyasiya etməklə, müəyyən zaman aralığında ehtiyat kapitalının tükənməsi ehtimalını (iflas ehtimalı) müəyyən etməyə xidmət edir.

Maple proqramlaşdırma dilində simulyasiyalar aparılmış və onlardan biri üçün - aşağıdakı qrafik qurulmuşdur:



Stress-test və ssenari analizləri göstərir ki, ekstremal hallarda kapitalın əhəmiyyətli dərəcədə azalması mümkündür. Dinamik maliyyə analizi modeli bu riskləri əvvəlcədən müəyyən etməyə və uyğun idarəetmə qərarları qəbul etməyə imkan verir.

#### Ədəbiyyat

1. Paul Glasserman — *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, 2004.
2. John C. Hull — *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson, 2017.
3. Bank for International Settlements — *Stress Testing Principles*, 2018.
4. Philippe Jorion — *Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk*. McGraw-Hill, 2007.

### SIĞORTADA AZADOLMA MƏBLƏĞİNİN OPTİMAL SƏVİYYƏSİNİN MÜƏYYƏN EDİLMƏSİ

**Ağayeva Mirvari Həsənağa qızı, Həmzəyeva Könül Ədalət qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

*agayevamirvari55@gmail.com, konulhemzeyeva3@gmail.com.*

**Xülasə:** Bu tezisdə sığorta müqavilələrində azadolma məbləğinin optimal səviyyəsinin müəyyən edilməsi geniş şəkildə tədqiq olunur. Azadolma məbləği sığorta mexanizminin mühüm elementi olub, risklərin sığortaçı və sığortalı arasında bölüşdürülməsini tə-

min edir. Tədqiqatın əsas məqsədi sığorta ödənişlərinin dəyişkənliyini azaltmaq, eyni zamanda sığortalının üzərində qalan risk yükünü optimallaşdırmaqdır. Bu məqsədlə riyazi modelləşdirmə, ehtimal nəzəriyyəsi və statistik modelləşdirmə üsullarından istifadə olunmuşdur. Nəticələr göstərir ki, azadolma məbləğinin düzgün seçilməsi həm sığorta şirkətinin maliyyə dayanıqlığını artırır, həm də sığorta bazarında effektivliyi yüksəldir.

**Açar sözlər:** azadolma məbləği, risk yükü, maliyyə dayanıqlığı, faydalılıq

Başlanğıc kapitalı  $W$  və faydalılıq funksiyası  $u$  olan sığortalını nəzərdən keçirək. Bu funksiya üçün  $u' > 0$  və  $u'' < 0$  şərtləri ödənilir. Fərz edək ki, sığortalı  $X$  təsadüfi zərərinə məruz qalır. Burada  $X$  mənfi olmayan təsadüfi kəmiyyətdir və  $F(x)$  onun paylanma funksiyası,  $f(x)$  isə sıxlıq funksiyasıdır ([1],[2]). Sığorta müqaviləsi  $I(x)$ , istənilən  $x \geq 0$  üçün

$$0 \leq I(x) \leq x$$

standart məhdudiyyət şərtini ödəyir ([2],[4]).

Sığorta haqqı gözlənilən sığorta ödənişi məbləğinin  $h(EI)$  funksiyası kimi verilir. Burada  $h(x)$  funksiyası  $x$ -ə görə ciddi artan funksiya və  $h(0) = 0$  şərtini ödəyir ([2],[3]).

İndi isə sığorta haqqını sabit saxlayaq və aşağıdakı optimal sığorta məsələsini nəzərdən keçirək:

$$\max_I Eu(W - X + I - \pi) \text{ şərti ilə } EI = h^-(\pi)$$

([1],[4]).

$$0 \leq I \leq \min(K + \pi, X)$$

burada  $h^-(\cdot)$  funksiyası  $h(\cdot)$  funksiyasının tərs funksiyasıdır.  $h(\cdot)$  ciddi artan olduğu üçün onun tərs funksiyası  $h^-(\cdot)$  də mövcuddur və ciddi artandır.  $K$  və  $\pi$  müsbət olduğundan, eləcə də  $X$  mənfi olmayan təsadüfi dəyişən olduğu üçün (2) məhdudiyyəti həmişə ödənilir ([2]).

İşdə bir sığorta şirkəti üçün sığorta haqqı və sığorta ödənişində azadolma məbləğindən asılı olaraq taarif hesablanması məsələsinə baxılmışdır. Bağlanmış müqavilələrin statistikasından istifadə olunmuşdur. Təlimata əsasən xalis sığorta ( $N$ ) tarifinin düsturunda, yəni ([3],[4]):

$$N = \frac{M(S) + \sqrt{D(S)} * \Phi^{-1}(\gamma)}{n} * \frac{1}{S}$$

düsturunda istifadə olunan  $M(S)$  riyazi gözləməsinin və  $D(S)$  dispersiyasının hesablanması üçün statistikadan alınmış göstəricilərdən istifadə olunmuşdur ([2]):

**Azadolma məbləği olan hal:**

| <b>Tarif</b>                               |               |
|--------------------------------------------|---------------|
| <b>Orta sığorta məbləği</b>                | 27983.78      |
| <b>Orta sığorta ödənişi</b>                | 2126.81       |
| <b>Bir hadisənin baş vermə ehtimalı</b>    | 21.44%        |
| <b>Franşiza məbləği</b>                    | 100.00        |
| <b>Franşiza halında ödəniş ehtimalı</b>    | 21.32%        |
| <b>Orta zərər ağırlığı</b>                 | 2074.69       |
| <b>Dispersiya</b>                          | 12,303,349.99 |
| <b>Orta Kvadratik Meyl</b>                 | 3507.61       |
| <b>Variasiya</b>                           | 1.69          |
| <b>Ödənişin variasiyası</b>                | 0.062         |
| <b>Ümumi netto dərəcənin əsas hissəsi</b>  | 1.58%         |
| <b>Ümumi netto dərəcənin risk üstəliyi</b> | 0.29%         |
| <b>Yekun tariff</b>                        |               |
| <b>Ümumi netto dərəcə</b>                  | 1.87%         |
| <b>Ümumi brutto dərəcə</b>                 | 3.81%         |

**Azadolma məbləği 0 olan hal:**

| <b>Baza Tarif (franşiza məbləği 0)</b>     |               |
|--------------------------------------------|---------------|
| <b>Orta sığorta məbləği</b>                | 27983.78      |
| <b>Orta sığorta ödənişi</b>                | 2126.81       |
| <b>Bir hadisənin baş vermə ehtimalı</b>    | 21.44%        |
| <b>Orta zərər ağırlığı</b>                 | 2126.81       |
| <b>Dispersiya</b>                          | 12,663,361.21 |
| <b>Orta Kvadratik Meyl</b>                 | 3558.56       |
| <b>Variasiya</b>                           | 1.67          |
| <b>Ödənişin variasiyası</b>                | 0.0609717     |
| <b>Ümumi netto dərəcənin əsas hissəsi</b>  | 1.63%         |
| <b>Ümumi netto dərəcənin risk üstəliyi</b> | 0.30%         |
| <b>Yekun tariff</b>                        |               |
| <b>Ümumi netto dərəcə</b>                  | 1.93%         |
| <b>Ümumi brutto dərəcə</b>                 | 3.94%         |

Sığorta növü üzrə statistika mövcuddursa  $\gamma - n$ ın və  $\Phi^{-1}(\gamma) - n$ ın aşağıdakı qiymətlər cədvəlindən istifadə edilmişdir.

|                     |      |      |       |      |        |
|---------------------|------|------|-------|------|--------|
| $\gamma$            | 0,84 | 0,90 | 0,95  | 0,98 | 0,9986 |
| $\Phi^{-1}(\gamma)$ | 1,0  | 1,3  | 1,645 | 2,0  | 3.0    |

Bu model göstərir ki, azadolma məbləği artdıqca sığorta ödənişləri azalır, lakin risk sığortalının üzərinə keçir, kiçik d azadolma məbləği zamanı sığortaçı daha çox risk daşıyır, böyük d azadolma məbləği zamanı sığortalının yükü artır ([3],[4]).

Optimal azadolma məbləği model parametrlərindən asılı olaraq dəyişsə də, orta risk səviyyəsində balans yaradan nöqtədə yerləşir. Bu nəticə sığorta siyasətinin formalaşdırılmasında istifadə oluna bilər([1],[2]).

### **Ədəbiyyat**

1. H.D. Skipper, W.J. Kwon. Risk Management and Insurance: Perspectives in a Global Economy. Blackwell Publishing. Malden, MA, 2007, pp.320-350.
2. E.J. Vaughan. Fundamentals of Risk and Insurance. 11<sup>th</sup> ed., John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, USA, 2014, pp. 45-60.
3. J.D. Cummins. Securitization, Insurance and Reinsurance. Huebner International Series on Risk, Insurance and Economic Security (Vol.25). Springer Science & Business Media. New York, 2009, pp.468-475.
4. J.F. Outreville. Theory and Practice of Insurance. Springer. London, 1998.

## **RİSKLƏRİN OPTİMAL PAYLANMASI VƏ TƏKRAR SİĞORTA MODELİNİN QURULMASI**

**Ağayeva Mirvari Həsənağa qızı, Həmzəyeva Könül Ədalət qızı,  
Hacıyeva Ruhəngiz Oqtay qızı**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*agayevamirvari55@gmail.com, konulhemzeyeva3@gmail.com,*

*rhaciyeva74@gmail.com*

**Xülasə:** Bu tezisdə risklərin sığortaçı və təkrar sığortaçı arasında optimal paylanması geniş şəkildə araşdırılır. Təkrarsığorta sığorta şirkətlərinin böyük zərərlərdən qorunmasında əsas mexanizmdir. Tədqiqatın məqsədi risklərin elə bölüşdürülməsidir ki, sığorta şirkətinin risk yükü minimum olsun və maliyyə sabitliyi təmin edilsin. Bu məqsədlə kvota-pay modeli və dispersiya əsaslı optimallaşdırma yanaşması tətbiq edilmişdir.

**Açar sözlər:** Ümumi effektiv Puasson modeli, Furrye çevirməsi, yuvarlaqlaşdırma metodu

Müəyyən bir dövr ərzində sığortacı üçün ümumi zərəri ifadə edən mənfi olmayan təsadüfi dəyişəni  $X$  ilə işarə edək.  $F(x) = \Pr(X \leq x)$  onun paylanma funksiyası,  $EX = \mu$  onun riyazi gözləməsi və  $VarX = \sigma^2$  isə onun dispersiyasıdır ([1],[2]).

Təkrarsığorta müqaviləsinə əsasən, təkrarsığortacı zərərin bir hissəsini ödəyəcək,  $f(X), 0 \leq f(X) \leq X$ . Sığortacı isə qalan hissəni saxlayacaq, bu da  $I_f(X) = X - f(X)$  ilə göstərilir.  $P_R^f$  təkrarsığorta haqqı gözlənilən faydalılıq prinsipi ilə müəyyən edilir,  $P_R^f = (1 + \theta_R)Ef(X)$ . Burada  $\theta_R > 0$  təkrarsığortacının yüklənmə əmsalıdır. Sığortacının sığorta haqqı  $P_I^f = P_0 - P_R^f$ . Burada  $P_0$  sığorta müqavilələrində sığortacının sığorta haqqı kimi işarə olunur([3]).

Təkrarsığorta müqaviləsinin həm sığortacı, həm də təkrarsığortacı üçün faydalı olması üçün onların birgə yaşam ehtimalını maksimuma çatdırmaq lazımdır

$$\max \Pr\{I_f(X) \leq u_0^I + P_I^f, f(X) \leq u_0^R + P_R^f\}, \quad (1)$$

və ya ümumi dispersiyanı və risk ölçüsünü minimallaşdırmaq lazımdır([4]).

$$\text{Min}\{J(I_f(X) - P_I^f) + J(f(X) - P_R^f)\}, \quad (2)$$

Hər iki tərəfin fayda artımı şərti ilə

$$\mathbb{E}U_I(u_0^I + P_0 - X) \leq \mathbb{E}U_I(u_0^I + P_I^f - I_f(X)), \quad (3)$$

$$\mathbb{E}U_R(u_0^R) \leq \mathbb{E}U_R(u_0^R + P_R^f - f(X)), \quad (4)$$

Burada  $u_0^I > 0$  və  $u_0^R > 0$  müvafiq olaraq sığortacı və təkrarsığortacının başlanğıc kapitallarıdır.  $J$  dispersiyanı və ya risk ölçüsünü ifadə edir.  $U_I$  və  $U_R$  müvafiq olaraq sığortacı və təkrarsığortacının faydalılıq funksiyalarıdır. Bu məhdudiyyətlər təmin edir ki, təkrarsığorta müqaviləsindən sonra hər iki tərəfin gözlənilən faydası müqavilə olmadan olan səviyyədən az olmasın([1]).

Tutaq ki, ümumi zərər təsadüfi kəmiyyətdir:

$$X \sim F(x), \quad E(X) = \mu, \quad Var(X) = \sigma^2$$

Kvota-pay təkrar sığorta modelinə əsasən risk aşağıdakı kimi bölüşdürülür ([3]):

$$R_s = \alpha X$$

$$R_r = (1 - \alpha)X$$

Burada:

- $R_s$ - sığortacının daşdığı risk
- $R_r$ - təkrar sığortacıya ötürülən risk
- $\alpha \in [0,1]$ - saxlanılan risk payı

$$E(R_s) = \alpha \mu$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(R_s) &= \alpha^2 \sigma^2 \\ F(\alpha) &= E(R_s) + \beta \text{Var}(R_s) \\ F(\alpha) &= \alpha \mu + \beta \alpha^2 \sigma^2 \\ \frac{dF}{d\alpha} &= \mu + 2\beta \alpha \sigma^2 = 0 \\ a^* &= -\frac{\mu}{2\beta \sigma^2} \\ a^* &\in [0,1] \end{aligned}$$

| $\alpha$ | $E(R_s)$ | $\text{Var}(R_s)$     | $F(\alpha)$ |
|----------|----------|-----------------------|-------------|
| 0.2      | 100000   | $1.6 \times 10^{10}$  | 260000      |
| 0.4      | 200000   | $6.4 \times 10^{10}$  | 456000      |
| 0.6      | 300000   | $1.44 \times 10^{11}$ | 744000      |
| 0.8      | 400000   | $2.56 \times 10^{11}$ | 1120000     |

### Ədəbiyyat

1. G.E.Rejda. Principles of Risk Management and Insurance. Pearson Education, New York, ABŞ, 2020.
2. S.E. Harrington, G.R. Niehaus. Risk Management and Insurance. McGraw, New York, ABŞ, 2003.
3. S.A. Klugman. Loss Models: From Data to Decisions. John& Sons, Hoboken, ABŞ, 2019.
4. C.D. Daykin. Practical Risk Theory for Actuaries. Chapman&Hall, London, Böyük Britaniya, 1994.

## XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMA MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİNİN XASSƏLƏRİ

**Ağayeva Xədicə İlham qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

agayevaxedice2001@gmail.com

**Xülasə:** İşdə, xətti proqramlaşdırma məsələsinin həllinin əsas xassələri təhlil olunur. Burada mümkün həllər çoxluğunun xüsusiyyətləri, onun qabarıq çoxluq olması və optimal həllin bu tapə nöqtələrində əldə olunması kimi mühüm nəzəri məsələlər tədqiq olunur.

**Açar sözlər:** xətti proqramlaşdırma, optimal həll, məqsəd funksiyası.

Xətti proqramlaşdırma məsələsinin həllinin xassələrinin öyrənilməsi, məsələnin həllinin tapılmasına yönəlmiş həll üsullarının əsaslandırılmasına imkan verir [1,2]. Xətti proqramlaşdırma məsələsinin həllər çoxluğunun əsas xüsusiyyətlərinin tədqiqi həm nəzəri, həm də praktiki baxımdan mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

**Teorem 1.** Əgər məsələ xətti proqramlaşdırma məsələsidirsə, bu zaman məsələnin bütün mümkün həllər çoxluğu qabarıq çoxlüzdür.

**İsbatı:** Fərz edək ki,  $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$  və  $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})$  məsələnin iki mümkün həllidir. Bu halda  $Ax^{(1)} = B$  və  $Ax^{(2)} = B$ . Teoremi isbat etmək üçün göstərməliyik ki, mümkün həllər çoxluğuna daxil olan ixtiyari  $x^{(1)}$  və  $x^{(2)}$  nöqtələrinin qabarıq xətti kombinasiyası da mümkün həldir.

$$X = \alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)}, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \alpha_2 \geq 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1,$$

$$Ax = A(\alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(2)}) = \alpha_1 Ax^{(1)} + \alpha_2 Ax^{(2)} = \alpha_1 B + \alpha_2 B = \alpha_1 B + (1 - \alpha_1)B = \alpha_1 B + B - \alpha_1 B = B$$

bərabərliyi ilə göstərmək olar ki, bu qabarıq xətti kombinasiya da mümkün həldir.

Buradan belə nəticəyə gəlirik ki,  $x$  həlli də məhdudiyyətlər sistemini ödəyir.  $x^{(1)} \geq 0, x^{(2)} \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$  olduğundan  $x \geq 0$  olur. Yəni  $x$  həlli həmçinin dəyişənlərin mənfi olmamazlığı şərtini də ödəyir. Teorem isbat olundu.

**Teorem 2.** Tutaq ki, xətti proqramlaşdırma məsələsinin optimal həlli var. Onda xətti şəkildə verilmiş məqsəd funksiyası optimal qiymətini həllər çoxlüzlüsünün təpə nöqtəsində alır.

Əgər xətti funksiya özünün optimal qiymətini yəni, maksimum və ya minimum qiymətini bir deyil, bir neçə təpə nöqtələrində alırsa, onda bu nöqtələrin ixtiyari qabarıq kombinasiyalarında da optimal qiymət alır.

**İsbatı:** Teoremi isbat etmək üçün fərz edək ki, həllər çoxlüzlüsü məhduddur. Bu çoxlüzlünün təpə nöqtələrini  $x_1, x_2, \dots, x_p$  ilə işarə edək.  $x^*$ -ilə isə optimal həlli işarə edək.

Tutaq ki, məqsəd funksiyasının optimal qiyməti kimi onun ən böyük qiyməti axtarılır.

$$Z(x^*) \geq Z(x), \quad x \in X \quad (1)$$

bərabərsizliyi  $X$  həllər çoxluğunun bütün nöqtələrində ödənilərsə və  $x^*$  təpə nöqtəsi olarsa, o zaman teoremin birinci hissəsi isbat edilmiş olar.

İndi isə fərz edək ki,  $x^*$ -həllər çoxlüzlüsünün təpə nöqtəsi deyil. Onda  $x^*$  nöqtəsini həllər çoxlüzlüsünün təpə nöqtələrinin qabarıq xətti kombinasiyası kimi ifadə etmək olar:

$$x^* = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_p x_p, \quad \sum_{j=1}^p \alpha_j = 1, \quad \alpha_j \geq 0, \quad j = \overline{1, p}.$$

Burada  $Z(x)$  funksiyası xətti funksiya olduğu üçün

$$Z(x^*) = Z(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p) = \alpha_1 Z(x_1) + \dots + \alpha_p Z(x_p) \quad (2)$$

yaza bilərik.

$Z(x_1), \dots, Z(x_p)$  qiymətləri arasından ən böyüyünü seçək. Tutaq ki, bu  $x_k$  ( $1 \leq k \leq p$ ) təpə nöqtəsinə uyğundur. Onda,

$$Z(x^*) = \alpha_1 Z(x_k) + \alpha_2 Z(x_k) + \dots + \alpha_k Z(x_k) = Z(x_k) \sum_{j=1}^p \alpha_j = Z(x_k)$$

Deməli,

$$Z(x^*) \leq Z(x_k). \quad (3)$$

Burada  $x^*$  fərziyyəyə görə optimal həll olduğundan (1)-(3)-dan

$$x^* = x_k$$

alırıq. Buradan isə belə nəticəyə gələrik ki,  $(x_k)$  təpə nöqtəsi olduğu üçün  $x^*$ -da təpə nöqtəsidir.

İndi isə teoremin ikinci hissəsini isbat etmək üçün fərz edək ki,  $Z(x)$  maksimum qiymətini bir neçə, məsələn  $x_1, x_2, \dots, x_q$  ( $1 < q < p$ ) təpə nöqtəsində alır, onda

$$Z(x_1) = Z(x_2) = \dots = Z(x_q) = Z(x^*)$$

$x$  nöqtəsinin bu təpə nöqtələrinin xətti qabarıq kombinasiyası olduğunu fərz edək, daha doğrusu

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_q x_q, \quad \sum_{j=1}^q \alpha_j = 1, \quad \alpha_j \geq 0, j = \overline{1, q}$$

Əgər nəzərə alsaq ki,  $Z(x)$  xəttidir, onda

$$\begin{aligned} Z(x) &= Z(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_q x_q) = \alpha_1 Z(x_1) + \alpha_2 Z(x_2) + \dots + \alpha_q Z(x_q) = \\ &= Z(x^*) \sum_{j=1}^q \alpha_j = Z(x^*). \end{aligned}$$

Bu isə göstərir ki,  $Z$  – xətti funksiyası optimal qiymətini  $x_1, x_2, \dots, x_q$  təpə nöqtələrinin ixtiyari xətti qabarıq  $x$  – kombinasiyasında alır.

Qeyd: İsbat olunan bu teoremdə həllər çoxluğunun məhdud olması zəruridir [1]. Bu teorem xətti proqramlaşdırma məsələsinin praktik həll yolunu göstərir.

### Ədəbiyyat

1. İskəndərov A.D., Tağıyev R.Q., Yaqubov Q.Y. Optimallaşdırma üsulları. Çasıoğlu 2002, -400 s.
2. İsgəndərov A.D., Tağıyev R.Q., Həşimov S.A. Optimallaşdırma üsulları məsələ və misallarla. Bakı: BDU nəşriyyatı, 2016, 273 s.



## BUL DƏYİŞƏNLİ XƏTTİ TƏNLİKLƏR SİSTEMİNİN BİR EKVALENT TƏNLİYƏ GƏTİRİLMƏSİ

**Ağazadə Mehriban Çingiz qızı**

(Bakı Dövlət Universiteti, Tətbiqi Riyaziyyat və Kibernetika fakültəsi)

agazademehriban2003@gmail.com

**Xülasə:** Bu işdə Bul dəyişənli iki xətti tənlikdən ibarət sistemin bir ekvivalent tənliklə əvəz olunması məsələsi araşdırılır. Göstərilir ki, uyğun tam ədəd vurucular seçildikdə alınan yeni tənliyin həllər çoxluğu ilkin sistemin həllər çoxluğu ilə üst-üstə düşür. Məqalədə belə ekvivalentliyin təmin olunması üçün zəruri və kafi şərtlər iki teorem şəklində verilir. Həmçinin bu üsulun üç və daha çox tənlikdən ibarət sistemlərə mərhələli şəkildə tətbiq oluna bilməsi göstərilir. Alınmış nəticələr Bul proqramlaşdırması məsələlərində məhdudiyyətlərin sayını azaltmaq və həlli sadələşdirmək baxımından praktik əhəmiyyət daşıyır.

**Açar sözlər:** Açar sözlər: Bul dəyişənlər, xətti tənliklər sistemi, ekvivalent tənlik, zəruri və kafi şərtlər, Bul proqramlaşdırması, diskret optimallaşdırma.

Aşağıdakı kimi iki tənlikdən ibarət xətti sistemə baxaq:

$$\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j = b_1, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{2j} x_j = b_2 \quad (2)$$

$$x_j = 1 \bigvee 0, \quad (j = \overline{1, n}). \quad (3)$$

Burada fərz edirik ki,  $a_{1j}, a_{2j}, (j = \overline{1, n})$   $b_1$  və  $b_2$  verilmiş sabit tam ədədlərdir.

Əvvəlcə qeyd edək ki, tənliklər sistemini ona ekvivalent olan bir tənliklə əvəz olunması məsələlərinə [1-3] və s. işlərində baxılmışdır. Lakin həmin işlərdə göstərilmişdir ki, bu zaman alınan bir ekvivalent tənliyin əmsalları çox böyük ədədlər olur. Ona görə də (1) – (3) sisteminə ekvivalent olan, lakin nisbətən kiçik ədədlərlə əmsalları olan bir tənliyin qurulması üsullarının təklif olunması mühüm əhəmiyyətə malikdir. Çünki Bul proqramlaşdırması modellərinə gələn praktiki məsələlərdə məhdudiyyət şərtlərini göstərən tənliklərin sayı yüzlərlə olur. Təbiidir ki, belə sistemin əvəzinə yalnız bir dənə ekvivalent tənlik yazmaq, məsələnin həllini kifayət qədər sadələşdirər.

Qeyd edək ki, burada ekvivalentlik dedikdə, verilmiş tənliklər sistemi ilə, qurulmuş bir dənə tənliyin həllər çoxluqlarının üst – üstə düşməsi başa düşülür.

Digər tərəfdən, əgər (1) və (2) tənliklərini tərəf – tərəfə toplasaq, onda

alınan tənlik və (1), (2) sistemi ekvivalent olmayacaq. Çünki alınan tənlik, (1) – (2) sisteminin həllər çoxluğunu özündə saxlayacaq, lakin əlavə həllər də saxlayacaq. Ona görə də (1) və (2) tənliklərinin hər tərəfini uyğun olaraq elə  $\lambda_1$  və  $\lambda_2$  ədədlərinə vurub tərəf – tərəfə toplamalıyıq ki, alınan tənlik ilə (1), (2) sisteminin ekvivalentliyi təmin olunsun.

Tutaq ki, (1), (2) sistemindən aşağıdakı tənliyi almışıq:

$$\sum_{j=1}^n (a_{1j}\lambda_1 + a_{2j}\lambda_2)x_j = b_1\lambda_1 + b_2\lambda_2$$

$$x_j = 1 \bigvee 0, \quad (j = \overline{1, n}). \quad (4)$$

Onda aşağıdakı teoremlər doğrudur.

**Teorem 1.** (1), (2) sistemi ilə (4) tənliyinin ekvivalent olması üçün zəruri və kafi şərt  $\lambda_1 > 0$  və  $\lambda_2 < 0$  tam ədədləri üçün aşağıdakı münasibətlərin ödənilməsidir:

1)

$$\lambda_1 > b_2 - \sum_{a_{2j}<0} a_{2j}; \quad \lambda_2 < b_1 - \sum_{a_{1j}>0} a_{1j};$$

2)  $\lambda_1$  və  $\lambda_2$  qarşılıqlı sadə ədədlərdir, yəni  $\text{ƏBOB}(\lambda_1, \lambda_2) = \pm 1$ .

**Teorem 2.** (1), (2) sistemi ilə (4) tənliyinin ekvivalent olması üçün zəruri və kafi şərt  $\lambda_1 < 0$  və  $\lambda_2 > 0$  tam ədədləri üçün aşağıdakı şərtlərin ödənilməsidir:

1)

$$\lambda_1 < b_2 - \sum_{a_{2j}>0} a_{2j}, \quad \lambda_2 > b_1 - \sum_{a_{1j}<0} a_{1j};$$

2)  $\lambda_1$  və  $\lambda_2$  qarşılıqlı sadə ədədlərdir, yəni  $\text{ƏBOB}(\lambda_1, \lambda_2) = \pm 1$ .

Qeyd edək ki, teorem 1 və ya teorem 2 vasitəsilə yalnız (1), (2) kimi iki tənliyin əvəzinə (4) şəklində bir ekvivalent tənlik qurmaq olar. Əgər sistemdə üç və ya daha çox tənliklər olarsa, onda əvvəlcə bu tənliklərdən ikisini bir tənliyə gətirərik. Sonra isə bu tənliyə sistemdəki üçüncü tənliyi qoşub, üç tənlik əvəzinə bir ekvivalent tənlik qurarıq. Bu qaydanı davam etdirməklə bütün sistem əvəzinə bir ekvivalent tənlik qurmaq olar.

### Ədəbiyyat

1. Bradley G.H. Transformation of integer programs to Knapsack problems. J. Diskrete mathematics, 2001, N1, pp. 27 – 32.
2. Glover F., Woolsey E. Aggregating Diophantine equations. I. Zeitchrift füroperations research. 2012, N6, pp. 124 – 129.
3. Мамедов К.Ш. Метод построения эквивалентной задачи с меньшим числом ограничений для обшей задачи дискретного программирования. Ж. Известия АН Азерб. 2013, №2, ст. 118 – 122.

## XƏTTİ TAMƏDƏDLİ TƏNLİKLƏR SİSTEMİ ƏVƏZİNƏ ONƏ EKVİVALENT OLAN BİR TƏNLİYİN QURULMASI

Ağazadə Mehriban Çingiz qızı

(Bakı Dövlət Universiteti, Tətbiqi Riyaziyyat və Kibernetika fakultəsi)

agazademehriban2003@gmail.com

**Xülasə:** Bu işdə tamədədli xətti tənliklər sisteminin bir ekvivalent tənliyə gətirilməsi üsulu tədqiq olunur. Göstərilir ki, sistemdəki tənliklər iki-iki aqreqasiya edilməklə sonda bütün sistem əvəzinə yeganə ekvivalent tənlik qurmaq mümkündür. Məqalədə bu çevirmənin düzgünlüyünü təmin edən zəruri və kafi şərtlər verilir, həmçinin  $\lambda_1$  və  $\lambda_2$  vuruqlarının seçilməsi qaydası göstərilir. Təklif olunan üsulun əsas üstünlüyü ondan ibarətdir ki, çox məhdudiyyətli tamədədli proqramlaşdırma məsələsi bir məhdudiyyətli ekvivalent məsələyə çevrilir. Bu işə məsələnin həllini sadələşdirir və daha kiçik əmsallı tənliklərin qurulmasına imkan yaradır.

**Açar sözlər:** tamədədli proqramlaşdırma, xətti tənliklər sistemi, ekvivalent tənlik, aqreqasiya üsulu, zəruri və kafi şərtlər, məhdudiyyətlərin azaldılması.

Aşağıdakı kimi tamədədli xətti tənliklər sisteminə baxaq:

$$\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j = b_1 \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{2j} x_j = b_2 \quad (2)$$

.....

$$\sum_{j=1}^n a_{mj} x_j = b_m \quad (m)$$

$$0 \leq x_j \leq d_j, \quad x_j \text{ və } d_j - \text{tamdırlar} \quad (m+1)$$

Burada qəbul edirik ki,  $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}, d_j > 0, (j = \overline{1, n})$   $b_1, b_2, \dots, b_m$  verilmiş tam ədədlərdir.

Biz bu işdə (1) – (m+1) sistemi əvəzinə, ona ekvivalent olan bir tənliyin qurulması üsulunu verəcəyik. Bu üsulun köməyiylə verilmiş tamədədli tənliklər sistemini bir tənliyə gətirmək olur. Belə ki, əvvəlcə sistemdəki hər hansı iki tənlik aqreqasiya olunur, yəni bir ekvivalent tənliyə gətirilir. Bundan sonra alınmış tənlik ilə sistemdəki hər hansı başqa bir tənlik aqreqasiya olunur və s. Aydınır ki, nəticədə (1) – (m+1) sistemi əvəzinə yeganə ekvivalent tənlik alınacaq.

Bu üsulun əhəmiyyəti ondan ibarətdir ki, məhdudiyyət şərtləri çoxlu olan hər hansı tamədədli proqramlaşdırma məsələsi, yalnız bir məhdudiyyət şərti olan ekvivalent məsələyə gəlir. Təbiidir ki, sonuncu məsələni həll etmək daha asan olar, nəinki çox məhdudiyyətli məsələ.

Qeyd edək ki, belə məsələyə [1-3] və s. işlərində baxılmış və müəyyən həll üsulları verilmişdir. Lakin həmin üsullar vasitəsilə alınan tənliyin əmsalları kifayət qədər böyük ədədlər olur. Ona görə də elə üsulların işlənməsi lazım gəlir ki, nəticədə alınmış tənliyin əmsalları nisbətən kiçik ədədlər olsun. Aydındır ki, bu zaman daha çox tənlikləri bir ekvivalent tənliyə gətirmək olar.

Əvvəlcə (1) –  $(m+1)$  sisteminin ilk iki tənliyini yazaq.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j &= b_1 \\ \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j &= b_2 \end{aligned} \quad (p)$$

Burada  $A = \{x_j | 0 \leq x_j \leq d_j, x_j \text{ v} \overline{d_j} \text{ tamdır, } (j = \overline{1, n})\}$  işarə edək.

Bu sistem əvəzinə aşağıdakı tənliyi yazaq.

$$\sum_{j=1}^n (a_{1j} \lambda_1 + a_{2j} \lambda_2) x_j = b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2. \quad (Q)$$

Burada  $\lambda_1$  və  $\lambda_2$  vuruqlarının seçilməsi üçün elə şərtlər olmalıdır ki, (p) sistemi ilə (Q) tənliyi ekvivalent olsun, yəni onların  $A$  çoxluğundakı həlləri üst – üstə düşsün. Bunu aşağıdakı teorem təmin edir.

**Teorem.** (p) sistemi ilə (Q) tənliyinin ekvivalent olması üçün zəruri və kafi şərt aşağıdakı münasibətlərin ödənilməsidir.

1)

$$\lambda_1 > b_2 - \min_{x_j \in A} \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j,$$

2)

$$\lambda_2 < b_1 - \max_{x_j \in A} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j$$

3)  $\lambda_1$  və  $\lambda_2$  qarşılıqlı sadə ədədlərdir.

Göründüyü kimi bu teoremdən istifadə etməklə əvvəlcə iki tənliyi bir tənliyə gətirmək olar. Sonra bu tənliklə sistemdəki üçüncü, dördüncü və s. tənlikləri aqreqasiya etmək olar.

### Ədəbiyyat

1. Glover F., Woolsey E. Aggregating Diophantine equations. I. Zeitschrift für operations research. 2012, N6, pp. 124 – 129.
2. Babaev D.A., Mardanov S.S., Reducing the number of variables in integer and linear programming problems. J. Computational optimization and Applications. 2014, N3, pp. 99 – 109.
3. Мамедов К.Ш. Задача агрегации системы нелинейных Диофантовых уравнений. Док. АН Азерб. 2007, №2, ст. 27 – 30.

## KƏSİLMƏ ŞƏRTLƏRİ OLAN HİPERBOLİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİR MƏSƏLƏ HAQQINDA

**Allahverdi Aynur Aydın qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

aynursuleymanova1997@gmail.com

**Xülasə:** İşdə kəsilmə şərti olan ikinci tərtib giperbolik tənlik üçün Qursa tipli məsələyə baxılmışdır. Bu məsələnin həlli üçün aşkar ifadə alınmışdır.

**Açar sözlər:** Kəsilmə şərti, Qursa məsələsi, hiperbolik tənlik, Yost həlli.

$D_1 = \{(x, t) : x > a, t > x\}$ ,  $D_2 = \{(x, t) : x < a, t > 2a - x\}$ ,  
 $D_3 = \{(x, t) : x < a, x < t < 2a - x\}$  oblastlarını daxil edək, burada  $a$  qeyd olunmuş həqiqi ədəddir. Bu oblastların birləşməsində qeyri-bircins dalğa tənliyi üçün kəsilmə şərtləri olan aşağıdakı məsələyə baxaq:

$$U_{xx}'' - U_{tt}'' = f(x, t), \quad (x, t) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3, \quad (1)$$

$$U(x, x) = \varphi_1(x), \quad a < x < \infty, \quad (2)$$

$$U(x, x) = \varphi_2(x), \quad -\infty < x < a, \quad (3)$$

$$U(x, 2a - x + 0) - U(x, 2a - x - 0) = \psi(x), \quad -\infty < x < a, \quad (4)$$

$$U(a - 0, t) = \alpha U(a + 0, t), \quad a < t < +\infty, \quad (5)$$

$$U_x'(a - 0, t) = \alpha^{-1} U_x'(a + 0, t), \quad a < t < +\infty, \quad (6)$$

$$\lim_{x+t \rightarrow +\infty} \left( U_x'(x, t) - U_t'(x, t) \right) = 0. \quad (7)$$

Qeyd edək ki, belə məsələlər  $a \in (-\infty, +\infty)$  nöqtəsində kəsilmə şərti

olan

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y, \quad -\infty < x < +\infty,$$

Şturm-Liuvill tənliklərinin Yost həllərinin qurarkən integral göstərilişdəki nüvələr üçün meydana çıxır, belə ki, kəsilmə şərtləri

$$y(a-0) = \alpha y(a+0),$$

$$y'(a-0) = \alpha^{-1} y'(a+0),$$

şəklindədir, burada  $1 \neq \alpha > 0$ ,  $\lambda$  kompleks parametrdir,  $q(x)$  isə həqiqi qiymətli funksiya olub

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|) |q(x)| dx < +\infty.$$

şərtini ödəyir. Qeyd edək ki, kəsilmə şərti olan Şturm-Liuvill tənliklərinə müxtəlif aspektlərdə [1-3] işlərində baxılmışdır

**Teorem.** Tutaq ki,  $f(x, t)$  diferensiallanan funksiya,  $f(x, t) = 0$ ,  $t < x$  ı və hər bir qeyd olunmuş  $x \in (-\infty, \infty)$  üçün

$$\int_x^{\infty} d\tau \int_{\tau}^{+\infty} |f(\tau, \xi)| d\xi < +\infty,$$

şərtini ödəyir.  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ ,  $\psi(x)$  funksiyaları isə iki dəfə diferensiallanır və

$$A\varphi_1(a) = \varphi_2(a), \quad \alpha\varphi_1(a) - \varphi_2(a) = \psi(a).$$

Onda (1)-(7) məsələsinin həlli aşağıdakı şəkildə göstərilə bilər

$$U(x, t) = \varphi_1\left(\frac{x+t}{2}\right) + \frac{1}{2} \int_x^{+\infty} d\tau \int_{t-\tau+x}^{t+\tau-x} f(\tau, \xi) d\xi, \quad (x, t) \in D_1,$$

$$U(x, t) = A\varphi_1\left(\frac{x+t}{2}\right) + B\varphi_1\left(\frac{t-x}{2} + a\right) + \frac{1}{2} \int_x^a d\tau \int_{t-\tau+x}^{t+\tau-x} f(\tau, \xi) d\xi + \\ + \frac{A}{2} \int_a^{+\infty} d\tau \int_{t-\tau+x}^{t+\tau-x} f(\tau, \xi) d\xi + \frac{B}{2} \int_a^{+\infty} d\tau \int_{t-\tau-x+2a}^{t+\tau+x-2a} f(\tau, \xi) d\xi, \quad (x, t) \in D_2,$$

$$U(x,t) = \varphi_2\left(\frac{x+t}{2}\right) + B\varphi_1\left(a + \frac{t-x}{2}\right) - \psi\left(a - \frac{t-x}{2}\right) + \\ + \frac{1}{2} \int_x^a d\tau \int_{t-\tau+x}^{t+\tau-x} f(\tau, \xi) d\xi + \frac{A}{2} \int_a^{+\infty} d\tau \int_{t-\tau+x}^{t+\tau-x} f(\tau, \xi) d\xi + \\ \frac{B}{2} \int_a^{+\infty} d\tau \int_{t-\tau-x+2a}^{t+\tau-x-2a} f(\tau, \xi) d\xi, \quad (x,t) \in D_3,$$

burada  $A = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right), \quad B = \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right).$

### Ədəbiyyat

1. Ахмедова Э.Н., Гусейнов И.М. Об одной обратной задаче для оператора Штурма-Лиувилля с разрывными коэффициентами // Изв. Саратовского ун-та., сер. Мат. Мех. Информатика, 2010, т. 10, вып. 1, с. 3-9.
2. Гусейнов И.М., Джамшидипур А.Г. Обратная задача рассеяния для уравнения Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в условии разрыва // Дифференц. уравнения, 2013, т.49, № 10.
3. Kobayashi M. A uniqueness proof of discontinuous inverse Sturm-Liouville problems with symmetric potentials. - Inverse Problems (1989), v.5, no. 5, p. 767-781.

## HARMONİK OSSİLYATORUN MƏXSUSİ FUNKSIYALARI ÜZRƏ AYRILIŞ DÜSTURU

**Alverdiyeva Sevdə Nadir qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

alverdiyevasevda43@gmail.com

**Xülasə:** İşdə harmonik ossilyatorun doğuduğu tənliyə baxılır. Bu tənliyin həllərinin bazislik xassəsi öyrənilir.

**Açar sözlər:** harmonik ossilyator, delta funksiya, Veber funksiyası, Qamma funksiya, bazis.

Aşağıdakı tənliyə baxaq:

$$-y'' + x^2 y = \lambda y, \quad 0 \leq x < \infty, \quad \lambda \in C \quad (1)$$

Məlumdur ki, (1) tənliyinin aşağıdakı başlangıç şərtləri ödəyən  $f_0(x, \lambda) = D_{\frac{\lambda-1}{2}}(\sqrt{2}x)$  həlli var

$$f_0(0, \lambda) = 2^{\frac{\lambda-1}{4}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3-\lambda}{4}\right)}, f'_0(0, \lambda) = 2^{\frac{\lambda-1}{4}} \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\lambda}{4}\right)}, \quad (2)$$

burada  $D_\nu(x)$  Veber funksiyası,  $\Gamma(\cdot)$  isə Qamma funksiyadır. Hər bir qeyd olunmuş  $x$  üçün  $f_0(x, \lambda)$  funksiyası tamdır (bax [1]–[3]) və aşağıdakı asimptotik bərabərliyi ödəyir

$$f_0(x, \lambda) = (\sqrt{2}x)^{\frac{\lambda-1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 + O(x^{-2})), \quad x \rightarrow \infty, \quad (3)$$

(1)-(2) məsələsinin spektri sadə məxsusi ədədlərdən ibarətdir:  $\hat{\lambda}_n = 4n + 1, n = 0, 1, \dots$ , hansılar ki,  $f'_0(0, \lambda)$  funksiyasının sıfırlarıdır. Aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$f_0(x, \hat{\lambda}_n) = D_{2n}(\sqrt{2}x) = 2^{-n} e^{-\frac{x^2}{2}} H_{2n}(x),$$

burada  $H_n(x)$  Hermit çoxhədlisidir. Hermit çoxhədlilərinin məlum xassələrindən belə nəticə çıxır ki,

$$\hat{\alpha}_n^2 = \int_0^\infty f_0(x, \hat{\lambda}_n)^2 dx = (2n)! \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

**Teorem.**  $\left\{ \frac{f_0(x, \hat{\lambda}_n)}{\hat{\alpha}_n} \right\}_{n=0}^\infty$  funksiyalar sistemi  $L_2(0, \infty)$  fəzasında bazis

təşkil edir, yəni

$$\sum_{n=0}^\infty \frac{f_0(x, \hat{\lambda}_n)}{\hat{\alpha}_n} \frac{f_0(y, \hat{\lambda}_n)}{\hat{\alpha}_n} = \delta(x - y),$$

burada  $\delta$  ilə Dirakin delta funksiyası işarə olunur.

### Ədəbiyyat

1. D.Chelkak, E.Korotyaev, Dirixle sərhəd şərti ilə yarımxəz üzərində pozulmuş harmonik osilator üçün tərs məsələ, Ann. Henri Poincare, 8:6(2007), 1115–1150.
2. D.Chelkak, P.Kargaev, E.Korotyaev, Potensial ilə pozulmuş harmonik osilator üçün tərs məsələ: Unikallıq, Letters in Mathematical Physics . 64:1 (2003), 7–21.
3. D.Chelkak, P.Kargaev, E.Korotyaev, Potensialla pozulmuş harmonik ossilyatorun tərs məsələsi. Xarakterizə etmə, Communications in Mathematical Physics, 249:4(2004), 133–196.



## **SÜNİ İNTELLEKT ƏSASLI MÜDAXİLƏ AŞKARLAMA SİSTEMLƏRİNİN EFFEKTİVLİYİ**

**Axundzadə Ceyhun Həkim oğlu**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*ceyhuaxundzade@gmail.com*

**Xülasə:** *Bu məqalədə süni intellekt (Sİ) əsaslı müdaxilə aşkarlama sistemlərinin (MAS) ənənəvi imza əsaslı yanaşmalarla müqayisəli effektivliyi araşdırılmışdır. Maşın öyrənməsi alqoritmlərindən, o cümlədən Random Forest, Support Vector Machine (SVM) və dərin sinir şəbəkələrindən, istifadə edərək şəbəkə anomaliyalarının aşkarlanmasındakı nəticələr təhlil edilir. NSL-KDD və CICIDS2017 verilənlər toplusunda aparılan eksperimentlər göstərir ki, Sİ əsaslı MAS-lar 97–99%-ə qədər dəqiqlik göstəricisi ilə ənənəvi sistemlərə nisbətən əhəmiyyətli üstünlük təmin edir. Eyni zamanda yanlış müsbət nisbəti, real vaxt emalı tələbləri və modellərin sərfiyyatı kimi məhdudiyyətlər də müzakirə olunur.*

**Açar sözlər:** *süni intellekt, müdaxilə aşkarlama, maşın öyrənməsi, kibertəhlükəsizlik, anomaliya aşkarlama*

Müasir rəqəmsal infrastrukturun sürətlə genişlənməsi kiberhücumların mürəkkəbliyini və tezliyini artırmışdır. Ənənəvi müdaxilə aşkarlama sistemləri (MAS) əvvəlcədən müəyyən edilmiş imzalara əsaslandığından sıfır gün hücumlarını (zero-day attacks) və polimorfik zərərli proqramları aşkarlamaqda çətinlik çəkir [2]. Bu məhdudiyyəti aradan qaldırmaq üçün son illərdə süni intellekt əsaslı yanaşmalar geniş tədqiqat marağına səbəb olmuşdur. Maşın öyrənməsi modellərinin şəbəkə trafik nümunələrini öyrənmə, anomaliyaları müstəqil aşkarlama qabiliyyəti onları dinamik təhdid mühitinə daha uyğun edir [1].

Aparılmış tədqiqatlarda Sİ əsaslı MAS-ların effektivliyini qiymətləndirmək üçün NSL-KDD (125.973 qeyd) və CICIDS2017 (2,8 milyon paket) verilənlər topluslarından geniş istifadə olunmuşdur [1, 3]. Həmin işlərdə müqayisəli qiymətləndirmə üçün dörd əsas alqoritm tədqiq edilmişdir: Random Forest (RF) ansambl öyrənmə metodu kimi; Support Vector Machine (SVM) ikili təsnifat üçün hipermüstəvi əsaslı model kimi; Uzun Qısamüddətli Yaddaş Şəbəkəsi (LSTM) ardıcıl trafik anomaliyaları üçün rekurrent model kimi; Konvolyusion Sinir Şəbəkəsi (CNN) isə paket başlığı xüsusiyyətlərinin avtomatik çıxarılması üçün tətbiq edilmişdir. Qiymətləndirmə meyarları kimi dəqiqlik (accuracy), F1-xal, yanlış müsbət nisbəti (FPR) və aşkarlama gecikmə müddəti götürülmüşdür [1].

Həmin tədqiqatlarda əldə edilən nəticələrə görə CNN modeli ən yüksək dəqiqlik (99,1%) və ən aşağı yanlış müsbət nisbəti (0,5%) ilə seçilir. LSTM modeli 98,9% dəqiqlik göstəricisi ilə ikinci yeri tutur. Random Forest isə 98,7% dəqiqlik və cəmi 12 millisaniyəlik aşkarlama gecikmə müddəti ilə sürət-dəqiq-

lik balansı baxımından ən optimal nəticəni nümayiş etdirir. Bütün Sİ əsaslı modellər ənənəvi imza əsaslı sistemin 89,3% dəqiqliyini əhəmiyyətli dərəcədə üstələyir. Bu fərq xüsusilə bilinməyən hücum növlərinin (zero-day) aşkarlanmasında daha qabarıq nəzərə çarpır [2, 3].

Tədqiqatçılar Sİ əsaslı MAS-ların əsas üstünlüyü kimi bilinməyən hücum növlərini müstəqil şəkildə aşkarlama qabiliyyətini göstərir. Bununla yanaşı, bir sıra məhdudiyyətlər də qeyd edilir. Model adekvatlığı baxımından öyrənmə verilənlərindən kənar hücum növlərində performansın aşağı düşdüyü müşahidə olunur. Adversarial hücumlar zamanı isə hücumçuların modeli aldatmaq üçün trafik nümunəsini qəsdən dəyişdirə bildiyi qeyd edilir. Bundan əlavə, dərin öyrənmə modellərinin qərarlarının şəffaflıq baxımından zəif olması müdaxilə analizini çətinləşdirir [4]. Hesablama sərfiyyatı da əməliyyat mühitlərində ciddi məhdudiyyət kimi qiymətləndirilir: CNN və LSTM modelləri üçün aşkarlama gecikmə müddətinin 34–41 millisaniyəyə çatması real vaxt tətbiqlərində problem yarada bilər [1, 2].

Bir sıra tədqiqatçılar federated learning yanaşmasını mərkəzləşdirilmiş öyrənmə zamanı yaranan məxfilik riskini azaltmaq üçün perspektivli istiqamət kimi qiymətləndirir [5]. Bu yanaşmada modelin məlumatların mərkəzi serverə göndərilməsi əvəzinə birbaşa uç qurğularda öyrənilməsi göstərilir. Hibrid yanaşmalar, yəni imza əsaslı sistemlərlə Sİ modellərin integrasiyası isə praktiki tətbiqdə optimal nəticə verəcəyi gözlənilən həll kimi təqdim edilir: imza əsaslı komponent məlum hücumları aşağı gecikmə müddəti ilə aşkarlayarkən, Sİ komponenti bilinməyən anomaliyaları müstəqil təhlil edir. Belə integrasiyanın həm dəqiqliyi, həm də sistem sərfiyyatını optimallaşdırdığı hesab edilir.

Ədəbiyyatın ümumiləşdirilmiş təhlili göstərir ki, süni intellekt əsaslı müdaxilə aşkarlama sistemləri dəqiqlik, yanlış müsbət nisbəti və dinamik adaptasiya qabiliyyəti baxımından ənənəvi yanaşmalara nisbətən əhəmiyyətli üstünlüklər təqdim edir [1, 2]. CNN və LSTM modellərinin dəqiqliyi 99%-ə çatır. Lakin hesablama yükü, adversarial dayanıqlıq və şərh olunabilirlik məsələlərinin həlli gələcək tədqiqatların əsas istiqamətlərini təşkil etməlidir. Kibertəhlükəsizlik sahəsinin sürətlə inkişaf etdiyi müasir dövrdə Sİ əsaslı MAS-ların tətbiqi davamlı rəqəmsal müdafiənin ayrılmaz hissəsinə çevrilməkdədir [6].

### **Ədəbiyyat**

1. Buczak, A.L., Guven, E. (2016). A survey of data mining and machine learning methods for cyber security intrusion detection. *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 18(2), 1153–1176.
2. Liao, H.J. et al. (2013). Intrusion detection system: A comprehensive review. *Journal of Network and Computer Applications*, 36(1), 16–24.

3. Tavallae, M. et al. (2009). A detailed analysis of the KDD CUP 99 data set. Proceedings of IEEE CISDA. Ottawa, Canada.
4. Goodfellow, I. et al. (2014). Generative adversarial nets. Advances in Neural Information Processing Systems, 27, 2672–2680.
5. McMahan, B. et al. (2017). Communication-efficient learning of deep networks from decentralized data. Proceedings of AISTATS. Fort Lauderdale, FL.
6. ENISA (European Union Agency for Cybersecurity). (2023). Threat Landscape Report 2023. Publications Office of the EU.

## BƏRPA FUNKSİYASININ ASİMPTOTİK AYRILIŞINDAKI QALIQ HƏDDİN ÜÇÜNCÜ DƏRƏCƏLİ POLİNOMIAL ÇƏKİLİ VARIANTININ İNTEQRALLANMASI

**Atakışiyeva Aysel Müşfiq qızı, Bayramov Vəli Əziz oğlu**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

ayselatakishiyevaa@gmail.com, veli\_bayramov@yahoo.com

**Xülasə:** Təqdim olunan işdə bərpa funksiyasının asimptotik ayrılışındakı  $R(t)$  qalıq həddinin  $R_3(t) = t^3 R(t)$  üçüncü dərəcəli polinomial çəkili variantının müsbət yarımxda inteqralı hesablanmışdır.

**Açar sözlər:** bərpa prosesi, bərpa funksiyası, asimptotik ayrılış

Fərz edək ki,  $\{\xi_i, i \geq 1\}$  asılı olmayan və eyni qanunla paylanmış təsadüfi kəmiyyətlərdir və ümumi  $F(t) = P\{\xi_1 < t\}$  paylanma funksiyasına malikdirlər. Aşağıdakı kəmiyyətləri daxil edək:

$$T_n = \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

$$\nu(t) = \max\{n: T_n \leq t\}, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$H(t) = E(\nu(t)). \quad (3)$$

(1), (2) və (3) elmi ədəbiyyatda, uyğun olaraq, bərpa anları, bərpa prosesi və bərpa funksiyası adlandırılır [1].  $T_1 \equiv \xi_1$  ilk bərpa anını,  $\xi_i, i \geq 2$  isə  $(i-1)$ -ci və  $i$ -ci bərpalar arasındakı zaman intervalını göstərir.  $\xi_1$  kəmiyyətinin  $k$ -cı tərtib başlanğıc momentini aşağıdakı kimi daxil edək:

$$\mu_k \equiv E\xi_1^k = \int_0^\infty t^k dF(t), \quad k \geq 1.$$

**Tərif 1.** Əgər  $F$  paylanmasının hər hansı bürünməsi mütləq kəsilməz komponentə malikdirsə, onda deyirlər ki,  $F$  paylanması  $\vartheta$  sinfinə daxildir [2].

Aşağıdakı funksiyaları daxil edək:

$$R(t) = H(t) - \frac{1}{\mu_1} t - \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + 1,$$

$$R_k(t) = t^k R(t), \quad k \geq 0.$$

$R_k(t)$  funksiyasına  $R(t)$  funksiyasının  $k$  dərəcəli polinomial çəkili variantı deyilir. Məlumdur ki, əgər  $F \in \vartheta$  və  $\mu_{k+3} < \infty$  ( $k \geq 0$ ) olarsa, onda [3]

$$\int_0^{\infty} t^s |R(t)| dt < \infty, \quad 0 \leq s \leq k.$$

Belə olduqda, aşağıdakı işarələməni qəbul edə bilərik:

$$r_s = \int_0^{\infty} t^s R(t) dt, \quad 0 \leq s \leq k.$$

$k = 0$ ,  $k = 1$  və  $k = 2$  üçün uyğun integrallar hesablanıb [2,4]. Təqdim olunan işdə isə  $k = 3$  halı üçün uyğun integral hesablanmışdır.

**Teorem 1.** Əgər  $F \in \vartheta$  və  $\mu_6 < \infty$  olarsa, onda

$$r_3 = -\frac{3\mu_2^5}{16\mu_1^6} + \frac{\mu_2^3\mu_3}{2\mu_1^5} - \frac{\mu_2\mu_3^2}{4\mu_1^4} - \frac{3\mu_2^2\mu_4}{16\mu_1^4} + \frac{\mu_2\mu_5}{20\mu_1^3} + \frac{\mu_3\mu_4}{12\mu_1^3} - \frac{\mu_6}{120\mu_1^2}.$$

#### Ədəbiyyat

1. S.M.Ross. Stochastic Processes. 2<sup>nd</sup> ed., New York, John Wiley and sons, 1996, 544 p.
2. M.Brown, H.A.Solomon. Second-order approximation for the variance of a renewal reward process. Stochastic Process. Appl., 3, 1975, pp.301–314.
3. W.L.Smith. On the cumulants of renewal processes. Biometrika 46 (1-2), 1959, pp.1–29.
4. A.E.Abdullayeva, R.T.Aliyev. On the fourth order moment of the renewal-reward process with dependent components. Informatics and Control Problems, 44 (2), 2024, pp.28–41.

## SİĞORTA ŞİRKƏTLƏRİNDƏ SİĞORTA FƏALİYYƏTİNİN EKONOMETRİK TƏHLİLİ VƏ MALİYYƏ DAYANAQLIĞININ QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ

**Baxışov Namiq Məmməd oğlu, Bəkirova Zeynəb Ramiz qızı ,  
Mahmudova Gülnar Kamran qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)  
namigbm@hotmail.com, zeynebbekirova0510@gmail.com,  
gulnar.mahmudova@gmail.com

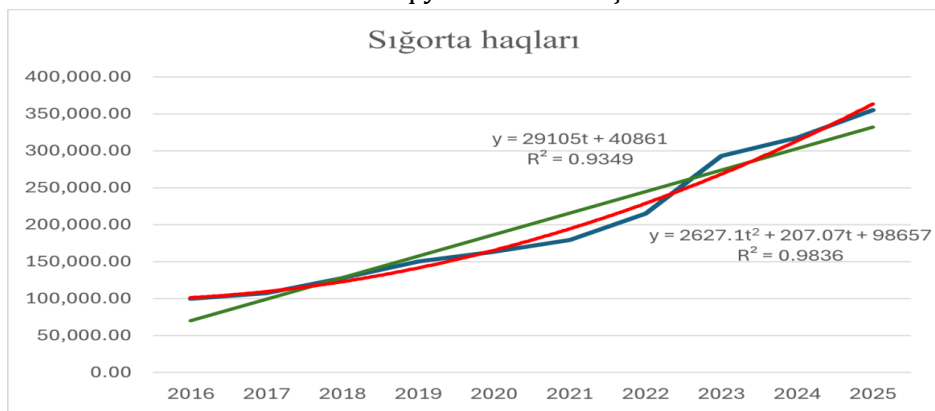
**Xülasə:** Bu məqalədə sığorta şirkətində fəaliyyətin effektivliyinin qiymətləndirilməsi məqsədilə ekonometriya metodlarından istifadə olunması və maliyyə dayanıqlılığının əsas göstəricilər vasitəsilə təhlili aparılır. Tədqiqat çərçivəsində sığorta bazarının inkişafına təsir edən amillər müəyyən edilir, trend və polinomial trend modelləri qurulur və

sığorta şirkətinin maliyyə sabitliyi göstəriciləri qiymətləndirilir.

**Açar sözlər:** risk, sığorta haqları, sığorta ödənişləri, qiymətləndirmə.

Sığorta sektoru maliyyə sisteminin mühüm tərkib hissəsi olmaqla iqtisadi sabitliyin təmin olunmasında mühüm rol oynayır. Sığorta şirkətlərinin effektiv fəaliyyəti həm fərdi, həm də korporativ risklərin azaldılmasına xidmət edir. Bu baxımdan, sığorta fəaliyyətinin ekonometriya üsulları ilə təhlili və maliyyə dəyənəqliliyinin qiymətləndirilməsi xüsusi əhəmiyyət kəsb edir [1].

Təqdim olunan məqalədə ölkədə fəaliyyət görsədən "PAŞA Sığorta" ASC-nin sığorta fəaliyyətinin əsas göstəriciləri ekonometrik metodlar əsasında təhlil edilmişdir [3]. Təhlil çərçivəsində sığorta haqları və sığorta ödənişlərinin dinamikası trend modelləri vasitəsilə qiymətləndirilmişdir.



**Qrafik 1. PAŞA Sığorta ASC-də sığorta haqlarının zaman üzrə dinamikası və trend təhlili (2016–2025 illəri üzrə)**

Qrafik 1-də "PAŞA Sığorta" ASC-nin 2016–2025-ci illər üzrə sığorta haqlarının dinamikası və bu göstəricinin trend analizi təqdim edilmişdir. Təhlil Azərbaycan Respublikasının Mərkəzi Bankının rəsmi statistik məlumatları əsasında aparılmış və göstəricilər min manatla ifadə olunmuşdur [2]. Şirkətin bazarda inkişaf istiqamətinin müəyyən edilməsi məqsədilə xətti və ikinci dərəcəli polinomial trend modellərindən istifadə edilmişdir.

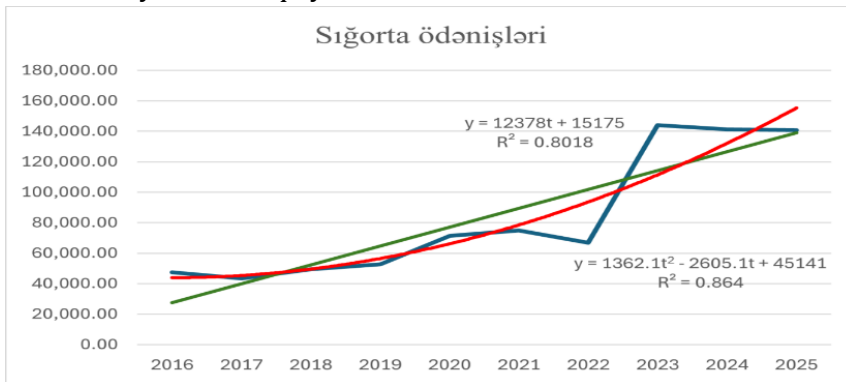
Xətti trend modelinin tənliyi  $y = 29105t + 40861$  və determinasiya əmsalı  $R^2 = 0.9349$  olmaqla sığorta haqlarında sabit və davamlı artım meylini təsdiq edir. Bu nəticə "PAŞA Sığorta" ASC-nin fəaliyyətinin uzunmüddətli perspektivdə stabil inkişaf etdiyini göstərir. Determinasiya əmsalının yüksək olması modelin statistik məlumatları yüksək dəqiqliklə izah etdiyini sübut edir.

İkinci dərəcəli polinomial trend modeli isə

$$y = 2627.1t^2 + 207.07t + 98657, R^2 = 0.9836$$

şəklində ifadə olunaraq daha yüksək izah gücü nümayiş etdirir. Bu model sığorta haqlarında artım tempinin zaman keçdikcə sürətləndiyini göstərir və göstəricinin dinamikasını daha dəqiq əks etdirir [2,3].

Xüsusilə 2021-ci ildən sonra müşahidə olunan yüksəliş pandemiya sonrakı iqtisadi bərpa, investisiya və biznes aktivliyinin artması, eləcə də sığorta xidmətlərinə tələbin genişlənməsi ilə izah olunur. Bununla yanaşı, ölkədə həyata keçirilən iri infrastruktur layihələri və korporativ sığorta portfelinin genişlənməsi sığorta haqlarının artımına mühüm töhfə vermişdir. Bu dinamika "PAŞA Sığorta" ASC-nin bazar liderliyini, maliyyə dayanıqlığını və rəqabət üstünlüyünü təsdiqləyir.



Qrafik 2. "PAŞA Sığorta" ASC-də sığorta ödənişlərinin zaman üzrə dinamikası və trend təhlili (2016–2025-ci illər)

olmaqla ödənişlərdə ümumi artım meylinin mövcudluğunu göstərir. Determinasiya əmsali modelin statistik məlumatları kifayət qədər yüksək səviyyədə izah etdiyini təsdiqləyir.

Polynomial trend modeli isə

$$y = 1362.1t^2 - 2605.1t + 45141, R^2 = 0.864$$

şəklində ifadə olunaraq göstəricidə baş verən dalğavari dəyişmələri daha dəqiq əks etdirir. Bu, sığorta ödənişlərinin zaman üzrə qeyri-bərabər dinamika nümayiş etdirdiyini göstərir.

2022-ci ildə ödənişlərin azalması risklərin optimallaşdırılması və sığorta portfelinin strukturunun yenidən formalaşdırılması ilə izah olunur. 2023-cü ildə müşahidə olunan kəskin artım isə iri korporativ sığorta hadisələri, iqtisadi aktivliyin genişlənməsi və bağlanmış sığorta müqavilələrinin həcmnin artması ilə əlaqədardır. Sonrakı illərdə göstəricinin sabitləşməsi şirkətdə risklərin effektiv idarə olunduğunu və sığorta fəaliyyətinin maliyyə baxımından dayanıqlı olduğunu göstərir.

### **Ədəbiyyat**

1. Ələkbərov Ə., Qurbanova T., Məmmədova G., Əlicanova Ş. "Maliyyə risklərinin idarə edilməsi", Bakı, 2003, UNEC, 285 səh.
2. <http://www.cbar.az/lpages/legislation/regulations/> (mərkəzi bankın normativ-hüquqi sənədləri)
3. "PAŞA Sığorta" ASC. (2025). İllik maliyyə hesabatları: Mühasibat balansı (31 dekabr 2025). Bakı.
4. [https://storage.pasha-insurance.az/strapi-upload/Balans\\_2025\\_a5865d9a6f.pdf](https://storage.pasha-insurance.az/strapi-upload/Balans_2025_a5865d9a6f.pdf)

## **İSTEHSALATDA BƏDBƏXT HADİSƏLƏR VƏ PEŞƏ XƏSTƏLİKLƏRİ ÜZRƏ SİĞORTA TARİFLƏRİNİN AKTUAR ƏSASLARLA HESABLANMASI VƏ TƏKMİLLƏŞDİRİLMƏSİ**

**Baxşiyeva Aygün Zeynal qızı**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi )*

*aygunbaxsiyeva0@gmail.com*

**Xülasə:** *Bu tezisdə işçilərin istehsalatda bədbəxt hadisələrdən və peşə xəstəliklərindən sığortası üzrə tariflərin aktuar əsaslarla hesablanması araşdırılır. Tədqiqatda xalis sığorta tarifi, risk üstəliyi və yüklənmə göstəriciləri əsasında nümunəvi hesablama aparılmışdır. Hesablama nəticəsində orta riskli müəssisə üçün xalis tarif 1,54%, yekun sığorta tarifi isə 1,93% müəyyən edilmişdir. Nəticə olaraq, Azərbaycanda tariflərin risk sinifləri, zərərlik tarixi və əmək təhlükəsizliyi göstəriciləri əsasında diferensiallaşdırılmasının məqsədəuyğun olduğu göstərilir.*

**Açar sözlər:** *istehsalatda bədbəxt hadisə, peşə xəstəlikləri, sığorta tarifi, aktuar hesablama, risk üstəliyi.*

İstehsalatda baş verən bədbəxt hadisələr və peşə xəstəlikləri əmək münasibətlərində ən ciddi sosial-iqtisadi risklərdən biri hesab olunur. Bu risklər yalnız işçinin sağlamlığına və gələcək əmək qabiliyyətinə təsir etmir, eyni zamanda işəgötürən, sığortaçı və ümumilikdə sosial müdafiə sistemi üçün də maliyyə yükü yaradır. Buna görə də işçilərin istehsalatda bədbəxt hadisələrdən və peşə xəstəliklərindən sığortası yalnız sosial müdafiə mexanizmi kimi deyil, həm də düzgün aktuar hesablamaya əsaslanan maliyyə sistemi kimi qiymətləndirilməlidir. Bu sığorta növündə əsas məsələlərdən biri sığorta tarifi üçün düzgün müəyyən edilməsidir. Tarif çox aşağı müəyyən edildikdə sığortaçının gələcək ödənişləri qarşılamaq imkanı zəifləyir [2].

Aktuar yanaşmaya görə sığorta tarifi iki əsas hissədən ibarətdir: xalis sı-

ğorta tarifi və yüklənmə. Xalis tarif sığorta hadisələri üzrə gözlənilən ödənişlərin maliyyələşdirilməsi üçün nəzərdə tutulur. Yüklənmə isə sığorta əməliyyatlarının aparılması xərclərini, inzibati xərcləri, risklərin qarşısının alınmasına yönələn vəsaitləri və tarif mənfəətini əhatə edir. Bu baxımdan tarif sadəcə faiz göstəricisi deyil, riskin riyazi-statistik qiymətləndirilməsinin nəticəsidir. Azərbaycan Respublikasında aktuar hesablamalar üzrə metodoloji yanaşmada sığorta tarifi aşağıdakı formada göstərilir [1]:

$$B = \frac{N}{1 - f}$$

Burada:  $B$  — sığorta tarifi,  $N$  — xalis sığorta tarifi,  $f$  — yüklənmə səviyyəsidir. Xalis sığorta tarifi hesablanması zamanı isə ümumi zərərin riyazi gözləməsi və təsadüfi yayınması nəzərə alınır. Bu yanaşma belə ifadə oluna bilər:

$$N = \frac{M[X] + z_{\gamma} \sqrt{D[X]}}{n \cdot S}$$

Burada:  $M[X]$  — ümumi zərərin riyazi gözləməsi,  $D[X]$  — ümumi zərərin dispersiyası,  $z_{\gamma}$  — seçilmiş təminat ehtimalına uyğun əmsal,  $n$  — sığortalanan işçilərin sayı,  $S$  — hər bir işçi üzrə sığorta təminatı bazasıdır. Bu düstur göstərir ki, tarif yalnız orta zərəərə görə deyil, həm də zərərin dəyişkənliyinə görə hesablanmalıdır. Çünki istehsalat qəzaları hər il eyni sayda və eyni məbləğdə baş vermir. Bir il zərər az ola bilər, digər il isə bir neçə ağır hadisə ümumi ödənişləri kəskin artırır. Buna görə də tarif hesablanarkən risk üstəliyinin əlavə edilməsi vacibdir [1].

Nümunə olaraq orta riskli istehsalat müəssisəsi üzrə şərti aktuar hesablama aparırıq. Fərz edək ki, müəssisədə 1000 işçi çalışır və hər bir işçi üzrə orta sığorta təminatı bazası 15 000 manatdır. Bu halda ümumi sığorta təminatı bazası  $n \cdot S = 1000 \times 15000 = 15000000$  olacaq. Yəni portfel üzrə ümumi baza 15 milyon manat təşkil edir. Son üç il üzrə istehsalat hadisələri və peşə xəstəlikləri ilə bağlı sığorta ödənişləri aşağıdakı kimi olmuşdur:

| İl      | Ümumi zərər, manat |
|---------|--------------------|
| 1-ci il | 140 000            |
| 2-ci il | 210 000            |
| 3-cü il | 170 000            |

Bu məlumatlara əsasən ümumi zərərin orta qiyməti, yəni riyazi gözləməsi belə hesablanır:

$$M[X] = \frac{140000 + 210000 + 170000}{3}$$

$$M[X] = 173333$$

Deməli, müəssisə üzrə gözlənilən illik zərər təxminən 173 333 manatdır. İndi



zərərlərin dəyişkənliyini nəzərə almaq üçün standart kənarlaşmanı hesablayaq. Üçillik məlumat əsasında standart kənarlaşma təxminən belə alınır:

$$\sqrt{D[X]} \approx 35119$$

Təminat ehtimalını 95 faiz götürək. Bu halda cədvəl üzrə uyğun əmsal:

$$z_\gamma = 1.645$$

olacaq. Risk üstəliyi:

$$1.645 \times 35119 = 57771$$

manat təşkil edir.

Beləliklə, xalis tarif üçün nəzərə alınan ümumi məbləğ:

$$M[X] + z_\gamma \sqrt{D[X]} = 173333 + 57771 = 231104$$

manat olacaq. Xalis sığorta tarifi:

$$N = \frac{231104}{15000000}$$
$$N = 0.0154$$

faizlə ifadədə isə:

$$N = 1.54\%$$

Əgər sığortaçının yüklənmə səviyyəsi 20 faiz qəbul edilərsə, ümumi sığorta tarifi belə hesablanacaq:

$$B = \frac{0.0154}{1 - 0.20}$$
$$B = 0.01925$$

Yəni yekun tarif:  $B = 1.93\%$  olacaq.

Bu nəticəyə əsasən həmin müəssisə üzrə illik sığorta haqqı belə hesablanır:

$$15000000 \times 1.93\% = 289500$$

Deməli, nümunə portfel üzrə illik sığorta haqqı təxminən 289 500 manat təşkil edir. Bir işçiyə düşən orta illik sığorta haqqı isə:

$$\frac{289500}{1000} = 289.5$$

yəni təxminən 290 manat olacaq.

Bu sadə nümunə göstərir ki, istehsalat riskləri üzrə tariflərin hesablanması üç əsas göstərici xüsusi əhəmiyyət daşıyır: hadisələrin tezliyi, zərərin ağırlığı və zərərlərin illər üzrə dəyişkənliyi. Əgər müəssisədə işçi sayı çox olsa da, hadisələrin sayı azdırsa, tarif nisbətən aşağı ola bilər. Əksinə, azsaylı işçi ilə fəaliyyət göstərən, lakin ağır riskli sahədə çalışan müəssisədə tarif daha yüksək hesablanmalıdır.

Azərbaycan təcrübəsində də tariflərin daha ədalətli və dayanıqlı olması üçün risk təsnifatı mühüm rol oynayır. Lakin yalnız sahə üzrə ümumi risk dərəcəsinə nəzərə almaq kifayət etmir. Eyni sahədə fəaliyyət göstərən iki müəssisə-

nin əmək təhlükəsizliyi səviyyəsi fərqli ola bilər. Məsələn, bir tikinti şirkətində əmək mühafizəsi qaydalarına ciddi əməl olunur, işçilər mütəmadi təlim keçirlər və qoruyucu vasitələrdən istifadə edilir. Digər şirkətdə isə bu tədbirlər formal xarakter daşıyır. Hər iki müəssisəyə eyni tarifi tətbiq edilməsi aktuar baxımdan tam ədalətli deyil. Bu səbəbdən tariflərin təkmilləşdirilməsi üçün aşağıdakı model təklif oluna bilər [3]:

$$T_i = B \times K_s \times K_z \times K_t$$

Burada:  $T_i$  — konkret müəssisə üçün tətbiq edilən yekun tarif,  $B$  — baza tarif,  $K_s$  — sahə risk əmsali,  $K_z$  — müəssisənin əvvəlki illər üzrə zərərlik əmsali,  $K_t$  — əmək təhlükəsizliyi və profilaktika tədbirləri üzrə əmsaldır.

Aparılan nümunəvi hesablamadan görünür ki, istehsalat riskləri üzrə sığorta tarifi formalaşması gözlənilən zərər, risk üstəliyi və yüklənmə komponentlərindən asılıdır. Hesablamada orta illik zərər 173 333 manat, risk üstəliyi 57 771 manat, xalis tarif 1,54 faiz, yekun tarif isə 1,93 faiz alınmışdır. Bu nəticə göstərir ki, tarifi aktuar əsaslarla müəyyən edilməsi sığorta sisteminin maliyyə dayanıqlığı üçün zəruridir. Tədqiqatın nəticəsi olaraq qeyd etmək olar ki, işçilərin istehsalatda bədbəxt hadisələrdən və peşə xəstəliklərindən sığortası üzrə tariflərin hesablanması aktuar riyaziyyatın praktik tətbiq sahələrindən biridir. Bu sahədə tarifi düzgün hesablanması üçün yalnız hüquqi norma kifayət deyil. Statistik məlumat bazası, zərər tezliyi, zərər ağırlığı, risk sinifləri, yüklənmə səviyyəsi və təminat ehtimalı birlikdə qiymətləndirilməlidir.

### **Ədəbiyyat**

1. Aktuar hesablamaların aparılmasına dair Təlimat, Azərbaycan Respublikası Maliyyə Nazirliyinin Kollegiyasının 27 mart 2014-cü il tarixli Q-08 nömrəli Qərarı ilə təsdiq edilmişdir.
2. Dericioğlu N.T. İş kazası və meslek hastalıkları sigortası prim hesaplamları, yüksək lisans tezi, Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri.
3. Musayev N.Ə. Sığorta tariflərinin qurulması metodikası və onun bazar şəraitində təkmilləşdirilməsi yolları, magistr dissertasiyası, Bakı, UNEC.

## **İSTEHSALATDA SIĞORTA TARİFLƏRİNİN DİFERENSİALLAŞDIRILMASININ AKTUAR MODELƏRİ**

**Baxşiyeva Aygün Zeynal qızı**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*Aygunbaxsiyeva0@gmail.com*

**Xülasə:** *Bu tezisdə istehsalatda bədbəxt hadisələr və peşə xəstəlikləri üzrə sığorta tariflərinin diferensiallaşdırılması üçün aktuar modellər geniş şəkildə tədqiq edilir. Mövcud tarif sistemlərinin çatışmazlıqları araşdırılır, risk amillərinin tarifə təsiri təhlil olunur və fərdiləşdirilmiş tarif modelinin tətbiqi əsaslandırılır. Aparılan təhlillər göstərir ki, risk əsaslı yanaşma tariflərin daha dəqiq və ədalətli müəyyən edilməsinə imkan yaradır.*

**Açar sözlər:** *sığorta tarifi, risk modelləri, diferensiallaşdırma, aktuar analiz, istehsalat riski*

İstehsalatda bədbəxt hadisələr və peşə xəstəlikləri müasir iqtisadi sistemdə ciddi risk mənbələrindən biridir. Bu risklər həm işçilərin sağlamlığına, həm də müəssisələrin maliyyə sabitliyinə təsir göstərir. Sığorta sistemi bu risklərin kompensasiya olunmasında əsas rol oynayır. Lakin mövcud tarif sistemlərində vahid yanaşmanın tətbiqi bəzən real risk səviyyəsini tam əks etdirmir. Bu səbəbdən tariflərin diferensiallaşdırılması aktualıq kəsb edir[1].

Sığorta tarifləri aktuar riyaziyyat prinsiplərinə əsaslanaraq hesablanır. Tarifin əsas komponentləri xalis tarif və yüklənmədən ibarətdir. Xalis tarif gözlənilən zərəri əks etdirir, yüklənmə isə inzibati xərclər və mənfəəti əhatə edir. Zərərin həm orta qiyməti, həm də dəyişkənliyi nəzərə alınmalıdır[2].

Tarifin hesablanmasında aşağıdakı model istifadə olunur:

$$T = T_x + L.$$

Burada  $T_x$  gözlənilən zərər və risk üstəliyinə əsaslanır. Risk üstəliyi zərərin dəyişkənliyini nəzərə almaq üçün əlavə olunur. Bu yanaşma tariflərin daha dayanıqlı olmasına imkan verir[1].

Müasir yanaşmada tarif fərdi risk faktorlarına əsasən hesablanır. Bu faktorlar sahə riski, zərərliklik səviyyəsi və əmək təhlükəsizliyi göstəriciləridir. Hər bir müəssisə üçün ayrıca əmsallar tərtib olunur və bu da tarifin fərdiləşdirilməsinə imkan yaradır.

Aparılan nümunəvi hesablamalar göstərir ki, təhlükəsizlik tədbirlərinin gücləndirilməsi tariflərin azalmasına səbəb olur. Əksinə, yüksək zərərliklik səviyyəsi tariflərin artmasına gətirib çıxarır. Bu isə müəssisələri risklərin azaldılmasına təşviq edir[3].

Tədqiqat nəticəsində müəyyən edilmişdir ki, diferensiallaşdırılmış tarif modeli sığorta sisteminin daha effektiv fəaliyyət göstərməsinə imkan verir. Risk əsaslı yanaşma həm sığortaçı, həm də sığortalı üçün daha ədalətli nəticələr yaradır.

#### **Ədəbiyyat**

1. Azərbaycan Respublikası Maliyyə Nazirliyi – Aktuar hesablamalar üzrə metodik göstərişlər, 2014
2. Dericioğlu N.T. İş kazası və meslek hastalıkları sigortası
3. Musayev N.Ə. Sığorta tariflərinin qurulması metodikası

### **BƏRPA FUNKSİYASI VƏ ONUN ASİMPTOTİK XASSƏLƏRİ**

**Bayramova Leyla Sərvər qızı, Rəhimov Fəda Hənnan oğlu**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*leylabayramova016@gmail.com, ragimovf@rambler.ru*

**Xülasə:** Təqdim olunan işdə bərpa funksiyası və onun asimptotik xassələri öyrənilir.

**Açar sözlər:** bərpa prosesi, bərpa funksiyası.

Fərz edək ki,  $(\Omega, F, P)$  ehtimal fəzasında asılı olmayan və eyni paylanmaya malik  $\xi_n$ ,  $n \geq 1$  təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı verilmişdir.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad n \geq 1$$

cəmlər ardıcılığına (təsadüfi dolaşmaya) baxaq. Bu ardıcılığın köməyi ilə aşağıdakı bərpa prosesini təyin edək.

$$\eta(t) = \max \{k : S_k \leq t\}, \quad t \geq 0$$

$\eta(t)$ ,  $t \geq 0$  prosesi xətti bərpa prosesi adlanır. Bu proses  $t$  zaman ərzində bərpaların sayını ifadə edir.

$U(t) = E\eta(t)$  - riyazi gözləməsinə bərpa funksiyası deyilir. Biz fərz edəcəyik ki,

$$0 < \mu = E\xi_1 < \infty.$$

Onda  $U(t)$ ,  $t \geq 0$  funksiyası bərpa funksiyası korrekt təyin olunur.

Təqdim olunan işdə bərpa funksiyasının asimptotik xassələri öyrənilir.

Xüsusi halda, isbat edilir ki,

$$\frac{\eta(t)}{t} \xrightarrow{s.y} \frac{1}{\mu}, \quad t \rightarrow \infty$$
$$\frac{H(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu}, \quad t \rightarrow \infty$$

Burada  $\xrightarrow{s.y}$  sanki, yəqin yığılmanı ifadə edir.

Bundan əlavə, işdə bərpa prosesinin lokal və integral limit teoremləri isbat edilir ([1], [2]).

### Ədəbiyyat

1. M.Woodroffe. Nonlinear renewal theory in sequential analysis. SIAM, Philadelphia: 1982.
2. A.Gut. Stopped random walks. Limit theorems and applications, Springer. New York: 1988.

## TƏSADÜFİ DOLAŞMA VƏ ONUN XƏTTİ SƏRHƏD FUNKSIONALLARININ ASİMPTOTİK XASSƏLƏRİ

**Bayramova Leyla Sərvər qızı, Rəhimov Fəda Hənnan oğlu**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

leylabayramova016@gmail.com, ragimovf@rambler.ru

**Xülasə:** Təqdim olunan işdə təsadüfi dolaşma və onun xətti sərhəd funksional-  
larının asimptotik xassələri öyrənilmişdir.

**Açar sözlər:** təsadüfi dolaşma, sərhəd funksionalları.

Fərz edək ki,  $(\Omega, F, P)$  ehtimal fəzasında asılı olmayan və eyni paylan-  
maya malik  $\xi_n$ ,  $n \geq 1$  təsadüfi kəmiyyətlər ardıcılığı verilmişdir.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad n \geq 1$$

işarə edək.

$S_n$ ,  $n \geq 1$  cəmlər ardıcılığı təsadüfi dolaşma adlanır. Təsadüfi dolaşmalar  
sinfi diskret parametrlili təsadüfi proseslər nəzəriyyəsində mühüm rol oynayır  
və geniş tətbiq sahələrinə malikdir.

Təsadüfi proseslər üçün sərhəd məsələləri nəzəriyyəsində  $S_n$ ,  $n \geq 1$   
təsadüfi dolaşmaları mühüm rol oynayır. Belə ki, təsadüfi dolaşmaların müəy-  
yən xətti və qeyri-xətti sərhəddi kəsməsi ilə bağlı sərhəd məsələləri mühüm  
tətbiqi əhəmiyyətə malikdir.

Təsadüfi dolaşmanın sərhəddi kəsən trayektoriyalarından asılı olan  
funksionallar xətti sərhəd funksionalları adlanır.

Təqdim olunan işdə

$$\nu(t) = \inf \{n \geq 1: S_n > t\}, \quad t \geq 0$$
$$R_t = S_{\nu(t)} - t$$

Xətti sərhəd funksionallarının asimptotik xassələri öyrənilir.  $N(t)$  xətti sərhəd funksionalı təsadüfi dolaşmanın  $t$  səviyyəsini (xətti sərhəddini)

1-ci dəfə kəsmə anını təsvir edir.

$R_t$  xətti sərhəd funksionalı isə təsadüfi dolaşmanın ekscessası adlanır.

Bu xətti sərhəd funksionalları ehtimal nəzəriyyəsinin müxtəlif tətbiq sahələrində meydana çıxır. Məsələn,  $v(t)$ ,  $t \geq 0$  1-ci dəfə kəsmə anlar ailəsi  $S_n$ ,  $n \geq 0$ , təsadüfi dolaşmanın köməyilə verilən bərpa prosesini tədqiq etməyə imkan verir.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$v(t) + 1 = \max\{n \geq 1, S_n \leq t\} = \eta(t)$  kəmiyyəti bərpa prosesi əmələ gətirir.

Təqdim olunan işdə  $v(t)$  və  $R(t)$  xətti sərhəd funksionallarının asimptotik xassələri öyrənilir. Xüsusi halda, isbat olunur ki, əgər

$$0 < \mu = E\xi_1 < \infty$$

olarsa, onda

$$\frac{v(t)}{t} \xrightarrow{s.y.} \frac{1}{\mu}, \quad t \rightarrow \infty$$

Burada  $\xrightarrow{s.y.}$  işarəsi sanki, yəqin yığılmanı ifadə edir.

Bundan əlavə, işdə xətti sərhəd funksionalları üçün böyük ədədlər qanunu və mərkəzi limit teoremi isbat edilir. ([1], [2])

### **Ədəbiyyat**

1. M.Woodroffe. Nonlinear renewal theory in sequential analysis. SIAM, Philadelphia: 1982.
2. A.Gut. Stopped random walks. Limit theorems and applications, Springer. New York: 1988.

## **ATMOSFERİN ÇİRKƏNMƏSİ DİNAMİKASININ RİYAZİ MODELİNİN QURULMASI VƏ SONLU FƏRQLƏR ÜSULU İLƏ ƏDƏDİ HƏLLİ**

**Cəbrayilov Şamo İsa x oğlu, Ələsgərov Hikmət Mübariz oğlu**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*(BDU, Mexanika-riyaziyyat fakültəsi)*

*elesgerovhi04@gmail.com*

**Xülasə:** İşdə atmosferin çirklənməsi dinamikasının riyazi modelinin qurulması və model məsələnin sonlu fərqlər üsulu ilə ədədi həllinə baxılır.

**Açar sözlər:** Riyazi model, sonlu fərqlər, atmosfer.

Atmosferin çirklənməsi dinamikasının riyazi modelinin qurulması üçün aşağıdakı tənlikdən istifadə olunur [1] :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \varphi + \frac{\partial v}{\partial y} \varphi + \bar{\sigma} \varphi = \mu \Delta \varphi + \sum_{i=1}^N q_i(t) \delta(r - r_i). \quad (1)$$

Burada  $u, v$  – hava axınının sürət vektorunun elementləridir,  $r_i$  – çirklənmə başverən nöqtənin koordinatları,  $r_i = (x_i, y_i)$ ,  $\varphi$  – zəhərli qazın orta toplum qiyməti,  $\mu$  – atmosfer diffuziyasının əmsalı,  $\bar{\sigma}$  – yağışların yağması hesabına çirklənmənin dəyişməsinə nəzərə alan əmsal,  $q_i$  – zəhərli qazların emissiyasının orta qiyməti,  $\delta(x - x_i), \delta(y - y_i)$  – Dirakın delta funksiyası,  $x_i, y_i$  – emissiyanın mənbəyinin koordinatları,  $t$  – zamandır.

Məsələnin ədədi həlli üçün qeyri-aşkar fərq sxemi tətbiq olunur. Hesablama müntəzəm fərq şəbəkəsində aparılır [2]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^n}{\Delta t} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u \varphi}{\partial x} = \frac{\partial u^+ \varphi}{\partial x} + \frac{\partial u^- \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial v \varphi}{\partial y} = \frac{\partial v^+ \varphi}{\partial y} + \frac{\partial v^- \varphi}{\partial y} \end{cases} \quad (3)$$

burada

$$u^+ = \frac{u+|u|}{2}; u^- = \frac{u-|u|}{2}; v^+ = \frac{v+|v|}{2}; v^- = \frac{v-|v|}{2}.$$

Törəmələri bölünən fərqlərlə approksimasiya edək:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^+ \varphi}{\partial x} &\approx \frac{u_{i+1,j}^+ \varphi_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^+ \varphi_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} & L_x^+ \varphi^{n+1} \\ \frac{\partial u^- \varphi}{\partial x} &\approx \frac{u_{i+1,j}^- \varphi_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^- \varphi_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} & L_x^- \varphi^{n+1} \\ \frac{\partial v^+ \varphi}{\partial y} &\approx \frac{v_{i,j+1}^+ \varphi_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^+ \varphi_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} & L_y^+ \varphi^{n+1} \\ \frac{\partial v^- \varphi}{\partial y} &\approx \frac{v_{i,j+1}^- \varphi_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j}^- \varphi_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} & L_y^- \varphi^{n+1}. \end{aligned}$$

İkinci tərtib törəmələri aşağıdakı kimi approksimasiya edirik:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \approx \tilde{\mu}_x \frac{\varphi_{i+1,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n+1}}{\Delta x^2} - \tilde{\mu}_x \frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} M_{xx}^- \varphi^{n+1} + M_{xx}^+ \varphi^{n+1} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \approx \tilde{\mu}_y \frac{\varphi_{i,j+1}^{n+1} - \varphi_{i,j}^{n+1}}{\Delta y^2} - \tilde{\mu}_y \frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} M_{yy}^- \varphi^{n+1} + M_{yy}^+ \varphi^{n+1} \end{cases} \quad (5)$$

Bunları nəzərə alaraq (1) tənliyi üçün fərq tənliyini aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$\frac{\varphi_{i,j}^{n+1} - \varphi_{i,j}^n}{\Delta t} + L_x^+ \varphi^{n+1} + L_x^- \varphi^{n+1} + L_y^+ \varphi^{n+1} + L_y^- \varphi^{n+1} + \sigma \varphi_{i,j}^{n+1} = \\ = (M_{xx}^+ \varphi^{n+1} + M_{xx}^- \varphi^{n+1} M_{yy}^+ \varphi^{n+1} + M_{yy}^- \varphi^{n+1}) + q_{i,j} \delta_{i,j}. \quad (6)$$

Burada  $L_x^+$ ,  $L_x^-$ ,  $L_y^+$ ,  $L_y^-$ ,  $M_{xx}^+$ ,  $M_{xx}^-$ ,  $M_{yy}^+$ ,  $M_{yy}^-$  - fərqli operatorlarının şərti işarələridir.

### Ədəbiyyat

1. А.В.Зберовский. Математическое моделирование загрязнения атмосферы при аварийном выбросе химически опасного вещества. Днепропетровский технологический университет, 2012, с. 305–309.
2. Г.И.Марчук. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М., Наука, 1982, 320 с.

## MAŞIN TƏLİMİ ÜSULLARINDAN İSTİFADƏ ETMƏKLƏ İQLİM DƏYİŞİKLİKLƏRİNİN ANALİZ EDİLMƏSİ VƏ PROQNOZLAŞDIRILMASI

**Cəbrayilov Şamo İsa x oğlu, Ələsgərov Hikmət Mübariz oğlu**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*(BDU, Mexanika-riyaziyyat fakültəsi)*

*elesgerovhi04@gmail.com*

**Xülasə:** İşdə maşın təlimi üsullarından istifadə etməklə iqlim dəyişikliklərinin analizi və proqnozlaşdırılması araşdırılır.

**Açar sözlər:** Maşın təlimi, iqlim dəyişiklikləri, neyron şəbəkə

Maşın təliminin müxtəlif alqoritmlərini tətbiq etməklə iqlim dəyişikliklərini analiz edirik .

Neyron Şəbəkə Modelləri. Temperatur trendlərinin öyrənilməsi müxtəlif arxitekturalardan istifadə edərək neyron şəbəkələrinin incəliklərini araşdırdı. Xüsusilə, nüansları ələ keçirmək üçün çoxsaylı təbəqələri əhatə edən tam bağlı neyron şəbəkələrinin strateji yerləşdirilməsi araşdırıldı [1]. Bundan əlavə, məlumatlara xas olan zaman asılılıqlarını nəzərə almaq üçün təkrarlanan neyron şəbəkələri istifadə edildi və bu da modelin zaman həssaslığını artırdı.

Qradyent gücləndirmə Metodları. Modellərin proqnozlaşdırma imkanları qabaqcıl qradyent gücləndirmə metodlarından istifadə etməklə təkmilləşdirildi. XGBoost və CatBoost kimi tanınmış kitabxanalar, xüsusilə dəqiq temperatur proqnozuna vurğu edərək, reqressiya tapşırıqları üçün modelləri optimal-



laşdırmaq üçün istifadə edildi.

Əsas maşın öyrənmə alqoritmləri. Neyron şəbəkələrinin və qradient gücləndirməsinin mürəkkəbliyindən əlavə, fundamental alqoritmlər müqayisəli qiymətləndirmə üçün baza modelləri kimi strateji olaraq daxil edildi. Xətti reqressiya, qərar ağacları və təsadüfi meşələr daha mürəkkəb analoqları ilə müqayisədə hərtərəfli qiymətləndirmə təmin edən etalon kimi xidmət etdi.

Daxili Metodoloji Bençmarkinq. Qabaqcıl tədqiqat strategiyasına proqnoz dəqiqliyi, müxtəlif zaman intervalları üzərində sabitlik və ortaya çıxan problemləri həll etmək üçün miqyaslanma kimi mürəkkəb meyarlar nəzərə alınmaqla müxtəlif maşın öyrənmə metodologiyalarının çarpaz müqayisəsi daxil idi. Bu müqayisəli təhlil prosesi bizə temperatur tendensiyalarını proqnozlaşdırmaq üçün optimal yanaşmaları müəyyən etməyə imkan verdi və hər bir metodologiyanın güclü və zəif tərəflərini hərtərəfli başa düşməyə imkan verdi.

Tədqiqatın səmərəliliyini artırmaq üçün nəticələrdə əhəmiyyətli irəliləyişlər əldə etmək məqsədi ilə kompakt, tam əlaqəli neyron şəbəkəsindən istifadə olunur. "SimpleRegressionNN" adlı hazırlanmış neyron şəbəkəsi iki tam əlaqəli təbəqədən ibarətdir: birinci təbəqə gizli təbəqədə bir giriş və dörd neyronu, ikinci təbəqədə isə dörd giriş və bir çıxış neyronu var. SimpleRegressionNN modeli PyTorch mühitində təlim keçib. PyTorch üzərində tam bağlı neyron şəbəkəsi Şəkil 1-də göstərilmişdir:

```
class SimpleRegressionNN(nn.Module):
    def __init__(self):
        super(SimpleRegressionNN, self).__init__()
        self.fc1 = nn.Linear(1, 4) # 1 вход, 4 нейрона на скрытом слое
        self.fc2 = nn.Linear(4, 1) # 4 входа, 1 выходной нейрон

    def forward(self, x):
        x = torch.relu(self.fc1(x))
        x = self.fc2(x)
        return x

# Параметры модели и оптимизатора
learning_rate = 0.01
model = SimpleRegressionNN()
criterion = nn.MSELoss()
optimizer = torch.optim.SGD(model.parameters(), lr=learning_rate)
```

Şəkil 1

Gələcək tədqiqatlar üçün perspektivli sahələrə çoxmodelləli ansambların tətbiqi, iqlim parametrləri dəstini genişləndirmək və modelləri mövsümi dəyişikliklərə uyğunlaşdırmaq daxildir. Proqnozların məkan həllini artırmaq üçün peyk və geoinformasiya məlumatlarını integrasiya etmək də mümkündür. Tədqiqatın praktik əhəmiyyəti, əldə edilən modellərdən ekspedisiyalar və logistika marşrutları planlaşdırarkən iqlim şəraitini proqnozlaşdırmaq üçün, eləcə də ətraf mühit dəyişikliyi qarşısında risklərin qiymətləndirilməsi üçün uzunmüddətli iqlim modelləşdirməsində istifadə etmək imkanındadır [2]. Bu tədqiqat, modellərin dəqiqliyinə təsir göstərə biləcək digər iqlim parametrlərini (yağıntı, küləyin sürəti və s.) nəzərə almadan yalnız temperatur məlumatlarından istifadə etməklə məhdudlaşır. Modellər mövsümi dəyişiklikləri nəzərə almır, çünki təhlil illik orta göstəricilərə əsasən aparılıb.

### **Ədəbiyyat**

1. Ерофеева В. В., Жукова З. С., Иевлев О. П., Тимофеев-Каракозов А. А. Анализ и прогнозирование климатических изменений с использованием методов машинного обучения. Международный научно-исследовательский журнал ▪ № 7 (157), 2025, 7 с.
2. Жукова Ж.С. Использование нейронных сетей для моделирования климатических изменений / Ж.С. Жукова, В.В. Ерофеева, А.А. Тимофеев-Каракозов [и др.] // Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета. 2024, Т. 24, № 4, с. 183–188.

## **İNSAN-SÜNİ İNTELLEKT ƏMƏKDAŞLIĞI**

**Dadaşova İradə Balarza qızı**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*irada-dadashova@bsu.edu.az*

**Xülasə:** *İşdə insan və süni intellekt sistemləri arasında əməkdaşlığın müasir yanaşmaları, tətbiq sahələri, konseptual əsasları, üstünlükləri, riskləri və etik məsələləri təhlil edilir və araşdırılır. Həmçinin təhsil, səhiyyə, sənaye, kibertəhlükəsizlik və elmi tədqiqatlar sahəsində real tətbiq nümunələri təqdim olunur. Tədqiqat nəticələri göstərir ki, insan-süni intellekt əməkdaşlığı məhsuldarlığın artmasına, qərarların daha dəqiq verilməsinə və innovativ həllərin formalaşmasına imkan yaradır. Bununla yanaşı, etibarlılıq, məsuliyyət bölgüsü və verilənlərin təhlükəsizliyi kimi problemlər də xüsusi diqqət tələb edir. İşdə gələcək perspektivlər və hibrid intellekt modellərinin inkişaf istiqamətləri müəyyən edilmişdir.*

**Açar sözlər:** *süni intellekt, insan-süni intellekt əməkdaşlığı, hibrid intellekt, qərarvermə, avtomatlaşdırma, etik süni intellekt.*

XXI əsrin texnoloji inqilabının ən mühüm komponentlərindən biri süni intellekt (Sİ) sistemlərinin sürətli inkişafı və geniş tətbiqidir. Süni intellekt artıq insan potensialını artıran bir vasitəyə çevrilmişdir. Son illərdə süni intellektin sürətli inkişafı insanın qərarvermə proseslərində, yaradıcılıq fəaliyyətində və idarəetmə mexanizmlərində yeni əməkdaşlıq modellərinin formalaşmasına səbəb olmuşdur. Əvvəllər yalnız avtomatlaşdırma vasitəsi kimi istifadə edilən süni intellekt sistemləri bu gün artıq insanın tərəfdaşına çevrilmişdir. Bu dəyişiklik insan-süni intellekt əməkdaşlığı anlayışının formalaşmasına səbəb olmuşdur. İnsan-süni intellekt əməkdaşlığı müasir texnologiya inkişafının əsas istiqamətlərindən biridir. Bu əməkdaşlıq insanın yaradıcılıq və strateji düşünmə qabiliyyətini süni intellektin analitik gücü ilə birləşdirir [1]. Nəticədə daha effektiv qərarvermə, yüksək məhsuldarlıq və innovativ həllər əldə olunur. Bununla yanaşı etik məsələlər, məsuliyyət bölgüsü və təhlükəsizlik problemləri diqqətdə saxlanılmalıdır. Bu əməkdaşlıq modelində süni intellekt insanın qərarvermə prosesini dəstəkləyir, məlumatları analiz edir və alternativ həllər təqdim edir, insan isə strateji düşünmə, etik qərarlar və yaradıcılıq kimi funksiyaları yerinə yetirir.

İnsan-süni intellekt əməkdaşlığı hibrid intellekt [2] anlayışının əsasını təşkil edir. Hibrid intellekt insanın intuitiv və kontekstual düşünmə qabiliyyətini [3] süni intellektin sürətli hesablama və böyük verilənlərin analizi imkanları ilə birləşdirir. Bu yanaşma xüsusilə mürəkkəb problemlərin həllində daha effektiv nəticələr əldə etməyə imkan yaradır. Gələcəkdə hibrid intellekt sistemləri insan fəaliyyətinin ayrılmaz hissəsinə çevriləcəkdir.

İşin məqsədi insan-süni intellekt əməkdaşlığının nəzəri əsaslarını, tətbiq sahələrini, üstünlüklərini və mövcud problemlərini araşdırmaqdan ibarətdir.

## **2. İnsan-süni intellekt əməkdaşlığının konseptual əsasları.**

İnsan-süni intellekt əməkdaşlığı iki əsas prinsipə əsaslanır: tamamlayıcılıq (complementarity), qarşılıqlı öyrənmə (mutual learning).

Tamamlayıcılıq prinsipinə görə insan və süni intellekt fərqli güclü tərəflərə malikdir. Süni intellekt böyük həcmdə verilənləri sürətlə analiz edə bilir və proqnozlar verir. İnsan isə kontekstual düşünmə, etik qərarvermə və yaradıcılıq qabiliyyətinə malikdir. Bu iki qarşılıqlı birləşmə daha optimal nəticə verir.

Qarşılıqlı öyrənmə isə insan və süni intellektin bir-birindən öyrənməsini nəzərdə tutur. İnsan süni intellekt sistemlərini təlim edir, süni intellekt isə istifadəçi davranışlarını analiz edərək daha uyğun nəticələr təqdim edir.

İnsan-süni intellekt əməkdaşlığının əsas modelləri aşağıdakılardır:

1. İnsan dövrü model (Human-in the loop model). Bu modeldə insan qərarvermə prosesində əsas rol oynayır və süni intellekt tövsiyələr verir.

2. Sİ dövrü model (AI-in the loop model). Bu halda süni intellekt əsas qərarları verir, insan isə nəzarətçi rolunu yerinə yetirir.

3. İnsan-süni intellekt komandası modeli (Human-AI teaming model). İnsan və süni intellekt paralel şəkildə işləyərək ortaq qərar verir.

3. İnsan-süni intellekt əməkdaşlığının tətbiq sahələri

Süni intellektin sürətli inkişafı insan-süni intellekt əməkdaşlığının tətbiq sahələrində hər iki tərəfin birgə yüksək nəticə almasında böyük bir səbəb ola bilər.

**Təhsil sahəsi.** Təhsil sahəsində süni intellekt tələbələrin öyrənmə sürətini analiz edir və uyğun tədris materialları təqdim edir. Müəllim isə motivasiya, izah və metodiki rəhbərlik funksiyalarını yerinə yetirir.

Bu yanaşma fərdi öyrənmə trajektoriyasını formalaşdırır, bilik boşluqlarını müəyyən edir və qiymətləndirmə prosesini avtomatlaşdırır

**Səhiyyə sahəsi.** Səhiyyədə süni intellekt tibbi analizləri, xəstəliklərin erkən diaqnostikası və müalicə planlarının hazırlanmasında istifadə olunur. Həkim isə klinik qərarı verir və nəticələri qiymətləndirir. Bu əməkdaşlıq diaqnostik səhvlərin azalmasına səbəb olur.

**Sənaye və istehsalat.** Sənayedə insan-süni intellekt əməkdaşlığı ağıllı sistemlərinin əsasını təşkil edir. Süni intellekt sensor məlumatlarını analiz edir və avadanlıqların nasazlığını əvvəlcədən proqnozlaşdırır. İnsan isə qərar verir və prosesə nəzarət edir.

**Kibertəhlükəsizlik.** Kibertəhlükəsizlik sahəsində süni intellekt real vaxt rejimində hücumları aşkar edir. İnsan mütəxəssis isə təhlükənin səviyyəsini qiymətləndirir və müdaxilə strategiyasını müəyyən edir.

**Elmi tədqiqatlar.** Süni intellekt elmi tədqiqatlarda böyük verilənlərin analizini sürətləndirir. Tədqiqatçı isə nəticələri şərh edir və yeni hipotezlər irəli sürür.

4. İnsan-süni intellekt əməkdaşlığının üstünlükləri

İnsan-süni intellekt əməkdaşlığının üstünlükləri təşkilatların rəqabət qabiliyyətini artırır və yeni biznes modellərinin formalaşmasına səbəb olur. Bu üstünlüklər:

- qərarvermə dəqiqliyinin artması,
- məhsuldarlığın yüksəlməsi,
- insan səhvlərinin azalması,
- böyük verilənlərin effektiv analizi,
- innovativ həllərin yaranması,
- avtomatlaşdırma və yaradıcılığın balansı.

5. Risklər və etik məsələlər

İnsan-süni intellekt əməkdaşlığı ilə bağlı bəzi risklər mövcuddur:

1. Məsuliyyət bölgüsü problem. Qərar süni intellekt tərəfindən verildikdə məsuliyyətin kimə aid olduğu sual yaradır.

2. Etibarlılıq. Süni intellekt sistemlərinin səhv qərar verməsi ciddi nəticələrə səbəb ola bilər.

3. Məlumat təhlükəsizliyi. Böyük həcmdə məlumatların istifadəsi məxfilik risklərini artırır.

4. İnsan faktorunun azalması. Həddindən artıq avtomatlaşdırma insanın qərarvermə bacarıqlarının zəifləməsinə səbəb ola bilər.

Bu problemlərin həlli üçün süni intellektin aşağıdakı etik prinsipləri tətbiq olunmalıdır:

- şəffaflıq,
- izah edilə bilən Sİ,
- insan nəzarəti,
- məsuliyyətliklik,
- ədalətliklik.

#### 6. Gələcək perspektivlər

Gələcəkdə insan-süni intellekt əməkdaşlığının aşağıdakı istiqamətlərdə inkişafı gözlənilir:

- hibrid intellekt sistemlərinin geniş yayılması,
- izah edilə bilən Sİ modellərinin inkişafı,
- insan mərkəzli Sİ dizaynı,
- əmək bazarında yeni peşələrin yaranması,
- qərar dəstək sistemlərinin təkmilləşdirilməsi.

Bundan əlavə, süni intellekt sistemləri insanın emosional vəziyyətini analiz edə biləcək və daha adaptiv əməkdaşlıq modeli də formalaşmalıdır.

#### **Ədəbiyyat**

1. Artificial intelligence technology. Official Textbooks for Huawei ICT Academy, Huawei Technologies Co., Ltd. Springe, ISBN 978-981-19-2878-9 ISBN 978-981-19-2879-6 (eBook), 308p. 2023.
2. Dan Wu, Shaobo Liang, Human-AI Interaction and Collaboration. Cambridge: Cambridge University Press, ISBN:9781009587877, 15p. 2026.
3. La Torre, Cinzia Colapinto, Ilaria Durosini, and Stefano Triberti, Team Formation for Human-Artificial Intelligence Collaboration in the Workplace: A Goal Programming Model to Foster Organizational Change Davide, IEEE Transactions on Engineering Management, vol. 70, No. 5, MAY, 2023.

## MÜXTƏLİFLİKLƏRİN İNTERPRETASIYALAR QƏFƏSİNDƏ POST MÜXTƏLİFLİYİ

**Eyvazlı Aişə Səyavuş qızı , Məmmədov Oqtay Mübarək oğlu**

(BDU, Mexanika-riyaziyyat fakültəsi)

aiseyvazli@gmail.com, okmamedov@gmail.com

**Xülasə:** bu işdə Post müxtəlifliklərinin interpretasiyalar qəfəsində tutduğu yer müəyyən edilir.

**Açar sözlər:** müxtəliflik, post müxtəlifliyi, qəfəs, interpretasiyalar.

Universal cəbrdə bir müxtəlifliyin digərində interpretasiya olunması fundamental əhəmiyyət kəsb edir. Bu anlayış həm terminlər, həm də kateqorial funktorlar vasitəsilə ifadə oluna bilər:

**Tərif 1.** Tutaq ki,  $V$  və  $W$  iki müxtəliflikdir. Əgər müxtəlifliyinin hər bir  $f$  baza əməliyyatı üçün  $W$  müxtəlifliyinin dilində elə bir  $\alpha_f$  termini mövcuddursa ki,  $V$ -dəki bütün eyniliklər  $W$ -də bu terminlər vasitəsilə ödənilsin, onda deyilir ki,  $V$  müxtəlifliyi  $W$  müxtəlifliyində interpretasiya olunur və bu  $V \leq W$  kimi işarə edilir.

**Tərif 2.**  $V \leq W$  münasibəti o zaman doğrudur ki,  $W$  kateqoriyasından,  $V$  kateqoriyasına elə bir  $\Phi : W \rightarrow V$  "konkret" funktor mövcud olsun ki, o, universal çoxluqları qoruyan funktorlarla kommutativ olsun. Bu o deməkdir ki, hər bir  $B \in W$  cəbri üçün  $\Phi(B)$  cəbrinin universal çoxluğu  $B$ -nin universal çoxluğunun müəyyən bir qüvvəti ilə üst-üstə düşür.

İnterpretasiya münasibəti müxtəlifliklər çoxluğunda bir kvazinizam yaradır. Bu münasibətə görə yaranan ekvivalentlik sinifləri (interpretasiya tipləri) bir tam qəfəs təşkil edir. Bu qəfəsdə aşağıdakı mühüm xassələri qeyd etmək olar:

1. Supremum ( $\vee$ ): İki müxtəlifliyin interpretasiya tiplərinin supremumu onların sərbəst hasili vasitəsilə təyin olunur.

2. İnfimum ( $\wedge$ ): İki müxtəlifliyin interpretasiya tiplərinin infimumu isə onların birbaşa hasili vasitəsilə xarakterizə edilir. İxtiyari  $K$  müxtəlifliklər ailəsi üçün onların interpretasiya tiplərinin həm ən kiçik yuxarı sərhədi, həm də ən böyük aşağı sərhədi mövcuddur.

3. Müxtəlifliyin  $k$  dərəcəsi: İxtiyari  $V$  müxtəlifliyi üçün  $V \leq V^k$  münasibəti həmişə doğrudur, burada  $V^k$  müxtəlifliyin  $k$ -cı qüvvətini ifadə edir. Bu xassə interpretasiyalar qəfəsində zəncirvari strukturların öyrənilməsi üçün əsas təşkil edir.

İnterpretasiya prosesində fundamental əməliyyat  $V$ -nin əməliyyatlarının  $W$ -nin terminləri vasitəsilə ifadə olunmasıdır. Əgər  $\mathcal{F}_t$  cəbri əməliyyatdırsa, onun  $W$  müxtəlifliyindəki qarşılığı  $\alpha_t^u$  termini ilə təyin edilir. Bu terminlər

arasındakı eyniliklər müxtəlifliyin strukturunu qoruyur və interpretasiyanın riyazi dürüstlüyünü təmin edir.

Tutaq ki,  $A$  ixtiyari çoxluqdur. İxtiyari  $\lambda: A^m \rightarrow A^n$  inikası üçün  $\lambda_i$  ilə belə bir kompozisiyanı  $e_i^n \lambda: A^m \rightarrow A^n \rightarrow A$  işarə edək. Burada  $e_i^n$  adi proyeksiya inikasıdır. Tərfi verilməyən bütün anlayışların tərifini [3] kitabından tapmaq olar.

**Tərif.** [1] Post müxtəlifliyi  $\mathbb{M}(A)$ -nın  $n$  yerli  $F_\mu$  əməliyyatı var; burada  $\mu: A^n \rightarrow A$ ,  $n = 1, 2, \dots$  və bu müxtəliflik aşağıdakı eyniliklərlə təyin olunur:

$$F_{e_i^n}(x_1, \dots, x_n) = x_i$$

$$F_\mu(F_{\lambda_1}(x_1, \dots, x_m), \dots, F_{\lambda_n}(x_1, \dots, x_m)) = F_{\mu\lambda}(x_1, \dots, x_m),$$

Burada  $\mu, \lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  yuxarıda təyin olunub və  $n, m$  ixtiyari natural ədədlərdir.

[1] (Təklif 11-də) göstərilmişdir ki,  $A$  daşıyıcısı və  $\mathbb{M}$  müxtəlifliyindən olan Post müxtəlifliyi  $\mathbb{M}(A)$  - da interpretasiya olunur. Yəni  $\mathbb{M} \leq \mathbb{M}(A)$ .

Yuxarıdakı təklifdən  $A$  - nın yerinə çox zaman  $|A|$  - nın qüvvəti göstərilir və  $\mathbb{M}(A)$  - nın yerinə  $\mathbb{M}(k)$  yazılır. Burada  $|A| = k$ .

Nəzərə alaq ki, sonsuz halda Post müxtəliflikləri xətti nizanlanıb; yəni

$$\aleph_0 \leq k < \lambda \text{ üçün } \mathbb{M}_k < \mathbb{M}_\lambda \text{ və } 1 = \vee (\mathbb{M}(k): k - \text{ixtiyari kardinaldır}).$$

[1]-də göstərilmişdir ki, bütün Post müxtəliflikləri  $\mathbb{M}_k$  sonlu  $k$  - lar üçün müxtəlifliklərin interpretasiyalar qəfəsi  $L$  - də sonsuz  $\wedge$  - sadədir.

Xatırladaq ki,  $\mathcal{L}$  qəfəsinin  $a$  elementi  $\wedge$  - sadədir, əgər

$$\forall b, c \in L \quad b \wedge c \leq a \Rightarrow b \leq a \text{ və ya } c \leq a \quad \text{olarsa.}$$

Tam  $\mathcal{L}$  qəfəsinin  $a$  elementi sonsuz  $\wedge$  - sadədir, əgər

$$\forall b_i, i \in I \quad \wedge \{b_i | i \in I\} \leq a \Rightarrow \exists j \in I \quad b_j \leq a$$

Postun, Fosterin və başqalarının işlərindən məlumdur ki, (bax [2, əlavə 5]) əgər  $|A| = n < \omega_0$ , onda  $\text{Spec}(\mathbb{M}_k) = \{1, n, n^2, \dots\}$ .

**Lemma 1.** Əgər hər hansı bir  $\mathbb{M}$  müxtəlifliyinin  $k$  qüvvəli cəbri varsa, onda  $L_{int}$  - də  $\mathbb{M} \leq \mathbb{M}_k$ .

**Lemma 2.** Tutaq ki,  $\mathbb{M}_i, i \in I$  - müxtəliflikləri, ola bilsin ki, fərqli tipli olsunlar. Onda  $\mathcal{CL}(\mathbb{M}) \cong \Pi(\mathcal{CL}(\mathbb{M}_i) | i \in I)$ , burada  $\mathbb{M} = \Pi(\mathbb{M}_i | i \in I)$ .

**Teorem.** İxtiyari  $k$  kardinalı üçün  $\mathbb{M}_k$  müxtəlifliyi  $L_{int}$  qəfəsində sonsuz  $\wedge$ - sadə deyil.

### Ədəbiyyat

1. O. C. Garcia and W. Taylor. The lattice of interpretability types of varieties .- Amer. Math. Soc., Memoirs, №305, 1984., 125 pp.
2. G.Grätzer. Universal Algebra. 2nd ed. - Springer - Verlag, 1979., 581 pp.
3. R. Freese, R. McKenzie, G. McNulty, and W. Taylor. Algebras, Lattices, Varieties, Vol. 2. Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, California, USA, 2022.

## DÜZBUCAQLI OBLASTDA ORLIC-SOBOLEV FƏZALARINDA BİR QEYRİ-LOKAL MƏSƏLƏ HAQQINDA

**Əhmədov Hikmət İnşalla oğlu, Həsənov Sevindik Hüseyn oğlu**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

[hikmatahmadov@yahoo.com](mailto:hikmatahmadov@yahoo.com), [sevindikhesenov541@gmail.com](mailto:sevindikhesenov541@gmail.com)

**Xülasə:** işdə Orlic normasından yaradılmış. Sobolev fəzalarında düzbucaqlı oblastda Laplas tənliyi üçün qeyri-lokal məsələyə baxılmışdır. Tədqiq olunan məsələnin güclü həll anlayışı müəyyən edilir və Orlic-Sobolev fəzasının simmetrik fəza olması faktından istifadə edərək Boyd indeksləri müəyyənləşdirilir. Daha sonra Orlic-Sobolev fəzalarında məsələnin düzgün həll olunması göstərilir.

**Açar sözlər:** Orlic-Sobolev fəzaları, Laplas tənliyi, spektral məsələ, qeyri-lokal məsələ, güclü həll.

Təqdim olunan işdə aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxılır

$$\Delta u = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(x, h) = \psi(x), \quad x \in (0, 2\pi), \quad (2)$$

$$u(0, y) = u(2\pi, y), \quad u_x(0, y) = 0, \quad y \in (0, h), \quad (3)$$

burada  $u = u(x, y)$  - axtarılan funksiya,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  - məlum funksiyalardır.

$$D = \{(x, y); \quad 0 < x < 2\pi, \quad 0 < y < h\}.$$

(1)-(3) sərhəd məsələsinin Orlic-Sobolev fəzasında [1] güclü həlli anlayışı müəyyən edilir, sonra spektral metodun köməyi ilə onun düzgün həll edilməsi isbat olunur [2].

Furye üsulunun köməyi ilə baxılan məsələ aşağıdakı spektral məsələyə gətirilir:

$$y''(x) + \lambda^2 y(x) = 0, \quad x \in (0, 2\pi), \quad (4)$$

$$y(0) = y(2\pi) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad (5)$$

$\lambda_n = n$ ,  $n \in Z_+$  baxılan məsələnin məxsusi ədədləri,  $y_n(x) = \cos nx$ ,  $n \in Z_+$  uyğun məxsusi funksiyalardır.

**Teorem.** Fərz edək ki,  $\varphi(x), \psi(x) \in W_2^1(0, 2\pi)$  və  $\varphi(2\pi) - \varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ ,  $\psi(2\pi) - \psi(0) = \psi'(0)$  münasibətləri ödənilir. Onda (1)-(3) sərhəd məsələsinin  $W_2^1(D)$  də güclü həlli var.

### Ədəbiyyat

1. Bilalov B.T., Salmanov V.F., Haqhverdi T.M., On basicity of some trigonometric system in Banach functionspaces. Journal of Contemporary Applied Mathematics? 16(1), 2020, 94-109
2. Məmmədov Y.Ə., Əhmədov H.İ., Riyazi fizika tənlikləri – Bakı, 2013.-310 s.



## ÜÇ NÖQTƏLİ BİR SPEKTRAL MƏSƏLƏ ÜÇÜN AYRILIŞ DÜSTURU

**Əhmədov Saleh Zeyni oğlu, Xankişiyeva Aygül Xankişiyev qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

salehmedov0@gmail.com, aygulxankisiyeva02@gmail.com

**Xülasə:** *Baxılan spektral məsələnin klassik məsələdən fərqli cəhəti ondan ibarətdir ki, bu məsələnin sərhəd şərtlərində 3 nöqtədən söhbət gedir. İşdə spektral məsələnin məxsusi ədələri tapılmış, Qrin funksiyası qiymətləndirilmişdir. Əsas nəticə olaraq ayrılış teoremi isbat edilmişdir.*

**Açar sözlər:** *spektral məsələ, ayrılış teoremi, Qrin funksiyası, məxsusi ədəd, polyus*

İşdə aşağıdakı kimi spektral məsələyə baxılır

$$\ddot{v}(x, \lambda) - \lambda^2 v(x, \lambda) = f(x)$$

(1)

$$v(-l) - v(l) = 0$$

$$v(0) = 0$$

(2)

(1)-(2) məsələsinin məxsusi ədədlərini tapsaq,

$$\lambda_k = \frac{\pi k i}{l}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$G(x, \xi, \lambda)$  Qrin funksiyası üçün kompleks müstəvidə  $\lambda_k = \frac{\pi k i}{l}$ , məxsusi ədədlərindən kənarda aşağıdakı qiymətlənmənin doğru olduğunu göstərmək olar:

$$|G(x, \xi, \lambda)| \leq \frac{c}{|\lambda|}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty$$

Aparılan qiymətləndirmələr nəticəsində, qoyulmuş məsələnin requlyar olduğu müəyyən edilir.[2]

Aşağıdakı hökm doğrudur:

Tutaq ki,  $f(x)$  funksiyası  $[0, 1]$  parçasında kəsilməz funksiyadır və  $f(-l) = f(0) = f(l) = 0$  şərtləri ödənilir. Onda aşağıdakı teoremin doğruluğunu hökm etmək olar.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{c_k} \lambda^s d\lambda \int_{-l}^l G(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi = \\ & = -\sum_k \text{Res } \lambda^s \int_{-l}^l G(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi = \begin{cases} f(x), & s = 1 \\ 0, & s = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Burada,  $c_k$  qapalı konturu  $\lambda_k$  kökünü əhatə edən, daxilində yalnız bir kök saxlayan kiçik radiuslu çevrələrdir. Eyni zamanda, Spektral məsələnin məxsusi ədədləri sadə olduğundan,  $Res(\chi_{\lambda}) - \lambda_k$  çıxıqları da müvafiq sadə polyuslar üzrə müəyyən edilir[1].

### Ədəbiyyat

1. Расулов М.Л. Применение вычетного метода к решению задач дифференциальных уравнений. Баку: ЭЛМ, 1989, 328 с.20. Расулов М.Л. Исследование вычетного метода решения некоторых смешанных задач.... Матем. сб., 1952, т. 30, №3, с. 509–528.
2. Ahmedov S.Z., Gasimov R.A., Habibov V.M. Solution of the mixed problem for the non-homogeneous parabolic equation with time derivative in the boundary condition. Advances in Mathematical Models and Applications, 2025, Vol. 10, No. 1.

## İNTERVALLI BİR MƏHDUDİYYƏTLİ XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMA MƏSƏLƏSİNİN OPTİMİST VƏ PESSİMİST HƏLLƏRİNİN TAPILMASI.

Əhmədova Çiçək Fazil qızı

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

ehmedovacicek27@gmail.com

**Xülasə:** İlk hissədə, toplama və ikili əməliyyatların nəzəriyyəsi müzakirə olunur, ikinci hissədə isə müxtəlif optimal metodlar təqdim edilir. İşin sonunda, problem həllinə dair təklif olunan yanaşmalar yer alır.

**Açar sözlər:** Toplama nəzəriyyəsi, optimal həll metodları, ikili əməliyyatların analizi, tədqiqat işi, problemin həlli yanaşmaları.

Əmsalları intervallar olan aşağıdakı kimi xətti proqramlaşdırma məsələsinə baxaq.

$$\sum_{j=1}^n [\underline{c}_j, \bar{c}_j] x_j \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n [\underline{a}_j, \bar{a}_j] x_j \leq [\underline{b}, \bar{b}], \quad (2)$$

$$0 \leq x_j \leq d_j, \quad (j = \overline{1, n}). \quad (3)$$

Burada  $\underline{c}_j, \bar{c}_j, \underline{a}_j, \bar{a}_j, d_j, \underline{b} \text{ və } \bar{b}$   $(j = \overline{1, n})$  ədədləri verilmiş tam ədədlərdir. Bundan əlavə təbii olaraq qəbul edirik ki,

$$\underline{c}_j \leq \bar{c}_j, \quad \underline{a}_j \leq \bar{a}_j, \quad (j = \overline{1, n}) \text{ və } \underline{b} \leq \bar{b}$$

şərtləri ödənilir.

(1) – (3) məsələsinə intervallı bir məhdudiyyətli xətti proqramlaşdırma məsələsi deyilir. Bu məsələ [ 1 - 3 ] işlərində araşdırılmış və müəyyən mənalara daşıyan həll üsulları təklif olunmuşdur.

Bu işdə isə (1) – (3) məsələsinin aşağıda verilmiş bir iqtisadi mahiyyətinə əsasən ona uyğun optimist və pessimist adlandırılan iki adi xətti proqramlaşdırma məsələsi qurulur. Göstərilir ki, (1) – (3) məsələsinin istənilən həlli, o cümlədən optimal həlli, optimist və pessimist məsələlərin optimal həlləri arasındadır.

Tutaq ki, müəyyən bir müəsisədə  $n$  növ müxtəlif məhsullar istehsalı zamanı  $j - ci, (j = \overline{1, n})$  növ məhsulun bir vahidinin satış qiyməti ən azı  $\underline{c}_j$  və ən çoxu  $\bar{c}_j, (j = \overline{1, n})$  qədərdir. Lakin həmin  $j - ci, (j = \overline{1, n})$  məhsulun bir vahidinin istehsalına çəkilən xərc ən azı  $\underline{a}_j, (j = \overline{1, n})$ , ən çoxu isə  $\bar{a}_j, (j = \overline{1, n})$  qədərdir. Əlavə olaraq qəbul edək ki, bu məhsulların istehsalı üçün ən azı  $\underline{b}$  və ən çoxu isə  $\bar{b}$  miqdarda vəsait (resurs və s.) ayrıla bilər.

Bu zaman məsələ belə qoyulur: hansı məhsuldan hansı miqdarda istehsal etməli ki, onlara çəkilən ümumi xərc ayrılmış  $[\underline{b}, \bar{b}]$  intervalında yerləşsin və bu zaman maksimal gəlir əldə olunsun. Göründüyü kimi (1) – (3) modeli alınır.

Qeyd edək ki, (1) – (3) məsələsinin yuxarıdakı iqtisadi mahiyyətinə əsaslanaraq iki məsələ qurmuşuq. Bunlardan birincisinə optimist, ikincisinə isə pessimist məsələ demişik və bu məsələlər aşağıdakı kimidir.

Optimist məsələ:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \bar{c}_j x_j &\rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^n \underline{a}_j x_j &\leq \bar{b}, \\ 0 \leq x_j &\leq \bar{d}_j, (j = \overline{1, n}). \end{aligned}$$

Pessimist məsələ:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \underline{c}_j x_j &\rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^n \bar{a}_j x_j &\leq \underline{b}, \end{aligned}$$

$$0 \leq x_j \leq d_j, (j = \overline{1, n}).$$

Göründüyü kimi optimist məsələdə ən az xərc çəkməklə ən çox xeyr verən məhsullar içərisindən ümumi gəliri maksimal olanlarının istehsalı nəzərdə tutulur. Pessimist məsələdə isə böyük xərc tələb edən məhsullardan az gəlir verənlərdən ümumi gəliri maksimal olanının istehsalı nəzərdə tutulur.

Bu anlayışlardan aydın görünür ki, (1) – (3) məsələsinin istənilən həlli, o cümlədən optimal həlli, optimist və pessimist məsələlərin həlləri arasında olacaq. Optimist və pessimist məsələlər isə sadə xətti proqramlaşdırma məsələləridir. Onları isə asanlıqla həll etmək olar.

### Ədəbiyyat

1. Ватолин А.А. О задачах линейного программирования с интервальными коэффициентами. ЖВМ и МФ, 2014, Т. 24, N11, ст. 1629 – 1638.
2. Hladik M. On strong optimality of interval linear programming. J. Optim. Lett., 2017, 11(7), pp.1459 – 1467.
3. Мамедов К. Ш., Мамедова А. Г. Понятия субоптимистического и субпессимистического решений и построения их в интервальной задаче Булевого программирования. Ж. Радиоэлектроника, Информатика, Управление. 2016, N3(38) ст. 99 – 108.

## VERİLƏNLƏRİ İNTERVALLARDA OLAN XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMA MƏSƏLƏSİNİN OPTİMİST VƏ PESSİMİST HƏLLƏRİNİN TAPILMASI

**Əhmədova Çiçək Fazil qızı.**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)  
ehmedovacicek27@gmail.com

**Xülasə:** Mətnə dövrü və ya döngüvi statistik metodların tətbiqi müzakirə edilir. Burada, verilən məlumatların analizi üçün istifadə olunan formul və yanaşmalar təqdim olunur. Statistikaların düzgün tətbiqi və interpretasiyası, nəticələrin etibarlılığını artırır.

**Açar sözlər:** Dövrü statistik metodlar, verilən məlumatların analizi, statistikaların düzgün tətbiqi, nəticələrin etibarlılığı, formul və yanaşmalar, interpretasiya prosesi.

Aşağıdakı kimi intervallı xətti proqramlaşdırma məsələsinə baxaq.

$$\sum_{j=1}^n [\underline{c}_j, \bar{c}_j] x_j \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n [\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}] x_j \leq [\underline{b}_i, \bar{b}_i], (i = \overline{1, m}), \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1, n}). \quad (3)$$

Burada

$$\underline{c}_j \leq \bar{c}_j, \quad \underline{a}_{ij} \leq \bar{a}_{ij}, \quad \underline{b}_i \leq \bar{b}_i, (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n})$$

olmaqla verilmiş sabit ədədlərdir.

Qeyd edək ki, (1) – (3) məsələsi [1-4] işlərində tədqiq olunmuş və müxtəlif təqribi həll üsulları işlənmişdir. Çünki bu məsələnin optimal həlli anlayışı qeyri – müəyyəndir. Ona görə ki, verilmiş müxtəlif ölçülü intervallar cəminin müəyyən intervaldan böyük olmaması və bu zaman başqa intervallar cəminin maksimal olması anlayışları yoxdur.

Biz (1) – (3) məsələsinin bir iqtisadi interpretasiyasına əsaslanaraq iki müxtəlif məsələ quracağıq. Bu məsələlərdən biri optimist strategiya, digəri isə pessimist strategiyaya əsaslanır. Optimist strategiyanın mənası “əlverişli variantlar içərisindən ən yaxşısını” seçməkdir. Pessimist strategiya isə “əlverişli olmayan variantlardan ən yaxşısını” seçməyə əsaslanır. Ümumi sözlə desək bu strategiyalar “yaxşılardan içindən ən yaxşısını” və “pislərin içərisindən ən yaxşısını” seçmək mənalərini daşıyır.

(1) – (3) məsələsinin bir iqtisadi interpretasiyasını verək. Tutaq ki, hər hansı bir istehsal sahəsində  $n$  – növ müxtəlif məhsul istehsal olunması planlaşdırılır. Belə ki,  $j - ci$ , ( $j = \overline{1, n}$ ) məhsulun bir vahidinin satış qiyməti ən azı  $\underline{c}_j$ , ( $j = \overline{1, n}$ ) və ən çoxu  $\bar{c}_j$ , ( $j = \overline{1, n}$ ) miqdardadır.

Bundan əlavə fərz edək ki, həmin  $j - ci$ , ( $j = \overline{1, n}$ ) məhsulun bir vahidinin istehsalına ən azı  $\underline{a}_{ij}$ , ( $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ ) və ən çoxu  $\bar{a}_{ij}$ , ( $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ ) miqdarda vəsait (resurs və s.) sərf oluna bilər. Bu zaman ayrılmış ümumi limit vəsaitin miqdarı isə ən azı  $\underline{b}_i$ , ( $i = \overline{1, m}$ ) və ən çoxu  $\bar{b}_i$ , ( $i = \overline{1, m}$ ) qədərdir. Planlaşdırılır ki, elə məhsullardan hansı miqdarda istehsal etməli ki, onların satışından əldə olunan ümumi gəlir maksimal olmaqla, onların istehsalına çəkilən ümumi vəsait miqdarı isə ayrılmış limit vəsaitdən çox olmasın. Aydındır ki, bu məsələnin riyazi modeli (1) – (3) şəklində olacaq.

Biz yuxarıda verdiyimiz optimist strategiyaya əsaslanaraq az vəsait tələb edən ( $\underline{a}_{ij}$ , ( $i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ ) ədədlərindən), lakin çox gəlir verən ( $\bar{c}_j$ , ( $j = \overline{1, n}$ ) ədədlərindən) məhsullara nəzərən aşağıdakı optimist məsələni qurmuşuq:

$$\sum_{j=1}^n \bar{c}_j x_j \rightarrow \max, \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n \underline{a}_{ij} x_j \leq \bar{b}_i, (i = \overline{1, m}) \quad (5)$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1, n}). \quad (6)$$

Eləcə də pessimist strategiya əsasında çox vəsait tələb edən  $(\bar{a}_{ij}, (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}))$ , lakin az gəlir verən  $(\underline{c}_j, (j = \overline{1, n}))$  məhsul istehsalından maksimal ümumi gəlir əldə etmək üçün aşağıdakı pessimist məsələni qurmuşuq.

$$\sum_{j=1}^n \underline{c}_j x_j \rightarrow \max, \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} x_j \leq \underline{b}_i, (i = \overline{1, m}) \quad (8)$$

$$x_j \geq 0, (j = \overline{1, n}). \quad (9)$$

Göründüyü kimi həm (4) – (6) məsələsi, həm də (7) – (9) məsələsi məlum xətti proqramlaşdırma məsələləridir.

Bu məsələləri, xüsusi halda simpleks üsulu ilə həll edərək onlarda uyğun olaraq (4) və (7) funksiyalarının  $f_{op}$  və  $f_{pes}$  qiymətlərini asanlıqla tapa bilərik.

Aşağıdakı teoremi isbat etmişik.

**Teorem.** Əgər (1) – (3) məsələsində (1) funksiyasının maksimal qiyməti  $f^*$  olarsa, onda  $f_{pes} \leq f^* \leq f_{op}$  bərabərsizliyi ödənilər.

Bu teoremdən nəticə olaraq çıxır ki, (1) – (3) məsələsini həll etmədən deyə bilərik ki, onun  $f^*$  optimal qiyməti  $[f_{pes}; f_{op}]$  intervalındadır. Belə nəticə isə ekspert qiymətləndirilməsi üçün çox vacibdir.

### Ədəbiyyat

1. Ватолин А.А. О задачах линейного программирования с интервальными коэффициентами. ЖВМ и М.Ф., 2014, Т.24, №11, ст. 1629 -1638.
2. Vazirani V.V. Approximation algorithms. Berlin, Springer, 2001, 378p.
3. Hladik M. On strong optimality of interval linear programming. J. Optim. Lett., 2017, 11(7), pp. 1459 – 1468.
4. Мамедов К.Ш., Мамедова А.Г. Понятия субоптимистического и субпессимистического решений и построения их в интервальной задаче булевого программирования. Ж. Радиоэлектроника, Информатика, Управление. 2016, №3(38) ст. 99 – 108.

## GEÇİKMƏYƏ MALİK BİR QEYRİ-XƏTTİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ EYLER TƏNLIYININ ANALOQU

**Əhmədova Jalə Bilal qızı, Ağazadə Aydan Telman qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

akja@rambler.ru, agazadaydan81@gmail.com

**Xülasə:** işdə gecikməyə malik hiperbolik tip qeyri-xətti diferensial tənliklə təsvir olunan məsələ tədqiq edilmişdir. İdarə oblastı açıq olduğu halda Eyer tənliyinin analoqu alınmışdır.

**Açar sözlər:** hiperbolik tənlik, optimal idarəetmə, funksionalın variasiyası, Eyer tənliyinin analoqu, optimallıq üçün birinci tərtib zəruri şərt.

Tutaq ki, idarə olunan proses  $D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1] = T \times X$  düzbucaqlısında  $z_{tx}(t, x) = f(t, x, z(t, x), z(t - h, x), u(t, x))$ ,  $(t, x) \in D = T \times X$ , (1)  
hiperbolik tip tənliklər sistemi ilə

$$z(t, x) = a(t, x), (t, x) \in [t_0 - h, t_0] \times [x_0, x_1], \quad (2)$$

$$z(t, x_0) = b(t), t \in [t_0, t_1], \quad (3)$$

başlangıç şərtləri daxilində təsvir olunur.

Burada fərz edilir ki, bu məsələnin verilənləri aşağıdakı hamarlıq şərtlərini ödəyirlər:  $f(t, x, z, y, u)$  – argumentlərinə nəzərən  $(z, y)$  –ə nəzərən xüsusi törəmələri ilə birlikdə kəsilməz (kəsilməz-diferensiallanan)  $n$ -ölçülü vektor-funksiyadır,  $y(t, x) = z(t - h, x)$ ,  $h = \text{const} > 0$  gecikmə,  $a(t, x)$ ,  $b(t)$  – verilmiş, uyğun olaraq  $n$  və  $m$ -ölçülü kəsilməz vektor-funksiyalardır,  $u(t, x)$  – sonlu sayda birinci növ kəsilmə nöqtəsinə malik, hissə-hissə kəsilməz  $r$ -ölçülü idarəedici vektor-funksiya olub, öz qiymətlərini, boş olmayan, məhdud və açıq  $U$  çoxluğundan alır, yəni

$$u(t, x) \in U \subset R^r, (t, x) \in D. \quad (4)$$

(4) məhdudiyyətini ödəyən  $u(t, x)$  idarəedici vektor-funksiyasına mümkün idarə deyilir.

Fərz olunur ki, qoyulan şərtlərə uyğun olaraq (1)-(3) sərhəd məsələsinin hər bir verilmiş  $u(t, x)$  mümkün idarələri üçün yeganə və mütləq kəsilməz həlli vardır (bax məsələ, [1-4]).

Qoyulan məhdudiyyətlər daxilində

$$S(u) = \varphi(z(t_1, x_1)) \quad (5)$$

funksionalının minimum qiymətlərinin tapılması məsələsinə baxaq.

Burada  $\varphi(z)$  – verilmiş, kəsilməz diferensiallanan skalyar funksiyalardır.

(5) funksionalına (1)-(4) şərtləri daxilində minimum qiymət verən  $u(t, x)$  mümkün idarəsinə optimal idarə deyəcəyik.

$u(t, x)$  və  $\bar{u}(t, x) = u(t, x) + \Delta u(t, x)$  ilə iki mümkün idarəni,  $z(t, x)$  və  $\bar{z}(t, x) = z(t, x) + \Delta z(t, x)$  ilə bu mümkün idarələrə uyğun həlləri işarə edək.

Sonra və funksionalın artım düsturunu yazaq:

$$S(\bar{u}) - S(u) = \varphi(\bar{z}(t_1, x_1)) - \varphi(z(t_1, x_1)). \quad (6)$$

Daxil edilmiş işarələmələrə əsasən alınır ki,  $\Delta z(t, x)$  aşağıdakı məsələnin həlli olacaqdır.

$$\begin{aligned} \Delta z_{tx}(t, x) &= f(t, x, \bar{z}(t, x), \bar{z}(t - h, x), \bar{u}(t, x)) - \\ &\quad - f(t, x, z(t, x), z(t - h, x), u(t, x)), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\Delta z(t, x) = 0, \quad \Delta z(t, x_0) = 0. \quad (8)$$

Hamilton-Pontryagin funksiyasının analoqunu aşağıdakı şəkildə daxil edək:  
 $H(t, x, z(t, x), z(t - h, x), u(t, x), \psi(t, x)) = \psi'(t, x)f(t, x(t), x(t - h), u(t)).$

Fərz edək ki,  $\psi(t, x)$  vektor-funksiyası aşağıdakı məsələnin həllidir:

$$\begin{aligned} \psi_{tx}(t, x) &= H'_z[t, x, \psi] + \alpha(t)H'_y[t, x, \psi] + \Delta_{\bar{u}(t, x)}H'_z[t, x, \psi] + \\ &\quad + \Delta_{\bar{u}(t, x)}H'_y[t + h, x, \psi], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \psi_t(t, x_1) &= 0, \quad \psi_x(t_1, x) = 0, \quad \psi(t_0, x_1) = 0, \quad \psi_x(t_0, x) = 0, \\ \psi(t_1, x_1) &= -\varphi_z(z(t_1, x_1)). \end{aligned} \quad (10)$$

(9)-(10) qoşma sistemini nəzərə almaqla funksionalın (6) artım düsturu aşağıdakı şəkildə yazıla bilər:

$$\begin{aligned} \Delta S(u) &= - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \Delta_{\bar{u}(t, x)} H[t, x, \psi] dx dt + o_1(\|\Delta z(t_1, x_1)\|) - \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} o_2(\|\Delta z(t, x)\| + \|\Delta z(t - h, x)\|) dx dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Fərz edək ki,  $\varepsilon$  mütləq qiymətcə kafi qədər kiçik ixtiyari ədəd,  $\delta u(t, x) \in R^r$ ,  $(t, x) \in D$  ixtiyari ölçülən və məhdud vektor-funksiyadır.

$$\Delta u(t, x; \varepsilon) = \varepsilon \delta u(t, x), \quad (t, x) \in D. \quad (12)$$

Bu (12) düsturunda verilmiş  $\delta u(t, x)$  baxılan məsələdə idarənin mümkün variasiyası adlanır.

İndi  $\Delta z(t, x; \varepsilon)$  ilə prosesin  $z(t, x)$  vəziyyətinin  $u(t, x)$  mümkün idarənin (12) düsturu ilə təyin olunmuş xüsusi artımına cavab verən artımını işarə edək.

Onda (1)-(4) sərhəd məsələsindən alırıq ki,  $\Delta z(t, x; \varepsilon)$

$$\begin{aligned} \Delta z_{tx}(t, x; \varepsilon) &= f_z(t, x, z(t, x), z(t - h, x), u(t, x))\Delta z(t, x; \varepsilon) + \\ &\quad + \varepsilon f_u(t, x, z(t, x), z(t - h, x), u(t, x))\Delta u(t, x) + o(\varepsilon; t, x), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\Delta z(t_0, x; \varepsilon) = 0, \quad \Delta z(t, x_0; \varepsilon) = 0, \quad (14)$$

sərhəd məsələsinin həllidir.

**Lemma 1.** Baxılan məsələdə  $z(t, x)$  vəziyyətinin  $\Delta z(t, x; \varepsilon)$  xüsusi artımı üçün



$$\Delta z(t, x; \varepsilon) = \varepsilon \delta z(t, x) + o(\varepsilon; t, x) \quad (15)$$

ayrılışı doğrudur.

Onda funksionalın (11) artım düsturundan alırıq ki,

$$\begin{aligned} & S(u + \varepsilon \delta u) - S(u) = \\ & = -\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H_u'(t, x, z(t, x), z(t - h, x), u(t, x), \psi(t, x)) \delta u(t, x) dx dt + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Axırıncı ayrılışdan funksionalın klassik variasiyasının tərifinə əsasən alırıq ki,

$$\begin{aligned} & \delta^1 S(u, \delta u) = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H_u'(t, x, z(t, x), z(t - h, x), u(t, x), \psi(t, x)) \delta u(t, x) dx dt. \end{aligned} \quad (16)$$

Bu (16) düsturu keyfiyyət meyarının birinci variasiyası adlanır.

**Teorem 1.** Baxılan (1)-(5) optimal idarəetmə məsələsində  $u(t, x)$  mümkün idarəsinin optimal idarə olmağı üçün zəruri şərt ixtiyari  $\delta u(t, x) \in R^r, (t, x) \in D$ ,

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H_u'(t, x, z(t, x), z(t - h, x), u(t, x), \psi(t, x)) \delta u(t, x) dx dt = 0 \quad (17)$$

bərabərliyinin ödənməsidir.

Bu (17) optimallıq şərtindən  $\delta u(t, x)$  –in ixtiyariliyindən istifadə edərək daha asan yoxlanıla bilən zəruri şərt almaq olar.

**Teorem 2.** Baxılan (1)-(5) optimal idarəetmə məsələsində  $u(t, x)$  mümkün idarəsinin optimal idarə olması üçün zəruri şərt

$$H_u(\theta, \xi, z(\theta, \xi), z(\theta - h, \xi), u(\theta, \xi), \psi(\theta, \xi)) = 0 \quad (18)$$

bərabərliyinin ixtiyari  $u \in R^r, (\theta, \xi) \in D$  üçün ödənməsidir.

Bu (18) eyniliyini ödəyən hər bir  $u(t, x)$  mümkün idarələrinə klassik ekstremal deyəcəyik. (18) eyniliyi Eyler tənliyinin analogları olub, optimallıq üçün konstruktiv yoxlanıla bilən zəruri şərtədir və o, optimallıq üçün birinci tərtib zəruri şərtədir.

### Ədəbiyyat

1. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. Методы оптимизации и их приложения. Часть II, Н.Наука, 1990, 151 с.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Изд.-во МГУ.
3. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса-Дарбу. Изд.-во «Элм», 2010, 360 с.
4. Новоженев М.М., Сумин В.И., Сумин М.И. Методы оптимального управления системами математической физики. Горбкий Изд.-во ГГУ, 1986, 87 с.

## PAYLANMIŞ PARAMETRLİ GECİKMƏYƏ MALİK BİR XƏTTİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ÜÇÜN ZƏRURİ VƏ KAFİ ŞƏRT

**Əhmədova Jalə Bilal qızı, Ağazadə Aydan Telman qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

akja@rambler.ru, agazadaydan81@gmail.com

**Xülasə:** bu işdə hiperbolik tip diferensial tənliklə təsvir olunan məsələdə maksimum prinsipi tipli zəruri və kafi şərt, eləcə də qeyri-xətti funksional halında optimallıq üçün kafi şərt alınmışdır.

**Açar sözlər:** hiperbolik tənlik, maksimum prinsipi, optimallıq üçün zəruri və kafi şərt, optimal idarəetmə.

Qursa-Darbu sistemləri ilə optimal idarəetmə məsələləri xüsusi törəməli tənliklərlə təsvir olunan məsələlər içərisində xüsusi yer tutur. Qursa-Darbu sistemləri ilə optimal idarəetmə məsələlərinin tədqiqi ötən əsrdən etibarən müxtəlif işlərdən [1-3] başlanmışdır. Lakin gecikməyə malik Qursa-Darbu sistemləri ilə optimal idarəetmə məsələləri çox az tədqiq edilmişdir.

Təqdim olunan iş gecikməyə malik bir xətti optimal idarəetmə məsələsində optimallıq şərtlərinin tədqiqinə həsr edilmişdir. Artım üsulunun bir variantından istifadə edərək (bax məsələn, [4]), əvvəlcə xətti keyfiyyət meyarı halında optimallıq üçün zəruri və kafi şərt alınmış, daha sonra keyfiyyət meyarı xətti olmayan və qabarıq olan halda optimallıq üçün kafi şərt isbat olunmuşdur.

$D = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1] = T \times X$  düzbucaqlısında aşağıdakı kimi hiperbolik tip tənliklər sistemi ilə təsvir olunan idarə olunan prosesə baxaq:

$$z_{tx}(t, x) = A(t, x)z(t, x) + B(t, x)z(t - h, x) + f(t, x, u(t, x)), (t, x) \in D, \quad (1)$$

$$z(t, x) = a(t, x), (t, x) \in [t_0 - h, t_0] \times [x_0, x_1], \quad (2)$$

$$z(t, x_0) = b(t), t \in [t_0, t_1]. \quad (3)$$

Burada fərz edilir ki,  $A(t, x), B(t, x)$  – arqumentlərinin küllüsünə nəzərən kəsilməz verilmiş  $n \times n$  ölçülü matris funksiyalar,  $h = \text{const} > 0$  gecikmə,  $f(t, x, u)$  – arqumentlərinin küllüsünə nəzərən kəsilməz verilmiş  $n$ -ölçülü vektor-funksiyadır,  $a(t, x), b(t)$  – uyğun olaraq  $n$  və  $m$ -ölçülü kəsilməz verilmiş vektor-funksiyalardır,  $u(t, x)$  – sonlu sayda birinci növ kəsilmə nöqtəsinə malik, hissə-hissə kəsilməz  $r$ -ölçülü idarəedici vektor-funksiya olub, boş olmayan, məhdud  $U$  çoxluğundan qiymət alır, yəni

$$u(t, x) \in U \subset R^r, (t, x) \in D \quad (4)$$

məhdudiyyətlərini ödəyir.

(4) şərtini ödəyən hər bir  $u(t, x)$  idarəedici vektor-funksiyasına mümkün

idarə deyilir.

Baxılan (1)-(3) məsələsinin  $u(t, x)$  mümkün idarəsinə uyğun həlli dedikdə  $t$  – yə nəzərən hissə-hissə hamar,  $x$ -ə nəzərən hissə-hissə kəsilməz funksiya olub, (1) tənliklər sistemini ödəyən  $z(t, x)$  vektor-funksiyası başa düşülür. Fərz olunur ki, hər bir  $u(t, x)$  mümkün idarəsinə uyğun (1)-(4) məsələsinin yeganə həlli uyğundur.

**Tərif 1.** Verilmiş (1)-(2) sərhəd məsələsinin həlli dedikdə, elə  $z(t, x)$  vektor-funksiyası başa düşülür ki, o, mütləq kəsilməz funksiya olaraq (1) tənliyini sanki hər yerdə ödəyir və (2) bərabərliyini də adi mənada ödəyir.

Qoyulan məhdudiyyətlər daxilində

$$S(u) = c'z(t_1, x_1) + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} [C(t, x)z(t, x) + D(t, x)z(t - h, x) + E(t, x)u(t, x)] dx dt \quad (5)$$

funksionalının minimum qiymətlərinin tapılması məsələsinə baxaq.

Burada  $c$   $n$  –ölçülü verilmiş sabit vektor,  $C(t, x), D(t, x), E(t, x)$  – arqumentlərinin küllüsünə nəzərən kəsilməz verilmiş  $n \times n$  ölçülü matris funksiyalardır.

Beləliklə, mümkün idarələrin arasından elə idarə tapmaq tələb olunur ki, o, (1)-(3) şərtləri daxilində (5) funksionalına minimum qiymət versin. Bu şərtləri ödəyən mümkün idarəyə optimal idarə, uyğun  $(u(t, x), z(t, x))$  prosesinə isə uyğun olaraq, optimal proses deyəcəyik.

Fərz edək ki,  $(u(t, x), z(t, x))$  müəyyən qeyd olunmuş,  $(\bar{u}(t, x) = u(t, x) + \Delta u(t, x), \bar{z}(t, x) = z(t, x) + \Delta z(t, x))$  isə ixtiyari mümkün prosesdir-lər.

Hamilton-Pontryagin funksiyasını aşağıdakı kimi daxil edək:

$$H(t, x, u, \psi) = -E(t, x)u(t, x) + \psi'(t, x)f(t, x, u(t, x)),$$

harada ki,  $\psi(t, x)$  vektor-funksiyası

$$\begin{aligned} \psi_{tx}(t, x) &= -A'(t, x)\psi(t, x) + C(t, x), \quad t_1 - h \leq t \leq t_1, \\ \psi(t, x) &= -A'(t, x)\psi(t, x) - B'(t + h, x)\psi(t + h, x) \\ &\quad - D(t + h, x), \quad t_0 \leq t \leq t_1 - h, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\psi(t_1, x_1) = -c, \quad (7)$$

$$\psi'(t_0, x_1) = 0, \quad \psi_t'(t, x_1) = 0, \quad (8)$$

$$\psi_x'(t_0, x) = 0, \quad \psi_x'(t_1, x) = 0 \quad (9)$$

məsələsinin həllidir.

$$S(\bar{u}) - S(u) =$$

$$= - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H(t, x, \bar{u}(t, x), \psi(t, x)) - H(t, x, u(t, x), \psi(t, x)) dx dt. \quad (10)$$

Funksionalın isbat etdiyimiz (10) artım düsturu idarənin optimal olması üçün zəruri və kafi şərt almağa imkan verir.

**Teorem 1.**  $u(t, x)$  mümkün idarəsinin baxılan məsələdə optimal idarə olması üçün zəruri və kafi şərt ixtiyari  $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times (x_0, x_1)$  və  $v \in U$  üçün

$$\max_{v \in U} H(\theta, \xi, v, \psi(\theta, \xi)) = H(\theta, \xi, u(\theta, \xi), \psi(\theta, \xi)) \quad (11)$$

bərabərsizliyinin ödənməsidir.

Burada  $(\theta, \xi) \in [t_0, t_1] \times (x_0, x_1)$  nöqtəsi  $u(t, x)$  optimal idarəsinin hansısa bir kəsilməzlik nöqtəsidir.

İndi aşağıdakı kimi qeyri-xətti

$$S(u, v) = \varphi(z(t_1, x_1)) \quad (12)$$

funksionalının

$$z_{tx}(t, x) = A(t, x)z(t, x) + B(t, x)z(t - h, x) + f(t, x, u(t, x)), \quad (13)$$

$$z(t, x) = a(t, x), (t, x) \in [t_0 - h, t_0] \times [x_0, x_1], \quad (14)$$

$$z(t, x_0) = b(t), t \in [t_0, t_1], \quad (15)$$

$$u(t, x) \in U \subset R^r, (t, x) \in D \quad (16)$$

məhdudiyyətləri daxilində minimum qiymətinin tapılması məsələsinə baxaq. Fərz olunur ki, məsələnin verilənləri yuxarıdakı hamarlıq şərtlərini ödəyirlər.

Analoji olaraq

$$H(t, x, u(t, x), \psi(t, x)) = \psi'(t, x)f(t, x, u(t, x))$$

şəklində skalyar Hamilton-Pontryagin funksiyasını daxil edək. Burada  $\psi(t, x)$  vektor-funksiyası aşağıdakı sərhəd məsələsinin həllidir.

$$\psi_{tx}(t, x) = A'(t, x)\psi(t, x), \quad t_1 - h \leq t \leq t_1,$$

$$\psi(t, x) = A'(t, x)\psi(t, x) + B'(t + h, x)\psi(t + h, x), \quad t_0 \leq t \leq t_1 - h,$$

$$\psi(t_1, x_1) = - \frac{\partial \varphi(z(t_1, x_1))}{\partial z}, \psi'(t_0, x_1) = 0, \psi'_t(t, x_1) = 0,$$

$$\psi'_x(t_0, x) = 0, \psi'_x(t_1, x) = 0.$$

Belə olan halda (12) funksionalının artım düsturunu aşağıdakı kimi yazı bilərik:

$$S(\bar{u}) - S(u) = - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} (H(t, x, \bar{u}(t, x), \psi(t, x)) - H(t, x, u(t, x), \psi(t, x))) dx dt + o_1(\|\Delta z(t_1, x_1)\|). \quad (17)$$

Alınmış bu (17) düsturu vasitəsilə optimalıq üçün aşağıdakı kafi şərt isbat edilir.

**Teorem 2.** Tədqiq edilən (12)-(16) optimal idarəetmə məsələsində  $u(t, x)$  mümkün idarəsinin optimal idarə olması üçün kafi şərt

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H(t, x, u(t, x), \psi(t, x)) - H(t, x, u(t, x), \psi(t, x)) dx dt \leq 0 \quad (18)$$

bərabərsizliyinin ixtiyari  $u(t, x) \in U \subset R^r, (t, x) \in D$  üçün ödənməsidir.

### Ədəbiyyat

3. Егоров А.И. Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах с распределенными системами // Автоматика и телемеханика. 1964, №5, с. 613-623.
4. Егоров А.И. Оптимальные процессы в системах с распределенными параметрами и некоторые задачи теории инвариантности // Изв. АН СССР, Сер. матем. 1965, №6, с. 1205-1260.
5. Егоров А.И., Знаменская Л.Н. Введение в теорию управления системами с распределёнными параметрами. М. «Лань», 2017, 288 с.
6. Габасов Р., Дмитриук Н. М., Кириллова Ф. М. Оптимальное управление с гарантией системами с запаздыванием, Тр. ИММ УрО РАН, 2006, том 12, № 2, 27–46.

## HÜSEYNOV FƏZALARI TIPLİ $H_{\alpha\beta}^{\gamma}(R_m^+)$ FƏZALARININ ÇƏKİLİ HÖLDER FƏZALARI KİMİ TƏSVİRİ

**Əkbərov Asim Ələsgər oğlu, Hacıyeva Ruhəngiz Oqtay qızı,**

**Cəfərova Lamiyə Elçin qızı**

(BDU, Mexanika-riyaziyyat fakültəsi)

akbarovasim1980@gmail.com, rhaciyeva74@gmail.com,

lamiyeceferova2004@gmail.com

**Xülasə:** işdə  $R_m^+$  fəzasında kəsilməz olan funksiyaların Ə.İ. Hüseynov tipli  $H_{\alpha\beta}^{\gamma}(R_m^+)$  fəzaları daxil edilmişdir. İsbat olunmuşdur ki, Hüseynov fəzaları tipli  $H_{\alpha\beta}^{\gamma}(R_m^+)$  fəzaları çəkili Hölder fəzaları kimi təsvir oluna bilər. Həmçinin işdə  $H_{\alpha\beta}^{\gamma}(R_m^+)$  fəzalarının bərabərsizliklər terminində də göstərilişi verilmişdir.

**Açar sözlər:** Evklid fəzası, çəki funksiyası, çəkili Hölder fəzası, sonlu norma.

Tutaq ki,  $R_n$ -n ölçülü Evklid fəzası,

$$R_m^+ = \{x = (x_1, \dots, x_m), x_m > 0\}.$$

Fərz edək ki,  $\gamma > 0, \alpha > 0, \beta$ -həqiqi ədəddir.

$$\rho(x) = x_m^{\alpha} (1 + |x|)^{\beta - \alpha}, x \in R_m^+$$

çəki funksiyasını götürək.  $H_{\alpha\beta}^{\gamma}(R_m^+)$  çəkili Hölder fəzasını daxil edək. Tərifə görə

[1]  $u \in H_{\alpha\beta}^{\gamma}(R_m^+)$ , əgər

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x)\rho(x) = 0,$$

$$\lim_{x_m \rightarrow 0} u(x)\rho(x) = 0$$

$$\text{və } \|u\|_{H_{\alpha\beta}^\gamma} = \sup_{x,y \in R_m^+} (|u(x)\rho(x) - u(y)\rho(y)|d^{-\gamma}(x,y))$$

norması sonludur, burada  $d(x,y) = |x-y|((1+|x|)(1+|y|))^{-1}$ .

$H_{\alpha\beta}^\gamma(R_m^+)$  fəzalarını bərabərsizliklər terminində də təyin etmək olar [2]:

**Teorem.** Əgər

$$0 < \gamma < 1, 0 < \alpha - \gamma < 1, 0 < \beta + \gamma < m$$

olarsa, onda  $u \in H_{\alpha\beta}^\gamma(R_m^+)$  yalnız və yalnız o zaman doğrudur ki, aşağıdakı bərabərsizliklər ödənsin:

$$1) \exists c_1(u) \quad \forall x \in R_m^+ \quad |u(x)| \leq c_1(u)\psi_\gamma(x);$$

$$2) \exists c_2(u) \quad \forall x \in R_m^+ \quad \forall y \in \mathfrak{M}_x \quad |u(x) - u(y)| \leq c_2(u)\rho^{-1}(x)d^\gamma(x-y),$$

burada  $\mathfrak{M}_x = \{s \in R_m^+ : |s-x| < \frac{x_m}{2}\}$ ,  $\psi_\gamma(x) = x_m^{\gamma-\alpha}(1+|x|)^{-l}$ ,  $l = 2\gamma + \beta - \alpha$ .

Bu halda  $\|u\|_{H_{\alpha\beta}^\gamma} \sim \max\{c_1(u), c_2(u)\}$ .

### Ədəbiyyat

1. Abdullayev S.K. ,Agarzayev B.K. Holder weight estimates of singular integrals generated by generalized shift operator.Transactions of NAS of Azerbaijan issue math.,and mech.,series of physical-technical and mathematical science,XXIV,Baku-2004,Nº1,p.9-18.
2. Akbarov A.A. Condition for the Affiliation of the function to generalized Holders class  $H_{\alpha\beta}^\gamma(R_m^+)$  .Abstract book.Operators in general Morrey-type spaces and applications, OMTSA,2019,p.103-104.

## SABİT İNTENSİVLİK FUNKSİYALI PUASSON MODELİNDƏ TOPLAM ZƏRƏR MİQDARININ MOMENTLƏRİNİN MÜQAYİSƏLİ TƏHLİLİ

**Əliyev Rövşən Telman oğlu, Ağayeva Fidan Şövqi qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

rovshanaliyev@bsu.edu.az, aghayevafidan02@gmail.com

**Xülasə:** Baxılan işdə periodik sığorta riski prosesi üçün toplam zərər miqdarının ilk dörd momenti hesablanmışdır. Zərərlərin baş verməsi sayı Puasson prosesi vasitəsilə modelləşdirilir. İşdə sabit intensivlikli Puasson prosesləri əsasında habelə qamma və loqnormal paylanmalar halında toplam zərər miqdarının momentləri üçün ədədi qiymətlər əldə edilərək müqayisəli təhlili aparılmışdır.

**Açar sözlər:** sığorta riski prosesi, Puasson prosesi, toplam zərər miqdarı, momentlər.

Fərz edək ki,  $\{\xi_n\}$  və  $\{\eta_n\}, n \geq 1$ , müəyyən  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  ehtimal fəzasında təyin olunmuş müsbət təsadüfi kəmiyyətlərin asılı olmayan iki ardıcılığıdır. Həmçinin, hər bir ardıcılıqlar daxilindəki təsadüfi kəmiyyətlər eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir.  $m_k = E\eta_i^k$  və  $\mu_k = E\xi_i^k, k \geq 1$  işarə edək.

Sığorta riski prosesi aşağıdakı kimidir [1 – 3]:

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} \eta_i, \quad (1)$$

burada  $R(t)$  sığorta şirkətinin  $t$  anındakı kapitalının miqdarı,  $u$  – ilkin kapitalının miqdarı,  $c$  – vahid zamanda sığorta daxilolmalarının miqdarı,  $\eta_i$  –  $i$ -ci sığorta ödənişinin həcmi və  $N(t) = \max\{k: T_k \leq t\}, T_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$  isə  $t$  anına qədər edilən sığorta ödənişlərinin sayıdır.

Qeyd edək ki,  $\xi_i$  təsadüfi kəmiyyətləri  $\lambda > 0$  parametrlı üstlü paylanmaya malik olduqda (1) klassik risk modeli adlanır [3,4]. Bu halda  $N(t)$  prosesi  $\lambda t$  parametrlı Puasson prosesi olur. Qeyd edək ki, sığorta şirkətinin vahid ehtimalla iflas etməməsi üçün  $c\mu_1 > m_1$  şərti ödənilməlidir. Bu şərtin ödənilməsini təmin etmək üçün  $c\mu_1 = (1 + \rho)m_1$  götürülür. Burada  $\rho > 0$  nisbi sığorta əlavəsidir [2,3].

Aşağıdakı işarələmələri daxil edək:

$$M_k(t) = E(S_{N(t)}^k), \quad \mu_k = E\xi_i^k, \quad m_k = E\eta_i^k, \quad k = \overline{1,4}.$$

Əlavə olaraq fərz edək ki,  $m_4 = E\eta_1^4 < \infty$ . Bu halda doğuran funksiyalardan istifadə edərək, toplam zərərlərin momentləri  $M_k(t)$ -lar üçün aşağıdakı düsturların doğruluğunu əldə etmək mümkündür [1]:

$$\begin{aligned} M_1(t) &= m_1 E(N(t)), \\ M_2(t) &= m_1^2 E(N^2(t)) + \sigma_\eta^2 E(N(t)), \\ M_3(t) &= m_1^3 E(N^3(t)) + 3m_1 \sigma_\eta^2 E(N^2(t)) + \\ &\quad + (2m_1^3 - 3m_1 m_2 + m_3) E(N(t)), \\ M_4(t) &= m_1^4 E(N^4(t)) + 6m_1^2 \sigma_\eta^2 E(N^3(t)) - \\ &\quad - (11m_1^4 - 18m_1^2 m_2 + 3m_2^2 + 4m_1 m_3) E(N^2(t)) + \\ &\quad + (12m_1^2 m_2 - 6m_1^4 - 3m_2^2 - 4m_1 m_3 + m_4) E(N(t)). \end{aligned}$$

**Misal 1.** Fərz edək ki,  $\eta_1$  təsadüfi kəmiyyəti  $(\alpha, \beta), \alpha > 0, \beta > 0$  parametrlı Qamma paylanmaya malikdir. Qamma paylanmanın ilk dörd momenti aşağıdakı kimidir:

$$m_1 = \frac{\alpha}{\beta}; m_2 = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\beta^2};$$

$$m_3 = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\beta^3}; m_4 = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{\beta^4}.$$

Aşağıdakı cədvəldə  $\alpha, \beta, \lambda$  parametrlərinin müxtəlif qiymətlərində toplam zərər miqdarının momentləri üçün ədədi qiymətlər alınmışdır:

|                                                 | $M_1(t)$ | $M_2(t)$ | $M_3(t)$ | $M_4(t)$ |
|-------------------------------------------------|----------|----------|----------|----------|
| $\alpha = 1, \beta = 0.6, \lambda = 5, t = 2$   | 16       | 285      | 7737     | 170765   |
| $\alpha = 1.5, \beta = 0.8, \lambda = 8, t = 3$ | 45       | 2166     | 8157     | 5761752  |

**Cədvəl 1.** Gamma paylanması halında toplam zərər miqdarının momentləri.

**Misal 2.** Fərz edək ki,  $\eta_1$  təsadüfi kəmiyyəti  $(a, \sigma)$  parametrlili Loqnormal paylanmaya malikdir. Loqnormal paylanmanın ilk dörd momenti aşağıdakı kimidir:

$$m_1 = a e^{\frac{\sigma^2}{2}}; m_2 = a^2 e^{2\sigma^2}; m_3 = a^3 e^{\frac{9\sigma^2}{2}}; m_4 = a^4 e^{8\sigma^2}.$$

Aşağıdakı cədvəldə  $a, \sigma, \lambda$  parametrlərinin müxtəlif qiymətlərində toplam zərər miqdarının momentləri üçün ədədi qiymətlər alınmışdır:

|                                                | $M_1(t)$ | $M_2(t)$ | $M_3(t)$   | $M_4(t)$ |
|------------------------------------------------|----------|----------|------------|----------|
| $\alpha = 0.5, \sigma = 1, \lambda = 1, t = 2$ | 1.64     | 10.49    | 75.08      | 421731   |
| $\alpha = 1, \sigma = 2, \lambda = 2, t = 3$   | 44.33    | 19851.28 | 2514617.42 | 47384900 |

**Cədvəl 2.** Loqnormal paylanması halında toplam zərər miqdarının momentləri.

Cədvəllərdən göründüyü kimi, paylanma parametrlərinin qiyməti artıqda toplam zərər miqdarının momentləri də artır. Aparılmış ədədi hesablamalar göstərir ki, Puasson prosesi ilə modelləşdirilən sığorta riski modelində toplam zərərlərin momentləri həm sığorta ödənişlərinin paylanma parametrlərindən, həm də zaman faktoru və intensivlik dərəcəsiindən birbaşa asılıdır. Loqnormal paylanma halında parametrlərin (xüsusilə  $\sigma$ ) artması toplam zərərlərin yüksək dərəcəli momentlərinin kəskin böyüməsinə səbəb olur ki, bu da sığorta şirkəti üçün risk dərəcəsinin və qeyri-müəyyənliyin artdığını riyazi olaraq təsdiq edir.

### Ədəbiyyat

1. Əliyev R., Bayramov V. Sığorta riski proseslərinin ehtimal xarakteristikaları. 2022, Bakı, 339 s.
2. Asmussen S., Albrecher H. Ruin Probabilities. 2nd Edition. Singapore: World Scientific Publishing, 2020, pp.115-160.
3. Dickson D.C.M. Insurance Risk and Ruin. 3rd Edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2021, pp. 45-82.
4. Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J. Stochastic Processes for Insurance and Finance. New Jersey: John Wiley & Sons, 2021, pp. 210-245.



## DƏYİŞƏN İNTENSİVLİK FUNKSİYALI PUASSON MODELİNDƏ TOPLAM ZƏRƏR MİQDARININ MOMENTLƏRİNİN TƏDQIQI

**Əliyev Rövşən Telman oğlu, Ağayeva Fidan Şövqi qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

rovshanaliyev@bsu.edu.az, aghayevafidan02@gmail.com

**Xülasə:** Baxılan bu işdə sığorta şirkətinin zərərlərinin baş verməsi dəyişən intensivlikli Puasson prosesi ilə ifadə olunan sığorta risk prosesinə baxılır. Əvvəlcə doğuran funksiyalardan istifadə etməklə toplam zərərlərin dörd tərtib momenti üçün analitik ifadələr əldə edilmişdir. Normal paylanmaya malik zərər miqdarı üçün ədədi misal göstərilərək zərər miqdarının orta qiyməti və standart meyl hesablanmışdır.

**Açar sözlər:** Sığorta riski prosesi, dəyişən intensivlikli Puasson prosesi, zərər miqdarı, momentlər.

Real iqtisadi proseslərdə, xüsusilə sığorta hadisələrinin baş vermə dinamikasında sabit intensivlikli modellər həmişə özünü doğrultmur [4]. Hadisələrin tezliyi çox vaxt zamandan asılı olaraq, periodik və ya mövsümi xarakterdə dəyişə bilər [3,4]. Məsələn, ilin yay aylarında daşqınların, payızda isə torpaq sürüşmələrinin daha çox baş verməsi müşahidə olunur. Bu dövrü dəyişikliklər sabit intensivlikli Puasson prosesi ilə təsvir olunan modeldə nəzərə alınmır, nəticədə riskin həddən artıq az və ya çox qiymətləndirilməsi baş verir. Bu səbəbdən modelin adekvatlığını artırmaq üçün dəyişən intensivlikli Puasson prosesindən istifadə edilməsini zəruri edir [2].

Bu işdə hadisələrin baş vermə intensivliyinin zamandan asılı olduğu toplam zərər miqdarının momentləri təhlil edilmişdir.

Sığorta şirkətinin toplam zərərinin miqdarını ifadə edən təsadüfi proses aşağıdakı kimidir [3]:

$$S_{N(t)} = \sum_{i=1}^{N(t)} \eta_i,$$

burada  $\eta_i$  təsadüfi kəmiyyəti  $i$ -ci sığorta ödənişinin həcmi,  $N(t) = \max\{k: T_k \leq t\}$ ,  $T_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$  isə  $t$  anına qədər edilən sığorta ödənişlərinin sayını,  $\xi_i$  təsadüfi kəmiyyətləri isə sığorta ödənişləri arasındakı zamanı ifadə edir. Göründüyü kimi,  $S_{N(t)}$  prosesi təsadüfi sayda təsadüfi kəmiyyətin cəmi şəklində verilir.

Bu işdə fərz edirik ki,  $N(t)$  dəyişən  $\lambda(t)$  intensivlikli Puasson prosesidir. Bu halda belə təyin olunan prosesə qeyri-bircins Puasson prosesi deyilir [3].

Fərz edək ki,  $\{\xi_n\}$  və  $\{\eta_n\}$ ,  $n \geq 1$  müsbət təsadüfi kəmiyyətlərin asılı olmayan iki ardıcılığıdır. Həmçinin, hər bir ardıcılıq daxilindəki təsadüfi kəmiyyətlər eyni qanunla paylanmış asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir. Risk modelində  $N(t)$

sayma prosesinin ilk dörd momenti üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur [3]:

$$E(N(t)) = D(N(t)) = \mu(t),$$

$$E(N^2(t)) = (\mu(t))^2 + \mu(t),$$

$$E(N^3(t)) = (\mu(t))^3 + 3(\mu(t))^2 + \mu(t),$$

$$E(N^4(t)) = (\mu(t))^4 + 6(\mu(t))^3 + 7(\mu(t))^2 + \mu(t).$$

Burada  $\mu(t) = \int_0^t \lambda(s)ds$  Puasson prosesinin toplanmış intensivlik funksiyasıdır.

**Misal.** Fərz edək ki, intensivlik funksiyası  $\lambda(t) = \lambda_0 \left(1 + b \cos^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right)\right)$  periodikdir və  $\eta$  təsadüfi kəmiyyəti  $(\alpha, \beta)$  parametrləri Qamma paylanmaya malikdir.

Bu halda  $N(t)$ -nin riyazi gözləməsi aşağıdakı kimidir:

$$\begin{aligned} E(N(t)) = \mu(t) &= \int_0^t \lambda_0 \left(1 + b \cos^2\left(\frac{2\pi s}{T}\right)\right) ds = \\ &= \lambda_0 \left(1 + \frac{b}{2}\right)t + \frac{\lambda_0 b T}{8\pi} \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right). \end{aligned}$$

Alınmış bu ifadədən istifadə etməklə  $N(t)$ -nin digər momentləri də hesablanır.

Toplam zərər miqdarlarının  $M_k(t) = E(S_{N(t)}^k)$ ,  $k = \overline{1,4}$  momentləri üçün düsturlardan da istifadə etməklə aşağıdakı cədvəli qurmaq mümkündür [1]:

|                                                 | $M_1(t)$ | $M_2(t)$ | $M_3(t)$ | $M_4(t)$ |
|-------------------------------------------------|----------|----------|----------|----------|
| $\alpha = 1, \beta = 0.6, \lambda_0 = 1, a = 2$ | 3        | 22       | 185      | 1929     |
| $\alpha = 2, \beta = 0.2, \lambda_0 = 1, a = 4$ | 30       | 1350     | 76500    | 5197500  |

**Cədvəl.** Qamma paylanması halında toplam zərər miqdarının momentləri.

Cədvəldən göründüyü kimi, paylanma parametrlərinin qiyməti artdıqda toplam zərər miqdarının momentləri də artır. Aparılmış ədədi hesablamalar göstərir ki, dəyişən intensivlikli Puasson prosesi ilə modelləşdirilən sığorta riski modelində toplam zərər miqdarının momentləri həm sığorta ödənişlərinin paylanma parametrlərindən, həm də zaman faktoru və intensivlik dərəcəsinədən birbaşa asılıdır. Qamma paylanma halında parametrlərin artması toplam zərərlərin yüksək dərəcəli momentlərinin kəskin böyüməsinə səbəb olur ki, bu da sığorta şirkəti üçün risk dərəcəsinin və qeyri-müəyyənliyin artdığını riyazi olaraq təsdiq edir.

### Ədəbiyyat

1. Əliyev R., Bayramov V. Sığorta riski proseslərinin ehtimal xarakteristikaları. 2022, Bakı, 339 s.
2. Asmussen, S., Albrecher, H. Ruin Probabilities (2nd ed.), World Scientific, 2011.
3. Asmussen, S., Glynn, P. W. Stochastic Simulation: Algorithms and Analysis. Springer, 2007.
4. Garrido, J., & Junca, M. Moments of the aggregate claims in a non-homogeneous Poisson process. Insurance: Mathematics and Economics, 2022, Vol. 104, pp. 12-25.

## MARSHALL-OLKİN SXEMİ İLƏ ÜMUMİLƏŞDİRİLMİŞ PARETO PAYLANMASI ÜÇÜN ORTA QALAN ÖMÜR MÜDDƏTİNİN TƏDQİQİ

**Əliyev Rövşən Telman oğlu, Dadaşova Günel Məmmədağa qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

(BDU, SABAH)

rovshanaliyev@bsu.edu.az, gunelldadashova@gmail.com

**Xülasə:** Təqdim olunan iş sığorta riyaziyyatında mühüm rol oynayan qalan ömür müddətinin tədqiqinə həsr olunmuşdur. Marshall-Olkin sxemi ilə ümumiləşdirilmiş Pareto paylanması halında qalan ömür müddətinin şərti riyazi gözləməsi üçün analitik ifadə əldə edilmişdir.

**Açar sözlər:** Marshall-Olkin sxemi, Pareto paylanması, yaşam funksiyası, orta qalan ömür funksiyası.

Marshall-Olkin sxemi vasitəsilə əldə edilmiş ümumiləşdirilmiş paylanmalar ehtimal nəzəriyyəsi və onun tətbiqlərində mühüm rol oynayır. **Marshall-Olkin sxemi** risklərin modelləşdirilməsi üçün istifadə olunan ehtimal modelidir ([2],[5],[6]).

$\beta \in (0,1)$  parametri üçün Marshall-Olkin sxemi tətbiq etdikdə yeni ümumiləşdirilmiş paylanma funksiyası və sıxlıq funksiyası uyğun olaraq aşağıdakı kimidir:

$$G_{\beta}(x) = \frac{x^{\alpha} - \lambda^{\alpha}}{x^{\alpha} - \bar{\beta}\lambda^{\alpha}}, \quad (1)$$

$$g_{\beta}(x) = \frac{\alpha\beta\lambda^{\alpha}x^{\alpha-1}}{(x^{\alpha} - \bar{\beta}\lambda^{\alpha})^2}. \quad (2)$$

(1)-dən istifadə edərək ümumiləşdirilmiş Pareto paylanmasının yaşam funksiyasını yazı bilərik:

$$\bar{G}_{\beta}(x) = 1 - G_{\beta}(x) = \frac{\beta\lambda^{\alpha}}{x^{\alpha} - \bar{\beta}\lambda^{\alpha}}. \quad (3)$$

Pareto paylanması ilə paylanmış təsadüfi kəmiyyətin [1] orta qalan ömür müddəti üçün aşağıdakı teorem doğrudur:

**Teorem.** Fərz edək ki,  $\xi$  təsadüfi kəmiyyəti ümumiləşdirilmiş  $(\lambda, \beta)$  parametrlili Pareto paylanmasına malikdir. Onda uyğun orta qalan ömür müddəti aşağıdakı kimidir:

$$e(x) = E(\xi - x | \xi > x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\lambda^{\alpha}\bar{\beta}} - x, \quad (4)$$

Burada  $x > \lambda > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\bar{\beta} = 1 - \beta$ ,  $\beta > 0$ .

**İsbatı.** Orta qalan ömür funksiyası aşağıdakı kimi təyin olunur [4], [6]:

$$e(x) = E(\xi - x | \xi > x) = \frac{1}{\bar{G}_\beta(x)} \int_x^{+\infty} y g_\beta(y) dy - x. \quad (5)$$

(2) -ni nəzərə alaraq (5) münasibətindəki inteqralı hesablayaq:

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} y g_\beta(y) dy &= \int_x^{+\infty} y \frac{\alpha \beta \lambda^\alpha y^{-\alpha}}{y(1 - \bar{\beta} \lambda^\alpha y^{-\alpha})^2} dy = \\ &= \lambda^\alpha \alpha \beta \int_x^{+\infty} \frac{y^{-\alpha}}{(1 - \bar{\beta} \lambda^\alpha y^{-\alpha})^2} dy = \\ &= \lambda^\alpha \alpha \beta \int_x^{+\infty} \frac{y^{-\alpha} y^{\alpha+1}}{t^2 \alpha \bar{\beta} \lambda^\alpha} dt = \alpha \beta \int_x^{+\infty} \frac{y}{t^2 \alpha \bar{\beta}} dt = \\ &= \frac{\beta}{\bar{\beta}} \frac{x}{1 - \bar{\beta} \lambda^\alpha x^{-\alpha}}, \end{aligned} \quad (6)$$

burada  $1 - \bar{\beta} \lambda^\alpha y^{-\alpha} = t$  əvəzlənməsi aparılmış,  $dy = \frac{1}{\alpha \bar{\beta} \lambda^\alpha y^{-\alpha-1}} dt$  olduğu nəzərə alınmışdır.

(3) və (6) ifadələrini (5)-də nəzərə alaraq teoremin hökmünü əldə edərik.

Beləliklə, Teorem isbat olundu.

### Ədəbiyyat

1. R.T.Əliyev. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı-BDU, 2022, 516 s.
2. K.K.Josea, E.Krishna. Marshall-Olkin extended uniform distribution. ProbStat Forum, 2011, pp. 78–88.
3. M.M.AlSobhi. The inverse-power logistic-exponential distribution: properties, estimation methods and application to insurance data. Mathematics, 2020, pp. 1–15.
4. E.G.Mohamed, G.D.Emilio, N.Saralees. A new generalization of the pareto distribution and its application to insurance data. Journal of Risk and Financial Management, 2018, pp. 1–14.
5. J.O.Obulezi, C.A.Ifeanyi, G.O.Orji, O.H.Etaga. Marshall-Olkin Chris-Jerry distribution and its applications. International Journal of Innovative Science and Research Technology, 2023, pp. 522–533.
6. J.Victoriano, Emilio, J.Francisco. On modelling insurance data by using a generalized lognormal distribution. Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa, 2014, pp. 146–162.

## GÖZLƏNİLƏN İTKİSİNİN MİQDARI VEYBUL PAYLANMASINA MALİK OLAN SİĞORTA PORTFELİ ÜÇÜN RİSK ALTINDAKI DƏYƏRİN TƏDQIQI

**Əliyev Rövşən Telman oğlu, Dadaşova Günel Məmmədağa qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

(BDU, SABAH)

rovshanaliyev@bsu.edu.az, gunelldadashova@gmail.com

**Xülasə:** Təqdim olunan iş sığorta və maliyyə sahəsində mühüm rol oynayan risk altındakı dəyər və risk altındakı qalıq dəyər risk ölçülərinə həsr olunmuşdur. Veybul paylanmasına tətbiq edilərək risk altındakı dəyər və risk altındakı qalıq dəyər risk ölçüləri hesablanmışdır.

**Açar sözlər:** Veybul paylanması, risk altındakı dəyər, risk altındakı qalıq dəyər.

Sığorta və maliyyə sahəsində əsas problemlərdən biri risklərin ölçülməsi və qiymətləndirilməsidir. Riskin düzgün ölçülməsi sığorta şirkətlərinə mümkün maliyyə itkilərini əvvəlcədən müəyyən etməyə və bu itkilərin qarşısını almaq üçün ehtiyat tədbirlər görməyə imkan verir. Bu məqsədlə müxtəlif risk ölçüləri istifadə olunur. Praktikada ən geniş istifadə olunan risk ölçüləri risk altındakı dəyər (Value at Risk – VaR) və risk altındakı qalıq dəyər (Tail Value at Risk – TVaR) hesab olunur. Müasir sığorta və maliyyə nəzəriyyəsində VaR və TVaR risklərin qiymətləndirilməsi, sığorta portfellerinin analiz edilməsi, kapital ehtiyatlarının müəyyən edilməsi və maliyyə sabitliyinin təmin olunması məqsədilə geniş tətbiq edilir. Bu göstəricilər risklərin idarə edilməsi nəzəriyyəsinin əsas elementlərindən hesab olunurlar.

Fərz edək ki,  $\xi$  hər hansı sığorta müqavilələri portfelində gözlənilən itkini ifadə edən təsadüfi kəmiyyətdir. Bu təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası  $F_\xi(x) = P(\xi \leq x)$  olsun.

**Tərif 1.** Aşağıdakı kimi təyin olan  $VaR_\xi(\alpha)$  kəmiyyətinə  $\alpha$  etibarlılıq səviyyəsində risk altındakı dəyəri deyilir [3], [5]:

$$VaR_\xi(\alpha) = x_\alpha = \inf\{x: F_\xi(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0,1).$$

**Tərif 2.** Aşağıdakı kimi təyin olan  $TVaR_\xi(\alpha)$  kəmiyyətinə  $\alpha$  etibarlılıq səviyyəsində risk altındakı qalıq dəyəri və ya qalıq şərti riyazi gözləməsi (tail conditional expectation) deyilir [4]:

$$TVaR_\xi(\alpha) = E(\xi | \xi > x_\alpha).$$

Bəzən  $TVaR_\xi(\alpha)$  kəmiyyətini elmi ədəbiyyatda  $TCE_\xi(\alpha)$  kimi də işarə edirlər [4].

Təqdim olunan işin ilk əsas nəticəsi aşağıdakı teoremdə verilmişdir:

**Teorem 1.** Fərz edək ki, sığorta portfelində gözlənilən itkinin miqdarını ifadə edən  $\xi$  təsadüfi kəmiyyəti  $(\lambda, \beta)$  parametrlı Veybul paylanmasına malikdir. Bu halda  $\alpha$  etibarlılıq səviyyəsində risk altındakı dəyər aşağıdakı kimidir:

$$VaR_{\xi}(\alpha) = \left( -\frac{\ln(1-\alpha)}{\lambda} \right)^{\frac{1}{\beta}}, \quad \lambda > 0, \beta > 0.$$

**İsbatı.**  $\alpha = F_{\xi}(x_{\alpha})$  işarələməsini qəbul edək. Buradan

$$x_{\alpha} = F^{-1}_{\xi}(\alpha).$$

Burada  $F^{-1}_{\xi}(\alpha)$  funksiyası paylanma funksiyasının tərs funksiyasıdır.

Tərif 1-ə əsasən  $x_{\alpha} = VaR_{\xi}(\alpha)$  olduğundan

$$VaR_{\xi}(\alpha) = F^{-1}_{\xi}(\alpha).$$

Buradan

$$\alpha = F_{\xi}(VaR_{\xi}(\alpha)) \quad (1)$$

olduğunu əldə edərək. Şərtə görə  $\xi$  təsadüfi kəmiyyəti Veybul paylanmasına malik olduğundan (1)-dən aşağıdakını əldə edirik:

$$1 - \alpha = e^{-\lambda x_{\alpha}^{\beta}}.$$

Sonuncu ifadədə hər tərəfi loqarifmləsək,

$$\ln(1 - \alpha) = -\lambda x_{\alpha}^{\beta}$$

əldə edərək.  $x_{\alpha} = VaR_{\xi}(\alpha)$  olduğunu nəzərə alsaq,

$$\ln(1 - \alpha) = -\lambda (VaR_{\xi}(\alpha))^{\beta}$$

olar. Buradan  $VaR_{\xi}(\alpha)$  kəmiyyətini tapsaq, əldə edərək:

$$VaR_{\xi}(\alpha) = \left( -\frac{\ln(1-\alpha)}{\lambda} \right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Beləliklə, Teorem 1 isbat olundu.

Təqdim olunan işin növbəti nəticəsi aşağıdakı teoremdə verilmişdir:

**Teorem 2.** Fərz edək ki, Teorem 1-in şərtləri ödənilir.  $\alpha$  etibarlılıq səviyyəsində risk altındakı qalıq dəyəri aşağıdakı kimidir:

$$TVaR_{\xi}(\alpha) = \frac{1}{(1-\alpha)\lambda^{\frac{1}{\beta}}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}, -\ln(1-\alpha)\right),$$

burada  $\Gamma(b, x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{b-1} dt$  – natamam qamma funksiyasıdır.

**İsbatı.** Məlumdur ki (bax, məsələn, [2, s 281]),

$$E(\xi | a < \xi \leq b) = \frac{1}{F_{\xi}(b) - F_{\xi}(a)} \int_a^b x dF_{\xi}(x).$$

Bu düsturu tətbiq etsək,  $TVaR_{\xi}(\alpha)$  ifadəsini aşağıdakı kimi də yazı bilərik:

$$TVaR_{\xi}(\alpha) = E(\xi | \xi > x_{\alpha}) = \frac{1}{1 - F_{\xi}(x_{\alpha})} \int_{x_{\alpha}}^{\infty} x dF_{\xi}(x). \quad (2)$$

(2)-də Veybul paylanmasının paylanma funksiyası nəzərə alsaq,

$$TVaR_{\xi}(\alpha) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_{x_{\alpha}}^{\infty} x \beta \lambda x^{\beta-1} e^{-\lambda x^{\beta}} dx \quad (3)$$

əldə edirik. (3) integrallında uyğun əvəzləməni apararaq aşağıdakı münasibəti əldə edirik:

$$\begin{aligned} TVaR_{\xi}(\alpha) &= \frac{1}{1 - \alpha} \int_{-\ln(1-\alpha)}^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\beta}} du = \\ &= \frac{1}{(1 - \alpha)\lambda^{\frac{1}{\beta}}} \int_{-\ln(1-\alpha)}^{\infty} e^{-u} u^{\frac{1}{\beta}} du = \\ &= \frac{1}{(1 - \alpha)\lambda^{\frac{1}{\beta}}} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}, -\ln(1 - \alpha)\right). \end{aligned}$$

Beləliklə, Teorem 2 isbat olundu.

**Misal.** Fərz edək ki, sığorta portfelində gözlənilən itkinin miqdarını ifadə edən  $\xi$  təsadüfi kəmiyyəti  $\beta = 1,5$  və  $\lambda = 0,8$  parametrlı Veybul paylanmasına malikdir. Bu halda, Maple proqramından istifadə olunaraq müxtəlif etibarlılıq səviyyəsində  $VaR_{\xi}(\alpha)$  və  $TVaR_{\xi}(\alpha)$  qiymətləri hesablanmışdır:

| $\alpha$ | $VaR_{\xi}(\alpha)$ | $TVaR_{\xi}(\alpha)$ |
|----------|---------------------|----------------------|
| 0,995    | 2,023               | 1,891                |
| 0,99     | 2,411               | 1,363                |
| 0,95     | 3,211               | 0,707                |
| 0,9      | 3,526               | 0,57                 |

### Ədəbiyyat

1. R.T. Əliyev, Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı-BDU, 2022, 516 s.
2. A.N.Shiryayev, Probability., Springer, 2016, 621 s.
3. S. Bozkuş, Risk ölçümündə alternativ yaklaşımlar: riske maruz dəğər (var) və beklenen kayıp (es) uygulamaları. D.E.Ü.İİ.B.F. Dergisi, 2005, pp. 27-45.
4. A. Castaner, M.M.Claramunt, M. Marmol, Tail Value at Risk. An analysis with the normal-power approximation. Statistical and Soft Computing Approaches, 2013, pp. 87-111.
5. U. Mukhaiyar, A. Dianpermatasari, A. Dzakiya, S. B. Widayani, H. Syam, The value at risk analysis using heavy-tailed distribution on the insurance claims data. Jurnal Teori dan Aplikasi Matematika, 2024, pp. 1233–1248.

## ETİBARLILIQ NƏZƏRİYYƏSİNDƏ MARKOV PROSESİNƏ ƏSASLANAN EHTİMAL MODELLƏRİNİN TƏHLİLİ

**Əliyev Rövşən Telman oğlu, Kazımzadə Aytac Azər qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika)

rovshanaliyev@bsu.edu.az, gasanovaytach14@gmail.com

**Xülasə:** Bu tədqiqatda texniki sistemlərin etibarlılığının qiymətləndirilməsi üçün Puasson nasazlıq prosesi və Markov zəncirlərinə əsaslanan yeni hibrid ehtimal modeli təklif olunur. Klassik eksponensial model yalnız sabit nasazlıq intensivliyini nəzərə aldığı halda, real sistemlərdə vəziyyət dəyişkənliyi və keçid ehtimalları mühüm rol oynayır. Bu məqsədlə Markov vəziyyət keçidləri ilə Puasson nasazlıq axınının inteqrasiya olunduğu yeni etibarlılıq funksiyası işlənmişdir. Təklif olunan model sistemin dinamik davranışını daha dəqiq əks etdirir və uzunmüddətli istismar şəraitində etibarlılıq qiymətləndirilməsini təkmilləşdirir.

**Açar sözlər:** Puasson prosesi, Markov zənciri, etibarlılıq nəzəriyyəsi, ehtimal modeli, nasazlıq axını

Etibarlılıq nəzəriyyəsində əsas məqsəd sistemin müəyyən zaman intervalında nasazlıq vermədən işləmə ehtimalını təyin etməkdir. Klassik modeldə Puasson prosesi istifadə olunur[1]:

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

Burada  $\lambda$  nasazlıqların orta intensivliyini göstərir.

Lakin bu model sistemin vəziyyət dəyişmələrini (işlək / nasaz / bərpa) nəzərə almır. Real sistemlərdə isə komponentlər Markov tipli keçidlərə malikdir:

İşlək  $\rightarrow$  Nasaz

Nasaz  $\rightarrow$  İşlək (təmir)

Bu səbəbdən daha realist model üçün Markov və Puasson birlikdə istifadə olunmalıdır.

Bu tədqiqatın əsas yeniliyi aşağıdakı hibrid etibarlılıq funksiyasıdır[3]:

$$R^*(t) = e^{-\lambda t} \cdot (P_{11}(t))^{\beta}$$

Burada:

$P_{11}(t) \rightarrow$  Markov zəncirində sistemin "işlək vəziyyətdə qalma ehtimalı"

$\beta \rightarrow$  sistemin sabitlik əmsalı (yenilik parametri)

İki vəziyyətli sistem üçün:

$S_1$ : işlək vəziyyət

$S_2$ : nasaz vəziyyət

Keçid matrisi: [2]



$$P = \begin{bmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \mu & 1 - \mu \end{bmatrix}$$

Bu halda işlək vəziyyətdə qalma ehtimalı [5]:

$$P_{11}(t) = \pi_1 + (1 - \pi_1)e^{-(\alpha+\mu)t}$$

Misal:

$$\lambda = 0.1$$

$$\alpha = 0.2$$

$$\mu = 0.1$$

$$\beta = 1.5$$

$$t = 5$$

1. Puasson hissə:

$$e^{-0.1 \cdot 5} = e^{-0.5} \approx 0.607.$$

2. Markov hissə:

$$\alpha + \mu = 0.3,$$

$$P_{11}(5) = 0.8 + (1 - 0.8)e^{-0.3 \cdot 5},$$

$$e^{-1.5} \approx 0.223,$$

$$P_{11}(5) = 0.8 + 0.2 \cdot 0.223 = 0.8446,$$

3. Yeni model:

$$R^*(5) = 0.607 \cdot (0.8446)^{1.5},$$

$$(0.8446)^{1.5} \approx 0.777,$$

$$R^*(5) \approx 0.607 \cdot 0.777 = 0.471,$$

Müqayisə

| Model                     | Nəticə |
|---------------------------|--------|
| Klassik Puasson           | 0.607  |
| Yeni Markov-Puasson model | 0.471  |

Nəticələr göstərir ki:

Klassik model sistemi daha optimist qiymətləndirir

Yeni model isə vəziyyət keçidlərini nəzərə aldığı üçün daha real nəticə verir

Xüsusilə texniki sistemlərdə degradasiya və nasazlıq axını birlikdə modelləşdirilir[5].

### Nəticə

Aparılan tədqiqat göstərir ki, Puasson və Markov proseslərinin integrasiyası etibarlılıq modellərinin dəqiqliyini əhəmiyyətli dərəcədə artırır. Təklif olunan  $R^*(t)$  modeli həm nasazlıq intensivliyini, həm də sistemin vəziyyət dəyişmələrini nəzərə aldığı üçün klassik eksponensial modellərə nisbətən daha

real nəticələr verir. Bu yanaşma xüsusilə çoxkomponentli və dinamik texniki sistemlərin analizi üçün effektivdir.

### **Ədəbiyyat**

1. Əliyev R. T. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika., Bakı-BDU, 2022.
2. Ross, S. *Stochastic Processes*, 2014
3. Norris, J. *Markov Chains*, Cambridge University Press
4. Grimmett, G., Stirzaker, D. *Probability and Random Processes*
5. Cox, D.R. *Renewal Theory*

## **ETİBARLILIQ NƏZƏRİYYƏSİNDƏ PALMA AXINI VƏ TƏSADÜFİ PROSESLƏR ƏSASINDA TƏHLİL**

**Əliyev Rövşən Telman oğlu, Kazımzadə Aytac Azər qızı**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika)*

*rovshanaliyev@bsu.edu.az, gasanovaytach14@gmail.com*

**Xülasə:** Bu məqalədə etibarlılıq nəzəriyyəsində Palma axınının riyazi modeli formalaşdırılmış və onun Puasson prosesi və Markov zəncirləri ilə əlaqəsi analitik şəkildə əsaslandırılmışdır. Tədqiqat çərçivəsində nasazlıqların intensivliyi ilə sistemin etibarlılığı arasında funksional asılılıq qurulmuş və sistemin işləmə ehtimalını ifadə edən düstur əldə edilmişdir. Nəticələr göstərir ki, Palma axını əsasında qurulan model real texniki sistemlərin etibarlılığının proqnozlaşdırılmasında daha yüksək dəqiqlik təmin edir.

**Açar sözlər:** etibarlılıq, Palma axını, Puasson prosesi, Markov zənciri, nasazlıq

Müasir texniki sistemlərin mürəkkəbləşməsi etibarlılıq nəzəriyyəsinin əhəmiyyətini artırmışdır. Sistemlərin fasiləsiz işləməsi və nasazlıqların minimuma endirilməsi mühəndislik və informasiya texnologiyalarında əsas problemlərdəndir.

Bu sistemlərdə nasazlıqların zaman üzrə paylanması düzgün modelləşdirilməsi üçün təsadüfi proseslər, xüsusilə Puasson prosesi və Markov zəncirləri geniş istifadə olunur. Bu yanaşmalar əsasında nasazlıqların axını kimi qəbul edilən Palma axını tədqiq edilir. [5]

Palma axını və nəzəri əsaslar

Palma axını sistemdə nasazlıqların zaman üzrə başvermə intensivliyini xarakterizə edən təsadüfi prosesdir. Klassik yanaşmada bu axın sabit intensivliklə qəbul edilir: [1]

$$\lambda = \text{const}$$

Lakin real sistemlərdə bu şərt çox vaxt ödənmir, çünki yük, temperatur və aşınma dəyişir.

Bu işdə Palma axını üçün yeni modifikasiya olunmuş intensivlik funksiyası təklif olunur: [3]

$$\lambda^*(t) = \lambda_0 \cdot (1 + \alpha T(t) + \beta L(t))$$

Burada:

$\lambda_0$  — baza nasazlıq intensivliyi

$T(t)$  — temperatur təsiri

$L(t)$  — sistem yükü

$\alpha, \beta$  — təsir əmsalları

Bu model klassik Puasson modelindən fərqli olaraq dinamik sistem şəraitini nəzərə alır.

Puasson prosesi ilə əlaqə

Müəyyən zaman intervalında nasazlıqların sayı: [2]

$$P(N(t) = k) = \frac{(\Lambda(t))^k e^{-\Lambda(t)}}{k!}$$

Burada:

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda^*(s) ds$$

Yeni etibarlılıq funksiyası

Təklif edilən modelə əsasən sistemin etibarlılığı: [2]

$$R(t) = e^{-\Lambda(t)}$$

Hesablama nümunəsi

Verilənlər:

$$\lambda_0 = 0.02$$

$$\alpha = 0.1$$

$$\beta = 0.05$$

$$T(t) = 2$$

$$L(t) = 3$$

$$t = 5$$

Addım 1: intensivlik hesabı

$$\lambda^* = 0.02 \cdot (1 + 0.1 \cdot 2 + 0.05 \cdot 3)$$

$$\lambda^* = 0.02 \cdot (1 + 0.2 + 0.15) = 0.02 \cdot 1.35$$

$$\lambda^* = 0.027$$

Addım 2: ümumi intensivlik

$$\Lambda(t) = \lambda^* \cdot t = 0.027 \cdot 5 = 0.135$$

Addım 3: etibarlılıq

$$R(t) = e^{-0.135}$$

$$R(t) \approx 0.873$$

Nəticənin interpretasiyası

Bu nəticə göstərir ki:

sistemin etibarlılığı 87.3% təşkil edir

klassik Puasson modelinə nisbətən daha real nəticə verir

çünki temperatur və yük təsiri daxil edilib

Markov modeli ilə integrasiya

Sistem iki vəziyyətli Markov prosesi kimi götürülür: [4]

$S_0$  — işlək vəziyyət

$S_1$  — nasaz vəziyyət

Keçidlər:

$$S_0 \xrightarrow{\lambda^*} S_1, S_1 \xrightarrow{\mu} S_0$$

Stasionar ehtimal:

$$P_{work} = \frac{\mu}{\lambda^* + \mu}$$

**Nəticə.** Bu işdə Palma axını üçün yeni yanaşma təklif edildi:

$$\lambda^*(t) = \lambda_0(1 + \alpha T(t) + \beta L(t))$$

Bu model:

sabit intensivlik anlayışını dəyişir

real sistem faktorlarını daxil edir

etibarlılığı daha dəqiq hesablayır

### Ədəbiyyat

1. Əliyev R. T. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika, Bakı-BDU, 2022, s.
2. Gnedenko B.V. *The Theory of Probability*. Moscow, 1988.
3. Ross S. *Stochastic Processes*. Wiley, 2014.
4. Trivedi K.S. *Probability and Statistics with Reliability Applications*. Wiley, 2002.
5. Barlow R., Proschan F. *Statistical Theory of Reliability*. Holt, 1996.

## **XƏTTİ REQRESSİYA MODELİNDƏ QEYRİ-SƏLİS QIYMƏTLƏNDİRMƏ**

**Əliyev Rövşən Telman oğlu, Məhərrəmov Aytəkin Şahin qızı**

*(BDU, Tətbiqi Riyaziyyat və Kibernetika fakültəsi)*

*(BDU SABAH)*

*rovshanaliyev@bsu.edu.az , aytekin.meherremova.am@gmail.com*

**Xülasə:** Müasir statistik tədqiqatlarda məlumatların qeyri-dəqiqliyi və qeyri-müəyyənliyi klassik modellərin tətbiqində müəyyən çətinliklər yaradır. Bu səbəbdən qeyri-səlis məntiqə əsaslanan statistik modellər mühüm tədqiqat istiqamətlərindən birinə çevrilmişdir. Tezisdə sadə xətti reqressiya modelində parametrlərin qeyri-səlis qiymətləndirilməsi məsələsi araşdırılır. Klassik reqressiya modelində parametrlərin nöqtəvi qiymətləndirilməsi əvəzinə qeyri-səlis qiymətləndirmə üsullarından istifadə olunmasının üstünlükləri göstərilir. Tədqiqat çərçivəsində Buckley metodu əsasında klassik etibarlılıq intervalları vasitəsilə üçbucaq formalı qeyri-səlis parametrlərin qurulmasının metodoloji əsasları təhlil edilir.

**Açar sözlər:** sadə xətti reqressiya, qeyri-səlis qiymətləndirmə, qeyri-səlis ədəd, etibarlılıq intervalı, statistik modelləşdirmə

Məsələnin qoyuluşu: Reqressiya analizi dəyişənlər arasında funksional əlaqənin müəyyən edilməsinə imkan verən əsas statistik metodlardan biridir [2].

Sadə xətti reqressiya modeli iki dəyişən arasında xətti asılılığı ifadə edir və ümumi formada aşağıdakı kimi göstərilir:

$$y = a + bx$$

Burada  $a$  və  $b$  modelin əsas parametrləridir.

Klassik statistik yanaşmada bu parametrlər nöqtəvi qiymətləndirmə üsulları ilə müəyyən edilir. Lakin real həyatda müşahidə olunan məlumatlar çox zaman tam dəqiq olmur, ölçmə xətalı və qeyri-müəyyənliklər daşıyır. Bu isə klassik modellərin tətbiqini məhdudlaşdırır. Bu səbəbdən qeyri-səlis məntiqə əsaslanan yanaşmalar daha aktual hesab olunur. Qeyri-səlis reqressiya modelləri parametr qiymətlərinin tək bir ədəd deyil, müəyyən interval və ya qeyri-səlis ədəd kimi ifadə olunmasına imkan verir[5]. Bu isə modelin real sistemləri daha dəqiq təsvir etməsini təmin edir. Buckley tərəfindən təklif edilən yanaşmada klassik statistik etibarlılıq intervalları qeyri-səlis ədədlərə çevrilir. Bu yanaşmanın əsas üstünlüyü ondan ibarətdir ki, statistik qeyri-müəyyənlik bir-başına model parametrlərinə daxil edilir [1].

Sadə xətti reqressiya modeli:

$$y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$$

Burada:

$y_i$  — asılı dəyişən,  $x_i$  — sərbəst dəyişən,

$a, b$  — regressiya parametrləri

$\varepsilon_i$  — təsadüfi xəta

Xəta belə qəbul edilir:

$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$

Klassik yanaşmada parametrlər ən kiçik kvadratlar metodu ilə qiymətləndirilir. Lakin qeyri-səlis yanaşmada bu parametrlər interval və ya qeyri-səlis ədədlərlə ifadə edilir [3]. Klassik statistikada parametr üçün etibarlılıq intervalı aşağıdakı kimi verilir: [1]

$$\left[ \hat{a} - t_{\beta/2} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n-2}}, \hat{a} + t_{\beta/2} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n-2}} \right]$$

Bu interval göstərir ki, parametrin həqiqi qiyməti müəyyən ehtimal daxilində bu aralıqda yerləşir.

Buckley yanaşmasına əsasən bu interval üçbucaq formalı qeyri-səlis ədədə çevrilir:

$$\tilde{\beta} = (\beta_L, \beta_M, \beta_U)$$

Burada :

$\beta_L$  — aşağı sərhəd,

$\beta_M$  — mərkəzi (ən böyük ehtimal olunan) qiymət,

$\beta_U$  — yuxarı sərhəd.

Misal:

Tutaq ki, regressiya nəticəsində belə bir qiymət alınmışdır:

- $\hat{a} = 10$
- standart xəta hissəsi = 2

Onda etibarlılıq intervalı:

$$[10 - 2, 10 + 2] = [8, 12]$$

Bu interval əsasında qeyri-səlis parametr belə qurulur:

$$\hat{a} = (8, 10, 12)$$

Eyni qayda ilə regressiya əmsalı  $b$  və dispersiya  $\sigma^2$  üçün də hesablamalar aparılır və hər biri qeyri-səlis ədədə çevrilir [4]. Beləliklə, modelin parametrləri artıq tək bir nöqtə deyil, qeyri-müəyyənliyi də əhatə edən üçbucaq formalı ədədlər kimi ifadə olunur.

Nəticə: Aparılan tədqiqat nəticəsində müəyyən edilmişdir ki, sadə xətti regressiya modelində qeyri-səlis qiymətləndirmə metodunun tətbiqi statistik qeyri-müəyyənliyin daha real şəkildə nəzərə alınmasına imkan verir.

Buckley yanaşması əsasında klassik etibarlılıq intervallarının qeyri-səlis ədədlərə çevrilməsi modelin interpretasiyasını daha çevik və praktik edir. Bu yanaşma xüsusilə qeyri-dəqiq və natamam məlumatlarla işləyən sahələrdə daha effektiv nəticələr verir.

Gələcək tədqiqatlarda bu metodun çoxdəyişənli reqressiya modellərinə və digər mürəkkəb statistik sistemlərə tətbiqi daha geniş şəkildə araşdırıla bilər.

### **Ədəbiyyat**

1. Buckley, J. J. (2004). Fuzzy statistics. Springer, s.45
2. Dubois, D., & Prade, H. (2010). Fundamentals of fuzzy sets. Springer, s.154
3. Hüseynov, R. (2017). Tətbiqi statistika və modelləşdirmə. Bakı: Təhsil nəşriyyatı, s.245
4. Ross, T. J. (2016). Fuzzy Logic with Engineering Applications. Wiley, s.164
5. R.Əliyev, Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika, Bakı-BDU-2022, 516.s

## **QEYRİ-SƏLİS REQRESSİYA MODELİNDƏ ƏN KİÇİK KVADRATLAR ÜSULU İLƏ PARAMETR QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ**

**Əliyev Rövşən Telman oğlu, Məhərrəmov Aytəkin Şahin qızı**

*(BDU, Tətbiqi Riyaziyyat və Kibernetika fakültəsi)*

*(BDU SABAH)*

*rovshanaliyev@bsu.edu.az , aytekin.meherremova.am@gmail.com*

**Xülasə:** *Müasir statistik və riyazi modelləşdirmədə qeyri-səlis məlumatların analizi mühüm tədqiqat istiqamətlərindən biri hesab olunur. Real həyatda əldə olunan məlumatlar çox zaman qeyri-dəqiq və ya qeyri-müəyyən xarakter daşıyır. Bu isə klassik statistik modellərin tətbiqini çətinləşdirir və qeyri-səlis modellərin istifadəsini zəruri edir. Qeyri-səlis reqressiya modelləri belə vəziyyətlərdə dəyişənlər arasındakı əlaqəni daha real şəkildə təsvir etməyə imkan verir. Bu modellərdə əsas məsələlərdən biri parametr qiymətləndirilməsidir. Parametrlərin qiymətləndirilməsi üçün müxtəlif üsullar mövcuddur, lakin ən geniş istifadə olunan metodlardan biri ən kiçik kvadratlar üsuludur.*

**Açar sözlər:** *qeyri-səlis modellər, reqressiya analizi, ən kiçik kvadratlar üsulu, parametr qiymətləndirilməsi, statistik modelləşdirmə*

Məsələnin qoyuluşu: Qeyri-səlis reqressiya modelləri qeyri-müəyyən və qeyri-dəqiq məlumatların analizi üçün istifadə olunan riyazi modellərdən biridir. Klassik reqressiya analizində dəyişənlər arasındakı əlaqə dəqiq rəqəm-

lərlə ifadə olunur. Lakin real həyatda bu əlaqələr çox zaman qeyri-müəyyən olur və qeyri-səlis yanaşma tələb edir.

Ümumi halda xətti reqressiya modeli aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

Burada:  $y$  – asılı dəyişən,  $x$  – sərbəst dəyişən,  $\beta_0, \beta_1$  – model parametrləri,  $\varepsilon$  – təsadüfi xətdir.

Qeyri-səlis reqressiya modellərində isə bəzi parametrlər və ya dəyişənlər qeyri-səlis ədədlərlə ifadə oluna bilər. Bu isə modelin real şəraitə daha uyğun olmasına imkan yaradır. Ən kiçik kvadratlar üsulu reqressiya analizində ən geniş istifadə olunan qiymətləndirmə metodlarından biridir. Bu üsulun əsas ideyası müşahidə olunan qiymətlərlə model tərəfindən proqnozlaşdırılan qiymətlər arasındakı fərqlərin kvadratlarının cəmini minimuma endirməkdir.

Riyazi olaraq bu funksiya aşağıdakı kimi göstərilir:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \rightarrow \min$$

Burada:

$y_i$  – müşahidə olunan qiymət,

$\hat{y}_i$  – model tərəfindən hesablanan qiymət,

$n$  – müşahidələrin sayıdır.

Ən kiçik kvadratlar üsulunun əsas məqsədi  $S$  funksiyasını minimum edən parametr qiymətlərini tapmaqdır. Bu məqsədlə modelin xəta kvadratlarının cəmi minimallaşdırılır və optimal parametr qiymətləri törəmələr vasitəsilə müəyyən edilir.

Ən kiçik kvadratlar üsulunda model parametrləri aşağıdakı ifadələrlə hesablanır: [1]

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$
$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

Burada:

$\bar{x}, \bar{y}$  – dəyişənlərin orta qiymətləri,

$\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$  – reqressiya modelinin qiymətləndirilmiş parametrləridir.

Bu düsturlar vasitəsilə klassik statistik yanaşmada reqressiya xətti qurulur və model deterministik (nöqtəvi) şəkildə ifadə olunur. Lakin real məlumatlarda mövcud olan ölçmə xətalrı, müşahidə qeyri-dəqiqliyi və təsadüfi dəyişkənliklər bu parametrlərin tam dəqiq qiymət kimi qəbul edilməsini məhdudlaşdırır.

Bu məhdudiyyəti aradan qaldırmaq üçün Ən Kiçik Kvadratlar üsulu qeyri-səlis məntiq çərçivəsində genişləndirilə bilər. Bu yanaşmada  $\hat{\beta}_0$  və  $\hat{\beta}_1$  para-



metrləri tək bir ədəd kimi deyil, müəyyən interval daxilində dəyişən qeyri-səlis ədədlər kimi qəbul edilir .

Əvvəlcə klassik ƏKKÜ nəticələri əsasında hər bir parametr üçün etibarlılıq intervalı qurulur: [1]

$$[\hat{\beta} - t_{\alpha/2} \cdot SE, \hat{\beta} + t_{\alpha/2} \cdot SE]$$

Burada SE standart xəta,  $t_{\alpha/2}$  isə uyğun paylanmadan götürülən kritik qiymətdir. Daha sonra Buckley yanaşmasına əsasən bu interval üçbucaq formalı qeyri-səlis ədədə çevrilir: [2]

$$\tilde{\beta} = (\beta_L, \beta_M, \beta_U)$$

Burada :

$\beta_L$ — aşağı sərhəd ,

$\beta_M$ — klassik ƏKKÜ ilə alınmış nöqtəvi qiymət,

$\beta_U$ — yuxarı sərhəd

Eyni prosedur  $\beta_0$  üçün də tətbiq edilir və nəticədə model parametrləri artıq qeyri-səlis formada ifadə olunur .

Nəticə: Aparılan tədqiqat göstərir ki, ən kiçik kvadratlar üsulu klassik statistik modellərdə parametrlərin optimal qiymətlərini müəyyən etmək üçün effektiv və əsas metodlardan biridir. Lakin bu yanaşma yalnız nöqtəvi nəticələr verdiyi üçün qeyri-müəyyənlikləri tam əks etdirmir. Qeyri-səlis genişləndirmə tətbiq edildikdə isə model parametrləri tək qiymət kimi deyil, interval daxilində dəyişən qeyri-səlis ədədlər kimi ifadə olunur. Bu isə statistik qeyri-müəyyənliyin daha real şəkildə modelləşdirilməsinə imkan yaradır. Nəticə olaraq müəyyən edilir ki, ən kiçik kvadratlar üsulunun qeyri-səlis məntiq ilə birləşdirilməsi regressiya modellərinin interpretasiyasını gücləndirir, modelin dayanıqlığını artırır və qeyri-dəqiq məlumatlarla işləmədə daha etibarlı nəticələr əldə etməyə imkan verir. Beləliklə, tədqiqatın əsas nəticəsi ondan ibarətdir ki, qeyri-səlis regressiya modelləri klassik statistik modellərin genişləndirilmiş forması kimi daha real və praktik yanaşma təqdim edir.

### **Ədəbiyyat**

1. Roldán López de Hierro, A., et al. (2002). A fuzzy regression model based on fuzzy distance. 419-432 p
2. Buckley J. J. Fuzzy statistics. — New York: Springer, 2004. — 285 p.

## TƏSADÜFİ TƏLƏB VƏ TƏKLİFLİ NƏQLİYYAT MƏSƏLƏSİNİN TƏDQIQI

**Əliyev Rövşən Telman oğlu, Vəliyeva Pəri Vəli qızı**

(BDU Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

(BDU, SABAH mərkəzi )

rovshanaliyev@bsu.edu.az, parivaliyeva23@gmail.com

**Xülasə:** Nəqliyyat məsələsi bir məhsulun minimum xərcə çatdırılmasını təmin edən klassik optimallaşdırma modelidir. Klassik formada parametrlər deterministik qəbul edilsə də, real şəraitdə xərclər, tələb və təklif təsadüfi xarakter daşıyır. Bu tədqiqatda məhdudiyyətlərin təsadüfi olduğu hala baxılmışdır.

**Açar sözlər:** Nəqliyyat məsələsi, stoxastik model, loqarifmik normal paylanma.

Klassik nəqliyyat məsələsi bütün məhdudiyyətlərin bərabərlik tipli olduğu ən məşhur xətti proqramlaşdırma problemlərindən biridir [3]. Məhdudiyyətlərin təsadüfi olduğu nəqliyyat məsələsi isə klassik nəqliyyat məsələsinin stoxastik analoqudur[2]. Stoxastik nəqliyyat məsələsində həm tələb, həm də təklif təsadüfi kəmiyyətlərlə ifadə olunur.

Təqdim olunan işdə fərz olunur ki,  $a_i$  və  $b_j$  loqarifmik normal paylanmaya malik asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərdir [1]. Beləliklə, stoxastik nəqliyyat məsələsinin qoyuluşu aşağıdakı kimidir:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \quad (4)$$

Burada

$c_{ij}$ -  $i$ -ci mənbədən  $j$ -ci təyinat məntəqəsinə daşınan məhsulun daşınma xərci,

$x_{ij}$ -  $i$ -ci mənbədən  $j$ -ci təyinat nöqtəsinə göndərilən məhsulun miqdarı,

$a_i$ - təsadüfi kəmiyyəti  $i$ -ci mənbənin ehtiyatı (təklifi),

$b_j$ - təsadüfi kəmiyyəti  $j$ -ci təyinat məntəqəsinin tələbinin miqdarıdır.

Bu halda baxılan stoxastik nəqliyyat məsələsi aşağıdakı şərtlər qoyularaq həll edilir:

$$P\left(\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i\right) \geq \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$
$$P\left(\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j\right) \geq \beta_j, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Təchizat və tələbin təsadüfi xarakter daşdığı nəqliyyat məsələsinin həlli nəqliyyat xərclərini minimallaşdırmağı və logistika planlaşdırmasının daha səmərəli olmasını təmin edir.

### Ədəbiyyat

1. Əliyev R.T. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı: Bakı Dövlət Universiteti, 2022, 516 s.
2. Biswal M.P., Samal H.K. Stochastic Transportation Problem with Cauchy Random Variables and Multi Choice Parameters. Journal of Physical Sciences, 2013, 17, 117–130 p.
3. Hillier F.S., Lieberman G.J. Introduction to Operations Research. New York: McGraw-Hill, 2015, 1008 p.

## TƏSADÜFİ XƏRC ƏMSALLI NƏQLİYYAT MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİ HAQQINDA

**Əliyev Rövşən Telman oğlu, Vəliyeva Pəri Vəli qızı**

(BDU Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

(BDU, SABAŞ mərkəzi)

rovshanaliyev@bsu.edu.az, parivaliyeva23@gmail.com

**Xülasə:** Nəqliyyat məsələsi əməliyyatlar tədqiqində klassik optimallaşdırma məsələlərindən biridir. Xətti proqramlaşdırma üsulları ilə həll olunur. Resursun istehsal məntəqəsindən istehlakçıya çatdırılmasını minimum xərcə təmin etməyi təmin edir. Real logistika şəraitində çox zaman xərc tələb təklif təsadüfi xarakter daşıyır. Bu zaman məsələ stoxastik formada qurulur. Bu işdə təsadüfi xərc əmsallı nəqliyyat məsələsinin həllinin araşdırılmasına baxılır.

**Açar sözlər:** stoxastik nəqliyyat məsələsi, məqsəd funksiyası, məhdudiyyət şərtləri, riyazi gözləmə.

Klassik nəqliyyat məsələsində bütün verilənlər, daşınma xərcləri, təklif və tələb deterministik formada olur və məqsəd ümumi xərci minimuma endirməkdən ibarətdir [3]. Lakin real logistika şəraitində yanacaq qiymətləri, məsafə üzrə vaxt itkisi və ya tələb təsadüfi olaraq dəyişə bilər.

Klassik nəqliyyat məsələsinin riyazi qoyuluşu aşağıdakı kimi verilir:

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \quad (4)$$

Burada

$c_{ij}$ -  $i$ -ci mənbədən  $j$ -ci təyinat məntəqəsinə daşınan məhsulun daşınma xərci,

$x_{ij}$ -  $i$ -ci mənbədən  $j$ -ci təyinat nöqtəsinə göndərilən məhsulun miqdarı,

$a_i$ -  $i$ -ci mənbənin ehtiyatın miqdarı (təklifi),

$b_j$ -  $j$ -ci təyinat məntəqəsinin tələbinin miqdarı

$Z$ - ümumi daşınma xərcidir.

(1)-(4) məsələsi xətti proqramlaşdırma üsullarından ilə həll edilə bilər [4].

Bu işdə fərz olunur ki,  $c_{ij}$  daşınma xərcləri təsadüfi kəmiyyətdir. Bu təsadüfi kəmiyyəti  $c_{ij}^*$  ilə işarə edək. Bu halda  $Z$  də təsadüfi kəmiyyət olar və onun riyazi gözləməsi:

$$E(Z^*) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n E(c_{ij}^*) x_{ij}$$

burada  $E(c_{ij}^*) = \mu_{ij}$ .

Qeyd edək ki, riyazi gözləmə orta qiymət anlayışının ümumiləşməsidir [1].

Bu halda məqsəd funksiyası

$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mu_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

olur, (2)-(4) məhdudiyyətləri isə dəyişməz qalır.

**Misal.** Tutaq ki, bizə  $A_1, A_2$  təchizat və  $B_1, B_2$  tələbat məntəqələri verilmişdir.

$A_1$  və  $A_2$  təchizat məntəqələrinin təklif həcmi müvafiq olaraq 50 kq və 40 kq məhsuldan ibarətdir.  $B_1$  və  $B_2$  tələbat məntəqələrinin tələb həcmi isə müvafiq olaraq 30 və 60 kq məhsul təşkil edir.

Fərz olunur ki, daşınma xərcləri aşağıdakı paylanmaya malik təsadüfi kəmiyyətlərdir.

$c_{11}^*$ - 0,6 ehtimalla 3 azn, 0,4 ehtimalla 7 azn;

$c_{12}^*$ - 0,2 ehtimalla 4 azn, 0,8 ehtimalla 5 azn;

$c_{21}^*$ - 0,5 ehtimalla 5 azn, 0,5 ehtimalla 8 azn;

$c_{22}^*$ - 0,7 ehtimalla 2 azn, 0,3 ehtimalla 6 azn;

Əvvəlcə  $c_{ij}^*$  təsadüfi kəmiyyətinin  $E(c_{ij}^*) = \mu_{ij}$  riyazi gözləmələri hesablanır:

$$\mu_{11} = 3 \times 0.6 + 7 \times 0.4 = 4.6;$$

$$\mu_{12} = 4 \times 0.2 + 5 \times 0.8 = 4.8;$$

$$\mu_{21} = 5 \times 0.5 + 8 \times 0.5 = 6.5;$$

$$\mu_{22} = 2 \times 0.7 + 6 \times 0.3 = 3.2;$$

Nəqliyyat məsələsinin (2) məhdudiyyət şərtləri ilə daşınan yükün miqdarı üçün bu tənlikləri alırıq:

$$x_{11} + x_{12} = 50, x_{21} + x_{22} = 40.$$

(3) məhdudiyyət şərtləri ilə daşınan yükün miqdarı üçün isə bu tənlikləri alırıq.

$$x_{11} + x_{21} = 30, x_{12} + x_{22} = 60.$$

Hesablanmış riyazi gözləmələrdən istifadə edərək məsələnin məqsəd funksiyası aşağıdakı kimi yazılır:

$$Z = 4.6x_{11} + 4.8x_{12} + 6.5x_{21} + 3.2x_{22} \rightarrow \min$$

Ən az orta xərc  $\mu_{11}$  və  $\mu_{22}$  olduğu üçün yüklər  $x_{11}$  və  $x_{22}$  xanalarına yerləşdirilir.

Məsələ elmi ədəbiyyatlarda mövcud olan xətti proqramlaşdırma üsullarından (Vogel və ya simplex) biri ilə həll edilir [2].

Beləliklə, bu işdə xərc əmsalı təsadüfi kəmiyyət olan nəqliyyat məsələsinin qoyuluşu və onun klassik modelə gətirilməsi qaydası göstərildi.

### **Ədəbiyyat**

1. Əliyev R.T. Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika. Bakı: Bakı Dövlət Universiteti, 2022, 516 s.
2. Həmidov R.H., Allahverdiyeva N.K., Məmmədova E.B. Əməliyyatlar tədqiqinin elementləri. Bakı: Bakı Dövlət Universiteti, 2018, 67 s
3. Hillier F.S., Lieberman G.J. Introduction to Operations Research. New York: McGraw-Hill, 2015, 1008 p.
4. Taha H.A. Operations Research: An Introduction. Pearson, 2017, 848 p.

## **HƏYAT SIĞORTASINDA ÖLÜM CƏDVƏLLƏRİNİN NƏZƏRİ ƏSASLARI VƏ TƏTBİQİ XÜSUSİYYƏTLƏRİ**

**Əliyeva Bibixanım Ədalət qızı**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*beliyeva067@gmail.com*

**Xülasə:** Bu işdə həyat sığortasında ölüm cədvəllərinin mahiyyəti və onların nəzəri əsasları izah olunur. Göstərilir ki, insan ömrünün qeyri-müəyyənliyi səbəbindən sığorta hesablamaları ehtimallar üzərində qurulur və bu prosesdə ölüm və sağ qalma göstəriciləri

*əsas rol oynayır. Məqalədə ölüm ehtimalı, yaşam və gözlənilən ömür uzunluğu kimi anlayışlar sadə şəkildə açıqlanır və onların sığorta praktikasında tətbiqi qeyd olunur. Ümumilikdə, vurğulanır ki, ölüm cədvəlləri həyat sığortasında riskin qiymətləndirilməsi və düzgün qərarların verilməsi üçün əsas vasitələrdən biridir.*

**Açar sözlər:** *həyat sığortası, ölüm cədvəlləri, ölüm ehtimalı, yaşam ehtimalı, ömür uzunluğu.*

Həyat sığortası sahəsində ən çətin məsələlərdən biri insan ömrü ilə bağlı qeyri-müəyyənliyin düzgün qiymətləndirilməsidir. İnsanların nə qədər yaşayaçağını əvvəlcədən dəqiq demək mümkün olmadığından, bu sahədə bütün hesablamalar ehtimallar və statistik yanaşmalar üzərində qurulur. Praktik olaraq sığorta şirkətləri hər bir müqavilə bağlayarkən gələcəkdə baş verə biləcək hadisələri – yəni sığorta ödənişlərinin nə vaxt və hansı həcmdə olacağını – qabaqcadan proqnozlaşdırmağa çalışırlar. Bu baxımdan ölüm cədvəlləri və onlara əsaslanan düsturlar həyat sığortasının əsas alətlərindən biri kimi çıxış edir.

Ölüm cədvəlləri əslində sadə məntiqə əsaslanır: müəyyən bir əhali qrupunda insanlar yaş artdıqca neçə nəfər sağ qalır, neçə nəfər isə həyatını itirir. Amma bu sadə görünən yanaşmanın arxasında kifayət qədər ciddi statistik məzmun dayanır. Bu cədvəllər vasitəsilə hər yaş üçün ölüm və sağ qalma ehtimalları sistemli şəkildə təqdim olunur. Sığorta baxımından bu məlumatlar çox vacibdir, çünki riskin səviyyəsi məhz bu ehtimallara əsasən müəyyən edilir. Yəni sığorta şirkəti üçün əsas sual “insan nə vaxt öləcək?” deyil, “hansı ehtimalla müəyyən müddət ərzində ölüm baş verə bilər?” sualıdır [2].

Bu cədvəllərdə ən əsas göstəricilərdən biri ölüm ehtimalıdır və bu göstərici aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} \quad (1)$$

Bu düsturda  $d_x$  müəyyən yaş intervalında ölən şəxslərin sayını,  $l_x$  isə həmin yaşa qədər yaşayan insanların sayını göstərir. Bu ifadəyə diqqətlə baxanda aydın olur ki, ölüm ehtimalı konkret bir yaş qrupu üzrə baş verən ölüm hallarının həmin yaşa çatan ümumi insan sayına nisbəti kimi hesablanır. Həyat sığortasında bu göstərici birbaşa riskin ölçüsüdür. Məsələn, əgər müəyyən yaşda ölüm ehtimalı yüksəkdirsə, bu o deməkdir ki, sığorta şirkətinin ödəniş etmə ehtimalı da yüksəkdir və bu, sığorta haqqının artmasına səbəb olur [3].

Bununla yanaşı, yaşam ehtimalı da eyni dərəcədə vacibdir və bu iki göstərici bir-birini tamamlayır. Sağ qalma ehtimalı çox sadə şəkildə belə ifadə olunur:

$$p_x = 1 - q_x \quad (2)$$

Yəni bir insan ya öləcək, ya da sağ qalacaq – bu iki halın cəmi 1-ə bərabərdir. Bu sadə münasibət həyat sığortasında olduqca geniş istifadə olunur. Xüsusilə uzunmüddətli müqavilələrdə müəyyən dövr ərzində şəxsin sağ qalma ehtimalı əsas götürülərək müxtəlif ödəniş planları qurulur. Bu səbəbdən  $q_x$  və  $p_x$  göstəriciləri aktuari hesablamaların mərkəzində dayanır.

Ölüm cədvəllərində başqa bir vacib anlayış sağ qalanların sayıdır. Bu göstərici başlanğıcda qəbul olunan müəyyən sayda insanın (məsələn, 100000 nəfərin) yaş artdıqca necə azaldığını göstərir. Bu proses aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$l_x = l_0 \cdot \prod_{i=0}^{x-1} (1 - q_i) \quad (3)$$

Bu düstur bir az daha ümumi xarakter daşıyır və göstərir ki, hər yaşda sağ qalanların sayı əvvəlki yaşlarda ölüm ehtimalları nəzərə alınmaqla hesablanır. Praktiki olaraq bu o deməkdir ki, yaş artdıqca sağ qalanların sayı tədricən azalır. Sığorta şirkətləri bu məlumatdan istifadə edərək gələcəkdə neçə nəfər üçün ödəniş etməli olacaqlarını təxmin edirlər.

Həyat sığortasında xüsusi əhəmiyyət daşıyan göstəricilərdən biri də gözlənilən ömür uzunluğudur. Bu göstərici insanın müəyyən yaşa çatdıqdan sonra orta hesabla nə qədər yaşayacağını göstərir və aşağıdakı kimi hesablanır:

$$e_x = \frac{T_x}{l_x} \quad (4)$$

Burada  $T_x$  həmin yaşdan sonrakı ümumi yaşanacaq illərin cəmini göstərir. Bu göstərici xüsusilə sığorta müqavilələrinin müddətinin müəyyən olunmasında və gələcək ödənişlərin planlaşdırılmasında istifadə olunur. Məsələn, əgər müəyyən yaşda olan şəxslərin gözlənilən ömür uzunluğu yüksəkdirsə, bu o deməkdir ki, sığorta ödənişləri daha uzun müddət ərzində həyata keçirilə bilər [4].

İnsan həyatında ölüm ehtimalının dəyişməsi də xüsusi diqqət tələb edən məsələdir. Gündəlik müşahidələrdən də görmək olar ki, bütün yaşlarda risk eyni deyil. Erkən yaşlarda, xüsusilə həyatın ilk illərində müəyyən risklər mövcud olur. Sonrakı dövrdə bu risk azalır və müəyyən bir müddət aşağı səviyyədə qalır. Lakin yaş artdıqca ölüm ehtimalı yenidən yüksəlir və bu artım daha sürətli xarakter alır. Bu səbəbdən həyat sığortasında yaş amili əsas meyarlardan biri hesab olunur və tariflər də məhz bu fərqlərə uyğun olaraq müəyyən edilir.

Bəzi hallarda ölüm intensivliyini daha ümumi şəkildə ifadə etmək üçün xüsusi modellərdən istifadə olunur. Bu modellərdən biri aşağıdakı kimi göstərilə bilər:[1]

$$\mu_x = B \cdot c^x \quad (5)$$

Bu düstur onu göstərir ki, yaş artdıqca ölüm riski müəyyən qanunauyğunluq üzrə artır. Bu cür modellər xüsusilə nəzəri hesablamalarda və uzunmüddətli proqnozlarda istifadə olunur. Praktik baxımdan bu yanaşma sığorta şirkətlərinə riskin necə dəyişəcəyini əvvəlcədən görməyə kömək edir [4].

Ümumilikdə baxanda, ölüm cədvəlləri və bu cədvəllərə əsaslanan düsturlar həyat sığortasında bütün hesablamaların əsasını təşkil edir. Bu düsturlar vasitəsilə risklər ölçülür, sığorta haqları müəyyən edilir və şirkətin maliyyə sabitliyi qorunur. İlk baxışda bu düsturlar sadə görünsə də, onların tətbiqi olduqca məsuliyyətlidir və dəqiqlik tələb edir. Çünki kiçik bir səhv belə gələcəkdə ciddi maliyyə problemlərinə səbəb ola bilər.

Həyat sığortasında düzgün və əsaslandırılmış qərarların verilməsi üçün ölüm cədvəllərinin və aktuari düsturların rolu danılmazdır. Bu vasitələr qeyri-müəyyənliyi tam aradan qaldırmasa da, onu müəyyən qədər idarə olunan səviyyəyə gətirir. Ölüm ehtimalları, yaşam göstəriciləri və gözlənilən ömür uzunluğu kimi anlayışlar sığorta sisteminin əsasını təşkil edir. Bu baxımdan ölüm cədvəllərinin düzgün qurulması və tətbiqi həm nəzəri, həm də praktik baxımdan böyük əhəmiyyət daşıyır.

#### **Ədəbiyyat**

1. T.R.Məmtiyev. Həyat sığortasının riyazi-demoqrafik əsasları. Bakı, 2017, 528 s.
2. Li, Nan, Ronald Lee, and Patrick Gerland. "Extending the Lee-Carter Method to Model the Rotation of Age Patterns of Mortality Decline for Long-Term Projections." *Demography*, vol. 50, no. 6, 2013, pp. 2037–2051.
3. Modig, Karin, Roland Rau, and Anders Ahlbom. "Life Expectancy: What Does It Measure?" *BMJ Open*, vol. 10, no. 7, 2020, e035932.
4. Zafeiris, K. N., and A. Kostaki. "Recent Mortality Trends in Greece." *Communications in Statistics - Theory and Methods*, vol. 48, no. 1, 2019, pp. 112–126.

### **POPULYASIYA DİNAMİKASININ RİYAZİ MODELİ VƏ ONUN ŞƏBƏKƏ ÜSULLARI ƏSASINDA HƏLLİ**

**Əlizadə Pərvin Elçin qızı, Ələkbərzadə Kamran Seymur oğlu**

*(BDU, Mexanika-riyaziyyat fakültəsi)*

*palizade@inbox.ru, dr.kami451@mail.ru*

**Xülasə:** İşdə nümunə model əsasında populyasiya dinamikasının riyazi modeli qurulub və onun şəbəkə üsulları əsasında ədədi həlli araşdırılıb.

**Açar sözlər:** populyasiya, diskret analoq, ədədi həll.



Populyasiya dinamikasının modeli kimi "yirtıcı qurban" modelindən istifadə edilir [1]:

$$N_t = (\mu_N N_x)_x + (\mu_N N_y)_y + C_1(N_0 - N)N - C_2P \quad (1)$$

$$P_t + uP_x + vP_y = (\mu_P P_x)_x + (\mu_P P_y)_y - C_3P + C_4NP \quad (2)$$

$$\alpha u + \beta(u_t + uu_x + vv_y) = (\mu_v u_x)_x + (\mu_v u_y)_y + C_5N_x \quad (3)$$

$$\alpha v + \beta(v_t + uv_x + vv_y) = (\mu_v v_x)_x + (\mu_v v_y)_y + C_5N_y \quad (4)$$

burada  $N$  – qurbanların toplumu;  $P$  – yirtıcıların toplumu;  $N_0$  – maksimal toplum;  $u, v$  – yirtıcıların hərəkət sürətinin vektorunun elementləri;  $C_1$  – qurbanların artım əmsali;  $C_2$  – qurbanların ölüm əmsali;  $C_3$  – yirtıcıların artım əmsali;  $C_4$  – yirtıcıların ölüm əmsali;  $C_5$  – taksis əmsali;  $\mu_N$  – qurbanların hərəkət əmsali;  $\mu_P$  – yirtıcıların hərəkət əmsali;  $\mu_v$  – sürət vektorunun dəyişmə əmsali;  $\alpha, \beta$  – çəki əmsallarıdır.

(1) – (4) tənliklər sistemi aşağıdakı başlanğıc şərtlər daxilində nəzərdən keçirilir:

$$\begin{aligned} N(x, y, t) &= N_0(x, y), \quad P(x, y, t) = P_0(x, y), \\ u(x, y, t) &= 0, \quad v(x, y, t) = 0, \quad t = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

və sərhəd şərtləri:

$$\begin{aligned} N_n(x, y, t) &= 0, \quad P_n(x, y, t) = 0 \\ u(x, y, t) &= 0, \quad v(x, y, t) = 0 \quad (x, y) \in \gamma \end{aligned} \quad (6)$$

Məsələyə düzbucaqlı oblastda baxırıq. Oblastı müntəzəm düzbucaqlı şəbəkə ilə örtürük [2]:

$$\begin{aligned} (q_0)_{ij} u c'_x &\approx (q_1)_{ij} u_{i+\frac{1}{2}j} \frac{c_{i+1,j} - c_{ij}}{2h_x} + (q_2)_{ij} u_{i-\frac{1}{2}j} \frac{c_{ij} - c_{i-1,j}}{2h_x} \\ (q_0)_{ij} (\mu c'_x)'_x &\approx (q_1)_{ij} \mu_{i+\frac{1}{2}j} \frac{c_{i+1,j} - c_{ij}}{h_x^2} - (q_2)_{ij} \mu_{i-\frac{1}{2}j} \frac{c_{ij} - c_{i-1,j}}{h_x^2} \end{aligned}$$

burada  $q_m$  – oblastın doldurulma əmsalıdır.

(1) tənliyinin Neyman sərhəd şərtləri halında approksimasiyası aşağıdakı şəkildə olar:

$$\begin{aligned} (q_0)_{ij} \frac{\bar{N}_{ij} - N_{ij}}{\tau} &= (q_1)_{ij} (\mu_N)_{i+\frac{1}{2}j} \frac{\bar{N}_{i+1,j} - \bar{N}_{ij}}{h_x^2} - \\ &- (q_2)_{ij} (\mu_N)_{i-\frac{1}{2}j} \frac{\bar{N}_{i,j} - \bar{N}_{i-1,j}}{h_x^2} + (q_3)_{ij} (\mu_N)_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\bar{N}_{i,j+1} - \bar{N}_{i,j}}{h_y^2} - \\ &- (q_4)_{ij} (\mu_N)_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{\bar{N}_{i,j} - \bar{N}_{i,j-1}}{h_y^2} + (q_0)_{ij} (C_1(N_0 - N_{i,j})\bar{N}_{ij} - C_2P_{ij}) \end{aligned} \quad (7)$$

burada  $\hat{N}$  – qurbanların növbəti zaman təbəqəsindəki toplumunun qiymətidir,  $N$  – qurbanların cari zaman təbəqəsindəki toplumunun qiymətidir,  $\bar{N} = \sigma \hat{N}_{ij} + (1 - \sigma)N_{ij}$ ,  $\sigma \in [0,1]$

(2) tənliyinin diskret analoqu aşağıdakı kimidir:

$$\begin{aligned} & (q_0)_{ij} \frac{\bar{P}_{ij} - P_{ij}}{\tau} + (q_1)_{ij} u_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\bar{P}_{i+1,j} - \bar{P}_{ij}}{2h_x} + \\ & + (q_2)_{ij} u_{i-\frac{1}{2},j} \frac{\bar{P}_{i,j} - \bar{P}_{i-1,j}}{2h_x} + (q_3)_{ij} v_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\bar{P}_{i,j+1} - \bar{P}_{i,j}}{2h_y} + \\ & + (q_4)_{ij} v_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{\bar{P}_{i,j} - \bar{P}_{i,j-1}}{2h_y} = (q_1)_{ij} (\mu_P)_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\bar{P}_{i+1,j} - \bar{P}_{ij}}{h_x^2} - \\ & - (q_2)_{ij} (\mu_P)_{i-\frac{1}{2},j} \frac{\bar{P}_{i,j} - \bar{P}_{i-1,j}}{h_x^2} + (q_3)_{ij} (\mu_P)_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\bar{P}_{i,j+1} - \bar{P}_{i,j}}{h_y^2} - \\ & - (q_4)_{ij} (\mu_P)_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{\bar{P}_{i,j} - \bar{P}_{i,j-1}}{h_y^2} + (q_0)_{ij} (-C_3 + C_4 N_{ij}) \bar{P}_{i,j} \end{aligned} \quad (8)$$

(3)-(4) tənliklərinin birinci növ sərhəd şərtləri halında approksimasiyasını yazmaq,  $u$  elementi üçün

$$\begin{aligned} & \alpha \bar{u}_{ij} + \beta \left( \frac{\hat{u}_{ij} - u_{ij}}{\tau} + u_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{ij}}{2h_x} + u_{i-\frac{1}{2},j} \frac{\bar{u}_{ij} - \bar{u}_{i-1,j}}{2h_x} + \right. \\ & + v_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\bar{u}_{i,j+1} - \bar{u}_{ij}}{2h_y} + v_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{\bar{u}_{ij} - \bar{u}_{i,j-1}}{2h_y} \left. \right) = (\mu_v)_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\bar{u}_{i+1,j} - \bar{u}_{ij}}{h_x^2} - \\ & - (\mu_v)_{i-\frac{1}{2},j} \frac{\bar{u}_{ij} - \bar{u}_{i-1,j}}{h_x^2} + (\mu_v)_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\bar{u}_{i,j+1} - \bar{u}_{ij}}{h_y^2} - (\mu_v)_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{\bar{u}_{ij} - \bar{u}_{i,j-1}}{h_y^2} + \\ & + C_5 \frac{N_{i+1,j} - N_{i-1,j}}{2h_x} \end{aligned} \quad (9)$$

$v$  elementi üçün

$$\begin{aligned} & \alpha \bar{v}_{ij} + \beta \left( \frac{\hat{v}_{ij} - v_{ij}}{\tau} + u_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\bar{v}_{i+1,j} - \bar{v}_{ij}}{2h_x} + u_{i-\frac{1}{2},j} \frac{\bar{v}_{ij} - \bar{v}_{i-1,j}}{2h_x} + \right. \\ & + v_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\bar{v}_{i,j+1} - \bar{v}_{ij}}{2h_y} + v_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{\bar{v}_{ij} - \bar{v}_{i,j-1}}{2h_y} \left. \right) = (\mu_v)_{i+\frac{1}{2},j} \frac{\bar{v}_{i+1,j} - \bar{v}_{ij}}{h_x^2} - \\ & - (\mu_v)_{i-\frac{1}{2},j} \frac{\bar{v}_{ij} - \bar{v}_{i-1,j}}{h_x^2} + (\mu_v)_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{\bar{v}_{i,j+1} - \bar{v}_{ij}}{h_y^2} - (\mu_v)_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{\bar{v}_{ij} - \bar{v}_{i,j-1}}{h_y^2} + \\ & + C_5 \frac{N_{i,j+1} - N_{i,j-1}}{2h_y} \end{aligned} \quad (10)$$

(9)-(10) ifadələri (3)-(4) tənliklərini pilləvari oblast halında approksimasiya edir. (7)-(10) tənlikləri (1)-(4) tənliklər sisteminin diskret analoqu olub, yırtıcı

və onun qurbanı üçün populyasiyaların toplumunun dəyişmə dinamikasını ifadə edir.

### **Ədəbiyyat**

1. А.Е.Чистяков, Ю.В.Першина. Математическая модель динамики популяций и ее численное решение на основе сеточных методов. Алманах современной науки и образования, №1(68), 2013, с. 165-170.
2. В.Вольтерра. Математическая теория борьбы за существование. М, Наука, 1976.

## **QEYRİ-MƏHDUD TƏK POPULYASIYANIN DİSKRET MODELİNİN QURULMASI**

**Əlizadə Pərvin Elçin qızı, Ələkbərzadə Kamran Seymur oğlu**

*(BDU, Mexanika-riyaziyyat fakültəsi)*

*palizade@inbox.ru, dr.kami451@mail.ru*

**Xülasə:** *İşdə qeyri-məhdud tək populyasiyanın diskret modelinin qurulmasına baxılır. Başlanğıc qiymət seçərək populyasiyanın zaman üzrə dinamikası hesablanır.*

**Açar sözlər:** *populyasiya, diskret model, artım əmsali*

Tutaq ki, populyasiyanın  $n$  zaman dövründə artım sürəti, populyasiyanın bu zaman dövrünün başlanğıcındakı ölçüsü ilə mütənasibdir [1]

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n = a \cdot x_n \quad (1)$$

Onda növbəti zaman anında populyasiyanın sayı aşağıdakı düsturla təyin olunur

$$x_{n+1} = (1+a) \cdot x_n \quad (2)$$

(2)-yə görə yazı bilərik

$$x_1 = (1+a) \cdot x_0$$

$$x_2 = (1+a) \cdot x_1 = (1+a)(1+a)x_0 = (1+a)^2 x_0$$

$$x_3 = (1+a)x_2 = (1+a)(1+a)(1+a)x_0 = (1+a)^3 x_0$$

... ..

$$x_n = (1+a)^n \cdot x_0$$

$x_0$  başlanğıc qiyməti məlum olduqda populyasiyanın zaman üzrə dinamikasını hesablamaq olar.  $r = a + 1$  artım əmsalından asılı olaraq aşağıdakı hallar mümkündür [2]:

- 1)  $a > 0, (1+a) > 1 \Rightarrow (1+a)^n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty \text{ halında})$  – qeyri-məhdud artım;
- 2)  $a = 0, 1+a=1$  – populyasiya sayı dəyişmir;
- 3)  $-1 < a < 0, 0 < 1+a < 1 \Rightarrow x_n \rightarrow 0$  – populyasiyanın məhv olması;
- 4)  $a = -1$  – bir zaman dövründə məhv olma;

5)  $a < -1$  – mənfi say ( qeyri-real hal)

(1) tənliyi adətən

$$x_{n+1} = r x_n$$

şəklində ifadə olunur.

(2) tənliyi tək populyasiyanın eksponensial modelinin diskret analoqu adlanır.

Tutaq ki,  $r$  artım əmsalı populyasiyanın sayından asılıdır, yəni populyasiyanın sayı artdıqca əmsal  $r \sim r(1 - x_n)$  qanunu üzrə azalacaqdır. Onda (2) tənliyini aşağıdakı kimi yazı bilərik

$$x_{n+1} = x_n \cdot r(1 - x_n), n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

(3) düsturuna Ferhyulst-Pirl modelinin diskret analoqu deyilir. Bu düstur təkcə populyasiya dinamikasını deyil, təbiətdə baş verən bir çox digər prosesləri də təsvir edə bilər.

Qeyd edək ki, (3)-də  $x$ -in qiyməti  $[0;1]$  aralığında,  $r$ -in qiyməti isə  $[0;4]$  aralığında dəyişə bilər.

### **Ədəbiyyat**

1. Г.Ю.Ризниченко., Математические модели в биофизике и экологии, М., 2003, 184 с.
2. Г.Ю.Ризниченко., А.Б.Рубин. Математические модели биологических продукционных процессов. М., МГУ, 1993

## **BİR GECİKMƏYƏ MALİK VOLTERRA TİP FƏRQ TƏNLİKLƏRİ İLƏ TƏSVİR OLUNAN OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ŞƏRTİ**

**Əsədova Fidan Sarvan qızı**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*mirzoyevakh@gmail.com*

**Xülasə:** İşdə gecikməyə malik Volterra tip optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Məsələdə fərz olunur ki, funksional qeyri-xətti, idarə oblası qabarıq çoxluqdur. Baxılan şərtlər daxilində mümkün idarənin optimallığı üçün xəttilləşdirilmiş maksimum şərti isbat olunur.

**Açar sözlər:** gecikməyə malik optimal idarəetmə məsələsi, mümkün idarə, optimal idarə, Volterra tip fərq tənlikləri, xəttilləşdirilmiş maksimum şərti.

Tutaq ki, idarə olunan proses aşağıdakı şəkildə tənliklər sistemi

$$x(t+1) = A(t)x(t) + \sum_{\tau=t_0}^t C(\tau, x)x(\tau) + B(t)x(t-h) + f(t, u(t)), \quad (1)$$

$$x(t) = a(t), \quad t \in E_{t_0} = [t_0 - h, t_0], \quad (2)$$

və

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T \quad (3)$$

məhdudiyyət şərti ilə təsvir olunur.

(3) məhdudiyyət şərtini ödəyən hər bir  $u(t)$  idarəsinə mümkün idarə deyilir.

Keyfiyyət funksionalı

$$S(u) = \varphi(x(t_1)) \quad (4)$$

şəklində verilir.

Məsələdə fərz olunur ki, hər bir  $u(t)$  mümkün idarəsinə (1)-(2) Volterra tip gecikməyə malik məsələnin yeganə  $x(t)$  həlli uyğundur.

Burada  $A(t), B(t), C(\tau, x) - (n \times n)$  ölçülü verilmiş diskret matris funksiyalar,  $t_0, t_1 -$  sabit ədədlər,  $h = \text{const} > 0 -$  verilmiş natural ədəd (gecikmə),  $f(t, u) -$  verilmiş  $n$  ölçülü vektor funksiya,  $a(t) -$  verilmiş kəsilməz vektor funksiya,  $\varphi(x) -$  verilmiş kəsilməz diferensiallanan skalyar funksiya,  $u(t) - r -$  ölçülü idarəedici vektor funksiya olub, öz qiymətini boş olmayan və məhdud  $U$  çoxluğundan alır.

(4) qeyri-xətti funksionalına (1)-(3) məhdudiyyət şərtləri daxilində minimum qiymət verən mümkün idarəyə optimal idarə deyilir.

Məqsədimiz (1)-(4) optimal idarəetmə məsələsində qoyulan şərtlər daxilində optimallıq üçün zəruri şərt almaqdır.

Hamilton-Pontryagin funksiyasının diskret analoqunu aşağıdakı şəkildə daxil edək:

$$H(t, u, \psi) = \psi^{0'}(t)f(t, u, v).$$

Burada  $\psi^0(t)$  vektor funksiyasının aşağıdakı tənliklər sisteminin həlli olduğunu fərz edək.

$$\psi^0(t-1) = A'(t)\psi^0(t) + B'(t+h)\psi^0(t+h) + \sum_{\tau=t}^{t_1-1} \psi^{0'}(\tau)C(x, \tau),$$

$$t_0 \leq t \leq t_1 - 1 - h,$$

$$\psi^0(t-1) = A'(t)\psi^0(t) + \sum_{\tau=t}^{t_1-1} \psi^{0'}(\tau)C(x, \tau),$$

$$t_1 - h \leq t \leq t_1 - 1,$$

$$\psi(t-1) = -\varphi_x(x^0(t_1)).$$

Bu tənliklər sisteminə qoşma sistem deyilir.

Artım üsulunun bir variantından [1, 2] istifadə edərək funksionalın artımı

$$\Delta J(u^0) = J(u) - J(u^0) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [H(t, u(t), \psi^0(t)) - H(t, u^0(t), \psi^0(t))] + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) \quad (5)$$

şəklində göstərilmişdir.

Fərz edilir ki,

$$f(t, U, u^0(t)) = \{\alpha: \alpha = f(t, u(t)), u(t) \in U, t \in T\} \quad (6)$$

çoxlğu qabarıqdır.

Bu (5) artım düsturu vasitəsilə aşağıdakı hökm isbat edilmişdir.

**Teorem 1.** Əgər verilən şərtlər daxilində (6) çoxluğu qabarıqdırsa, onda  $u^0(t)$  mümkün idarəsinin optimal idarə olması üçün zəruri şərt

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} [H(t, u_1(t), \psi^0(t)) - H(t, u^0(t), \psi^0(t))] \leq 0$$

bərabərsizliyinin ixtiyari  $u_1(t) \in U, t \in T$  üçün ödənməsidir.

Baxılan məsələdə əlavə olaraq fərz edilir ki,  $U$  idarə oblastı qabarıq çoxluqdur,  $f(t, u)$  funksiyası isə  $u$ -ya nəzərən kəsilməz törəməyə malik olan  $n$ -ölçülü vektor funksiyadır.

Daxil edilmiş şərtlər daxilində optimallıq üçün xəttləşdirilmiş maksimum prinsipinin diskret analoqu isbat edilmişdir.

**Teorem 2.** Baxılan məsələdə  $U$  çoxluğu qabarıq,  $f(t, u)$  funksiyası isə  $u$  –ya nəzərən kəsilməz törəməyə malik olduğu şərtlər daxilində,  $u^0(t)$  mümkün idarəsinin baxılan məsələdə optimal idarə olması üçün zəruri şərt

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_u(t, u^0(t), \psi^0(t))(u_1(t) - u^0(t)) \leq 0$$

bərabərsizliyinin bütün  $u_1(t) \in U$  üçün ödənilməsidir.

### Ədəbiyyat

1. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Альсевич В. В. Методы оптимизации. Минск: Четыре четверти, 2011. 472 с.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Особые оптимальные управления. М.: URSS, 2013. 256 с

## BİR GECİKMƏYƏ MALİK VOLTERRA TİP FƏRQ TƏNLİKLƏRİ İLƏ TƏSVİR OLUNAN QEYRİ-XƏTTİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ I VƏ II TƏRTİB ZƏRURİ ŞƏRTLƏR.

**Əsədova Fidan Sarvan qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

mirzoyevakh@gmail.com

**Xülasə:** İşdə gecikməyə malik Volterra tip optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. İdarə oblası qabarıq olan halda optimallıq üçün ikinci tərtib zəruri şərtlər alınmışdır.

**Açar sözlər:** gecikməyə malik optimal idarəetmə məsələsi, mümkün idarə, Volterra tip fərq tənlikləri, zəruri şərt, Eyler tənliyinin analoqu.

Fərz edək ki, baxdığımız diskret proses

$$x(t+1) = A(t)x(t) + \sum_{\tau=t_0}^t C(\tau, x)x(\tau) + B(t)x(t-h) + f(t, u(t)) \quad (1)$$

Volterra tip gecikməyə malik olan tənlik və

$$x(t) = a(t), \quad t \in E_{t_0} = [t_0 - h, t_0] \quad (2)$$

başlanğıc şərti ilə təsvir olunur.

Burada  $A(t), B(t), C(\tau, x) - c$  ( $n \times n$ ) ölçülü verilmiş diskret matris funksiyalarlar,  $t_0, t_1$  – sabitlər,  $h$  – gecikməni xarakterizə edən verilmiş natural ədəddir,  $a(t)$  – verilmiş  $n$  ölçülü vektor funksiya,  $f(t, u)$  vektor-funksiyası isə  $u$  – ya nəzərən ikinci tərtib xüsusi törəməyə,  $u(t) - r$  ölçülü idarəedicilə vektor funksiya olub, öz qiymətlərini boş olmayan və məhdud  $U$  çoxluğundan alır, yəni aşağıdakı məhdudiyyət şərtini ödəyir.

$$u(t) \in U \subset R^r, t \in T. \quad (3)$$

Verilən məhdudiyyət şərtlərini ödəyən  $u(t)$  idarəsinə mümkün idarə deyilir.

İndi baxdığımız məsələnin bütün mümkün idarələrə uyğun olan həlləri üzərində qeyri-xətti olan

$$J(u) = \varphi(x(t_1)) \quad (4)$$

funksionalını təyin edək.

$\varphi(x)$  iki dəfə kəsilməz, diferensiallanan skalyar funksiyadır.

(4) funksionalına minimum qiymət verən mümkün idarəyə optimal idarə deyilir. Burada əsas məqsəd xəttiləşdirilmiş zəruri şərt və onun cırlaşdığı halı, yəni kvaziməxsusi halı tədqiq etməkdir.

Tutaq ki,  $U$  çoxluğu qabarıq çoxluqdur.

Hamilton-Pontryagin funksiyasının diskret analoqu aşağıdakı şəkildə daxil edək.

$$H(t, u, \psi) = \psi^{0'}(t)f(t, u, v).$$

Burada  $\psi^0(t)$  vektor funksiyasının aşağıdakı tənliklər sisteminin həlli olduğunu fərz edək.

$$\begin{aligned} \psi^0(t-1) &= A'(t)\psi^0(t) + B'(t+h)\psi^0(t+N) + \\ &+ \sum_{t=t_0}^{t_1-1-h} \sum_{\tau=t}^{t_1-1} \psi^{0'}(\tau)C(x, \tau), \quad t_0 \leq t \leq t_1-1-h, \end{aligned}$$

$$\psi^0(t-1) = A'(t)\psi^0(t) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1-h} \sum_{\tau=t}^{t_1-1} \psi^{0'}(\tau)C(x, \tau),$$

$$t_1-h \leq t \leq t_1-1,$$

$$\psi(t_1-1) = -\varphi_x(x^0(t_1)).$$

Artım üsulununun bir variantından istifadə edərək funksionalın artımını aşağıdakı şəkildə yazı bilərik.

$$\begin{aligned} \Delta J(u^0) &= J(u^0 + \Delta u_\varepsilon(t)) - J(u^0) = \\ &= -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_u(t, u^0(t), \psi^0(t))(u(t) - u^0(t)) - \\ &- \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left( (u(t) - u^0(t))' H_{uu}(t, u^0(t), \psi^0(t)) (u(t) - u^0(t)) - \right. \\ &- \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} \left( (u(\tau) - u^0(\tau))' f_u(\tau, u^0(\tau)) K(\tau, s) \right. \\ &\times f_u(s, u^0(s)) (u(s) - u^0(s)) + o(\varepsilon)^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Burada

$$K(\tau, s) = F'(t_1, \tau) \varphi_{xx}(\Delta x(t_1)) F(t_1, s).$$

Belə ki,  $F(t, \tau)$  Koşi matrisi olub

$$F(t, \tau-1) = F(t, \tau)A(\tau) + F(t, \tau+h)B(\tau+h) + \sum_{s=\tau}^{t-1} F(t, s)C(x, s),$$

$$t_0 \leq \tau \leq t-1-h$$

$$F(t, \tau-1) = F(t, \tau)A(\tau)$$

$$t-h \leq \tau \leq t-1$$

$$F(t, \tau) = 0, \tau > t-1,$$

$$F(t, t-1) = E.$$

tənliklər sisteminin həllidir.



Alınmış (5) ayrılışından istifadə edərək, idarə oblastının qabarıqlığı şərti daxilində mümkün idarənin optimallığı üçün xəttiləşdirilmiş forma adlanan zəruri şərt alınmışdır.

**Teorem 1.** Əgər  $U$  çoxluğu qabarıqdırsa, onda  $u^0(t)$  mümkün idarəsinin baxılan optimal idarəetmə məsələsində optimal idarə olması üçün zəruri şərt

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} H'_u(t, u^0(t), \psi^0(t))(u(t) - u^0(t)) \leq 0,$$

bərabərsizliyinin bütün  $u(t) \in U, t \in T$  idarələri üçün ödənməsidir.

Lakin bu zəruri şərt cırılaşa bilər. Bu halda yeni optimallıq üçün zəruri şərtlərin tapılması lazım gəlir [1-3].

**Teorem 2.**  $u^0(t)$  kvaziməxsusi idarəsinin baxılan optimal idarəetmə məsələsində optimal idarə olması üçün

$$\begin{aligned} & \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left( (u(t) - u^0(t))' H_{uu}(t, u^0(t), \psi^0(t)) (u(t) - u^0(t)) + \right. \\ & \quad + \sum_{\tau=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t_1-1} \left( (u(\tau) - u^0(\tau))' f_u(\tau, u^0(\tau)) K(\tau, s) \right. \\ & \quad \left. \left. \times f_u(s, u^0(s)) (u(s) - u^0(s)) \right) \right) \leq 0. \end{aligned}$$

bərabərsizliyinin bütün  $u(t) \in U, t \in T$  üçün ödənməsi zəruri şərtidir

### Ədəbiyyat

1. Мансимов К.Б. О квазиособых управлениях в дискретных системах с запаздыванием. Вестник Пермского университета. 2021, Вып. 3(54), с 19-24
2. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж., Абдуллаева Н. Г. Необходимое условие оптимальности второго порядка в задачах управления, описываемых системой интегро-дифференциальных уравнений с запаздыванием. Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2018. Т. 22, № 2. С. 254-268
3. Марданов М.Дж., Мансимов К.Б., Меликов Т.К. Исследование особых управлений и необходимые условия оптимальности второго порядка в системах с запаздыванием. Баку: Элм, 2013. 355 с.

## İQTİSADI MƏSƏLƏNİN HƏLLİNDƏ MÜVAFİQ OPTİMALLAŞDIRMA ÜSULUNUN SEÇİLMƏSİ

**Əsgərova İlkanə Ramil qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

ilkanaskerova@gmail.com

**Xülasə:** Təqdim olunan işdə iqtisadi optimallaşdırma məsələsinin riyazi quruluşu, məsələyə daxil olan dəyişənlərin seçilməsi və məqsəd funksiyasının müəyyən olunması və bununla yanaşı məsələni həll etmək üçün müvafiq optimallaşdırma üsulunun seçilməsi məsələləri öyrənilir.

**Açar sözlər:** İqtisadi məsələ, riyazi model, optimallaşdırma üsulu.

İqtisadi optimallaşdırma məsələsinin riyazi quruluşu qərar dəyişənlərinin seçilməsi və məqsəd funksiyasının optimallaşdırılması ilə müəyyən olunur [1,2]. Ümumi halda məsələ aşağıdakı şəkildə ifadə edilir:

$$\min_{x \in \Omega} f(x)$$

və ya

$$\max_{x \in \Omega} f(x).$$

Burada  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$  qərar dəyişənləri,  $f(x): R^n \rightarrow R$  məqsəd funksiyası,  $\Omega = \{x \in R^n: g_i(x) \leq 0, h_j(x) = 0\}$  mümkün həll çoxluğu.

Məhdudiyyət şərtləri aşağıdakı kimi yazılır:

$$g_i(x) \leq 0, i = 1, \dots, m$$

$$h_j(x) = 0, j = 1, \dots, k$$

İnvestisiya portfelinin optimallaşdırılması məsələsində qərar dəyişənləri  $x_i$ - i-ci aktivə ayrılan kapital payıdır və

$$x_i \in [0,1], \sum_{i=1}^n x_i = 1$$

şərtini ödəyir.

Portfelin gəliri təsadüfi dəyişən kimi qəbul edilir:

$$R_p = \sum_{i=1}^n x_i R_i$$

burada  $R_i$ — i-ci aktivin gəliridir.

Gözlənilən gəlir:

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i = x^T \mu$$

burada  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T$ .

Portfelin riski dispersiya ilə ölçülür:

$$\sigma_p^2 = \text{Var}(R_p),$$

$$\sigma_p^2 = \text{Var}(\sum_{i=1}^n x_i R_i).$$

Kovariasiya matrisi daxil edək:

$$\Sigma = (\sigma_{ij}), \sigma_{ij} = \text{Cov}(R_i, R_j).$$

Bu halda:

$$\sigma_p^2 = x^T \Sigma x$$

İki aktivli halda:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_p^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2x_1 x_2 \sigma_{12}$$

Beləliklə portfel optimallaşdırma məsələsi aşağıdakı riyazi formaya gətirilir:

$$\begin{aligned} \min x^T \Sigma x \\ x^T \mu &= R^* \\ x_1 + x_2 &= 1, x \geq 0 \end{aligned}$$

Bu modelin qurulması üçün aşağıdakı statistik göstəricilər tələb olunur:

$$r_t^{(i)} = \ln \frac{P_t^{(i)}}{P_{t-1}^{(i)}}, \quad \mu_i = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_t^{(i)}, \quad \sigma_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (r_t^{(i)} - \mu_i)^2,$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (r_t^{(i)} - \mu_i)(r_t^{(j)} - \mu_j)$$

$\mu, \Sigma$  tam müəyyən olunur

$$\min x^T \Sigma x, Ax = b, x \geq 0$$

formasında alınan məsələ kvadratik məqsəd funksiyası və xətti məhdudiyyətlərdən ibarətdir. Bu məsələnin həlli Laqranj vuruqları üsulu ilə həll olunur.

İqtisadi optimallaşdırma məsələlərinin əksəriyyətində məqsəd funksiyası və məhdudiyyətlər xətti formada qurulur [1]. Bu halda məsələ aşağıdakı kimi yazılır:

$$\begin{aligned} \max c^T x \\ Ax \leq b, x \geq 0 \end{aligned}$$

Belə modellərdə həm məqsəd funksiyası, həm də məhdudiyyətlər birinci dərəcəli olduğuna görə məsələ xətti proqramlaşdırma sinfinə aiddir və XP üsulu ilə həll olunur.

Optimallaşdırma məsələsini həll etmək üçün uyğun optimallaşdırma üsulunun seçilməsi cədvəl 1-də verilir.

**Cədvəl 1.** Optimallaşdırma üsulunun seçilməsi üçün riyazi diaqnostika meyarları

| Diaqnostika meyarı    | Riyazi yoxlama                                                                          | Qərar                       | Seçilən üsul                   |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|--------------------------------|
| Xəttilik              | $Z = c^T x, \quad Ax \leq b$<br>(bütün ifadələr 1-ci dərəcəli)                          | Xəttilik model              | Xəttilik proqramlaşdırma (LP)  |
| Qeyri-xəttilik        | $Z = \sigma_p^2$<br>$= x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2$<br>$+ 2x_1 x_2 \sigma_{12}$ | Kvadratik məqsəd funksiyası | Kvadratik proqramlaşdırma (QP) |
| Tam ədəd şərti        | $x_i \in Z$                                                                             | Diskret qərar               | Tam ədəd proqramlaşdırma       |
| İkili şərt            | $x_i \in \{0,1\}$                                                                       | Seçim problemi              | 0-1 proqramlaşdırma            |
| Çox məqsədlilik şərti | $\max(Z_1, Z_2, \dots)$                                                                 | Kompromis tələb edir        | Çoxməqsədli optimallaşdırma    |

**Ədəbiyyat**

- İsgəndərov A.D., Tağıyev R.Q., Həşimov S.A. Optimallaşdırma üsulları məsələ və misallarla. BDU nəşriyyatı -2016, 272 s.
- Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс- 2004, 824 с.

**BİR SPEKTRAL MƏSƏLƏNİN QRİN FUNKSIYASININ QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ HAQQINDA**

**Əyyubova İlahə Rəcəb qızı, Əhmədov Saleh Zeyni oğlu**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

eyyubovailahe8@gmail.com, salehmedov0@gmail.com

**Xülasə:** işdə kompleks parametrli dörd tərtibli adi diferensial tənlik üçün spektral məsələyə baxılmışdır. Uyğun bircins tənliyin fundamental həllər sistemi qurulmuş və bundan istifadə edərək məsələnin xarakteristik determinantı öyrənilmişdir. Kompleks parametrin modulca kafi qədər böyük qiymətlərində məxsusi ədədlərin asimptotikası qurulmuşdur. Daha sonra məsələnin məlumatları üzərinə müəyyən şərtlər daxilində spektral məsələnin Qrin funksiyası üçün uyğun əlverişli qiymətlənmə isbat olunmuşdur.

**Açar sözlər:** qeyri-lokal, spektral məsələ, məxsusi ədəd, xarakteristik tənlik, Qrin funksiyası.

$$y^{IV}(x, \lambda) + \lambda^4 y(x, \lambda) = \varphi(x) \quad (1)$$

$$L_1(y) \equiv \alpha_1 y(0, \lambda) + \beta_1 y(1, \lambda) = 0 \quad (2)$$

$$L_2(y) \equiv \alpha_2 y'(0, \lambda) + \beta_2 y'(1, \lambda) = 0$$

$$L_3(y) \equiv \alpha_3 y''(0, \lambda) + \beta_3 y''(1, \lambda) = 0$$

$$L_4(y) \equiv \alpha_4 y'''(0, \lambda) + \beta_4 y'''(1, \lambda) = 0$$

$$\theta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i), \quad \theta_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$$

$$\theta_3 = \frac{-\sqrt{2}}{2}(1+i), \quad \theta_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$$

Bunlar (1)-ə uyğun xarakteristik tənliyin kökləridir.  $y_k(x, \lambda) = e^{\theta_k \lambda x}$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$  (1)-ə uyğun bircins tənliyin fundamental həllər sistemidir. (1), (2) məsələlərinin xarakteristik determinantı aşağıdakı şəkildədir:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} L_1(y_1) & L_1(y_2) & L_1(y_3) & L_1(y_4) \\ L_2(y_1) & L_2(y_2) & L_2(y_3) & L_2(y_4) \\ L_3(y_1) & L_3(y_2) & L_3(y_3) & L_3(y_4) \\ L_4(y_1) & L_4(y_2) & L_4(y_3) & L_4(y_4) \end{vmatrix}$$

Aşağıdakı kimi işarələnməni qəbul edək:

$$L(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \theta_1 \alpha_2 & \theta_2 \beta_2 & \theta_3 \gamma_2 & \theta_4 \delta_2 \\ \theta_1^2 \alpha_3 & \theta_2^2 \beta_3 & \theta_3^2 \gamma_3 & \theta_4^2 \delta_3 \\ \theta_1^3 \alpha_4 & \theta_2^3 \beta_4 & \theta_3^3 \gamma_4 & \theta_4^3 \delta_4 \end{vmatrix}$$

$$M_1 = L(\beta, \alpha, \alpha, \alpha) + L(\beta, \beta, \alpha, \beta)$$

$$M_2 = L(\alpha, \beta, \alpha, \alpha) + L(\beta, \beta, \beta, \alpha)$$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, məxsusi ədədlər  $\lambda$  kompleks müstəvisində 4 rübün hər birində yerləşir. Bu rüblərdən hər hansı birində məxsusi ədədlərin tapılması zəruridir. Məsələn, 1-ci rübdə məxsusi ədədlər aşağıdakı kimi tapılır:

$$\sqrt{2}\lambda_n = \ln \left| \frac{M_2}{M_1} \right| + i \left( \arg \left( \frac{-M_2}{M_1} \right) + 2\pi n \right) + O\left(\frac{1}{n}\right), n \rightarrow \infty$$

Teorem: Fərz edək ki,  $M_1 \neq 0$ ,  $M_2 \neq 0$  və  $\lambda_n \neq 0$  şərtləri ödənilir. Onda (1),(2) spektral məsələnin Qrin funksiyası üçün aşağıdakı qiymətlənmə doğrudur.

$$|G(x, \xi, \lambda)| \leq \frac{K}{|\lambda^3|}, \quad |\lambda| \rightarrow \infty$$

Burada  $K > 0$ ,  $G(x, \xi, \lambda)$  (1), (2) spektral məsələsinin Qrin funksiyasıdır.

Tezisdə [1,2]-də olan metodlardan istifadə edilmişdir.

### Ədəbiyyat

1. Наймарк.М.А "Линейные дифференциальные операторы", М.Наука, 1969
2. Əhmədov S.Z, Əyyubova İ.R. Qeyri-lokal sərhəd şərtli 4 tərtibli adi diferensial tənlik üçün qoyulmuş sərhəd məsələsinin məxsusi ədədlərinin tapılması. Azərbaycanın görkəmli alimi və pedaqoqu Ramin Mahmudzadənin anadan olmasının 90-cı ildönümünə həsr olunmuş " İnformasiya texnologiyaları, Süni intellekt. Böyük verilənlər: Müasir tendensiyalar, perspektivli tədqiqatlar" Respublika Elmi konfransının materialları. 25, 26 noyabr 2025, s.81-82.

## AXIN PARAMETRLƏRİNİN TƏYİNİNİN ƏDƏDİ MODELLEŞDİRİLMƏSİ

**Fərzəliyeva Humay Elçin qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

humayferzeliyeva1@gmail.com

**Xülasə:** Məqalədə qazkondensat yataqlarında axın parametrlərinin təyini üçün ədədi modelləşdirmə üsulları araşdırılır. Süxurların relaksasiyalı deformasiyası nəzərə alınaraq təzyiq, məsaməlik və kondensatladoyma kimi göstəricilərin hesablanması üçün riyazi model qurulmuşdur. Məsələn sonlu fərqlər üsulu və iterasiya yanaşması ilə diskretləşdirilərək həll edilmişdir. Nəticədə verilmiş şərtlər daxilində layın əsas parametrləri müəyyən olunmuş və qeyri-xətti deformasiya halı ilə müqayisə aparılmışdır.

**Açar sözlər:** prelaksasiya, itersiya, sonlu fərqlər, inteqral, ədədi həll.

Fərz olunur ki, süxurları relaksasiyalı deformasiya olunan qazkondensat yatağında qazkondensat quyusu  $q_c(t)$  debiti ilə istismar edilir. Qazkondensat qarışığının quyuya radial oxasimmetrik qərarlaşmamış axını zamanı layı təşkil edən süxurun relaksasiyalı deformasiyaya uğraması nəzərə alınmaqla axını səciyyələndirən dinamik göstəricilərlə (təzyiq, kondensatladoyma və b.) yanaşı, petrofiziki xarakteristika olmaq etibarilə məsaməliyin təyini aşağıdakı məsələnin həllinin tapılmasına gətirilir [1-3]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \left( \frac{k(p)F_q(s_k)p\beta(1-c(p)\bar{\gamma}(p))}{\mu_q(p)z(p)p_{at}} + \frac{k(p)F_k(s_k)S_k(p)}{\mu_k(p)a_k(p)} \right) \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( m \left( \frac{(1-s_k)p\beta(1-c(p)\bar{\gamma}(p))}{z(p)} + s_k \frac{S_k(p)}{a_k(p)} \right) \right), \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \left( \frac{k(p)F_q(s_k)p\beta c(p)}{\mu_q(p)z(p)p_{at}} + \frac{k(p)F_k(s_k)}{\mu_k(p)a_k(p)} \right) \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( m \left( \frac{(1-s_k)p\beta c(p)}{z(p)} + \frac{s_k}{a_k(p)} \right) \right), \quad r_c < r < R_k, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$m + \tau_m \frac{\partial m}{\partial t} = m_0 e^{\beta_s(p-p_0)}, \quad (3)$$

$$p(r, 0) = p_0; s_k(r, 0) = 0; m(r, 0) = m_0, \quad (4)$$

$$\left\{ 2\pi r h \left( \frac{k(p)F_q(s_k)p\beta(1-c(p)\bar{\gamma}(p))}{\mu_q(p)z(p)p_{at}} + \frac{k(p)F_k(s_k)S_k(p)}{\mu_k(p)a_k(p)} \right) \right\} \frac{\partial p}{\partial r} \bigg|_{r=r_c} = q(t), \quad (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} \bigg|_{r=R_k} = 0. \quad (6)$$

Burada  $\beta_s$  - süxurun elastiki sıxılma əmsalı;  $\tau_m$  - məsaməliyin relaksa-siya vaxtıdır.

Burada qəbul edilir ki, layın keçiriciliyi təzyiqdən asılı funksiyadır:

$$k(p) = k_0 e^{\alpha_k (p - p_0)} \quad (7)$$

Burada  $k_0$  - başlanğıc keçiricilik;  $\alpha_k$  - keçiriciliyin azalma tempini ifadə edən əmsaldır.

Məsələnin ədədi həlli qeyri-xətti əmsalların dəqiqləşdirilməsi ilə qovma üsulunun köməyiylə alınmış və quyunun debiti verildikdə təzyiq, məsaməlik, kondensatladoyma və b. göstəricilər təyin olunmuşlar.

Məsələnin ədədi həllini təyin etmək məqsədilə  $r$  dəyişənindən  $\xi = \ln r / r_c$  kimi təyin olunan  $\xi$  dəyişəninə keçilmiş,  $r$  və  $t$  dəyişənlərinin kəsilməz dəyişmə oblastları isə müvafiq diskret oblastla əvəz edilmişdir [4]:

$$\{(\xi_i, t_j) : \xi_i = \ln \frac{r_i}{r_c}; t_j = j\tau; i = 0, 1, 2, \dots, N; j = 0, 1, 2, \dots\}, N = \frac{1}{\Delta\xi} \cdot \ln \frac{r_k}{r_c}$$

Burada  $\Delta\xi$  -  $\xi$ -yə görə integrallama addımı;  $\tau$  - zaman addımıdır.

Bu cür daxil edilən diskret oblastda təzyiqin qiymətlərinin qovma üsulu vasitəsilə təyini üçün aşağıdakı iterasiya münasibətləri alınmışdır [4]:

$$p_{i-1}^{j+1, \nu} = A_{i-1}^{j+1, \nu} p_i^{j+1, \nu} + C_{i-1}^{j+1, \nu}, i = N-1, \dots, 1, j = 0, 1, 2, \dots, \nu = 1, 2, \dots \quad (8)$$

$$p_i^{j+1, 0} = p_i^j, s_{ki}^{j+1, 0} = s_{ki}^j, p_i^0 = p_0, m_i^0 = m_0, s_{ki}^0 = 0$$

$$A_i^{j+1, \nu} = \frac{\Psi_{li}^{j+1, \nu}}{\Psi_{li}^{j+1, \nu} + \Psi_{2i}^{j+1, \nu} (1 - A_{i-1}^{j+1, \nu}) + \Phi_1^j - \Phi_0^j \Phi_2^j},$$

$$C_i^{j+1, \nu} = \frac{\Psi_{2i}^{j+1, \nu} C_{i-1}^{j+1, \nu} + p_i^j (\Phi_1^j - \Phi_0^j \Phi_2^j) - (m_i^{j+1} - m_i^j) \cdot (\Phi_3^j - \Phi_0^j \Phi_4^j)}{\Psi_{li}^{j+1, \nu} + \Psi_{2i}^{j+1, \nu} (1 - A_{i-1}^{j+1, \nu}) + \Phi_1^j - \Phi_0^j \Phi_2^j}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (9)$$

$$A_0^{j+1, \nu} = 1, C_0^{j+1, \nu} = -\frac{q^{*j+1} \cdot \Delta\xi}{F_{1q0}^{j+1, \nu-1} + F_{1k0}^{j+1, \nu-1}},$$

Məsaməliyin hesablanması

$$m_i^{j+1} = m_i^j \left( 1 - \frac{\tau}{\tau_m} \right) + \frac{\tau}{\tau_m} m_0 e^{\beta_s (p_i^j - p_0)}, \quad (10)$$

kondensatladoymanın hesablanması isə

$$s_{ki}^{j+1} = s_{ki}^j - \frac{D_{2i}^j}{\Phi_{5i}^j} - \frac{\Phi_{2i}^j D_{3i}^j}{\Phi_{5i}^j (\Phi_{1i}^j - \Phi_{0i}^j \Phi_{2i}^j)} - \frac{\Phi_{4i}^j}{\Phi_{5i}^j} (m_i^{j+1} - m_i^j), \quad (11)$$

iterasiya düsturları ilə aparılır; burada

Qeyd edək ki, bu iterasiya prosesinin hər bir zaman addımında

$$\max_i |p_i^{j+1,\nu} - p_i^{j+1,\nu-1}| \leq \varepsilon, \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

bərabərsizliyi ödənilənə qədər davam etdirilir və  $p_i^{j+1}$  qiymətləri verilmiş  $\varepsilon$  dəqiqliklə təyin edirlər.

Oxşar nəticələrin müqayisəsi məqsədilə məsələnin həlli, süxurların qeyri-xətti elastiki deformasiyası halı üçün də alınmışdır. Bu zaman (11) əvəzinə

$$m = m_0 e^{\beta_s (p - p_0)} \quad (12)$$

asılılığından istifadə olunmuşdur.

Hesablamalar aşağıdakı ilkin verilənlər çərçivəsində aparılmışdır:

$$p_0 = 40 \text{ MPa}; \quad q = 100000 \text{ m}^3/\text{gün}; \quad m_0 = 0,2; \quad r_c = 0,1 \text{ m}; \quad R_k = 900 \text{ m};$$

$$\beta = 0,81;$$

$$p_{at} = 0,1 \text{ MPa}; \quad \beta_s = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ MPa}^{-1}; \quad k_0 = 0,03 \cdot 10^{-12} \text{ m}^2; \quad \tau_m = 0; \quad \tau_m = 5 \text{ il};$$

$$F_q = 2,0833 \cdot s_k^4 + 4,9167 \cdot s_k^3 - 5,5708 \cdot s_k^2 - 0,277 \cdot s_k + 0,882;$$

$$F_k = 1,8864 \cdot s_k^2 + 0,1889 \cdot s_k + 0,0005;$$

$$z(p) = 1 - 0,1162 \cdot 10^{-2} \cdot p + 0,3744 \cdot 10^{-5} \cdot p^2 - 0,2965 \cdot 10^{-9} \cdot p^3 - 0,1975 \cdot 10^{-11} \cdot p^4;$$

$$s_k(p) = 0,814 \cdot p; \quad a_k(p) = 0,1157 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 0,23674 \cdot 10^{-6} p;$$

$$\bar{\gamma}(p) = 194,8 - 0,42974 \cdot 10^{-1} p + 0,1335 \cdot 10^{-4} p^2 - 0,6053 \cdot 10^{-6} p^3 + 0,622 \cdot 10^{-9} p^4;$$

$$\mu_q(p) = 0,0126 + 0,257 \cdot 10^{-4} p + 0,1633 \cdot 10^{-7} p^2, \quad 10^{-9} \text{ MPa} \cdot \text{san};$$

$$\mu_k(p) = 0,6 + 0,33 \cdot 10^{-2} \cdot p + 0,1 \cdot 10^{-4} p^2 - 0,16 \cdot 10^{-7} p^3 + 0,85 \cdot 10^{-11} p^4$$

$$\mu_k(p) = 0,6 + 0,33 \cdot 10^{-2} \cdot p + 0,1 \cdot 10^{-4} p^2 - 0,16 \cdot 10^{-7} p^3 + 0,85 \cdot 10^{-11} p^4,$$

$$10^{-9} \text{ MPa} \cdot \text{san}.$$

### Ədəbiyyat

1. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980, 520 с.
2. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем: Пер. с английского. М.: Недра, 1982, 407 с.
3. Дейк Л.П. Практический инжиниринг резервуаров. М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2008, 668 с.
4. Калиткин Н.Н. Численные методы. Москва, Наука 1978.



## SÜZÜLMƏ PROSESİNDƏ PARAMETRLƏRİN İDENTİFİKASIYALI TƏYİNİ

**Fərzəliyeva Humay Elçin qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

humayferzeliyeva1@gmail.com

**Xülasə:** Məqalə mayelərin süzülməsi prosesində lay parametrlərinin (məsaməlik, keçiricilik və s.) identifikasiyasına həsr olunub. Bu parametrlər kifayət qədər məlumat olmadıqda, quyu üzrə faktiki ölçülmüş təzyiq göstəricilərindən istifadə etməklə müəyyən edilir. Məsələ funksionalın minimallaşdırılması kimi qoyulur və bunun üçün qoşma məsələ və iterasiya üsulları tətbiq olunur. Nəticədə tərs məsələnin həlli vasitəsilə layın süzülmə-tutum xüsusiyyətləri daha dəqiq təyin edilir.

**Açar sözlər:** parametr, deformasiya, funksional, qoşma məsələ, itersiya

Mayelərin süzülmə tənlikləri ədədi həll olunur və kifayət qədər informasiya həcmi olmadıqda fluidlərinin süzülmə-tutum parametrləri yatağın işlənilməsi prosesində mədən verilənlərinin faktiki qiymətindən istifadə etməklə təyin edilir.

Deformasiya olunan lay  $x = 0$ -da yerləşən qalereya ilə  $q(t)$  hasilatı ilə istismar olunur [1]. Quyu istismara buraxılmazdan əvvəl təzyiq  $p_0$  və kondensatladoyma  $s_0$  - qəbul olunur. Məhsuldar layın sərhəddi keçirməzdir və hündürlüyünü  $h$  -dir. Baxılan məsələyə uyğun süzülmə prosesi aşağıdakı sistem tənliklərlə ifadə edilir [1-3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ k(x, p) \left( \frac{F_q(s_k) p \beta [1 - c(p) \bar{\gamma}(p)]}{\mu_q(p) z(p) p_{atm}} + \frac{F_k(s_k) S_k(p)}{\mu_k(p) a_k(p)} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \right\} = \\ = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ m(x, p) \left( \frac{(1 - s_k) p \beta}{z(p) p_{atm}} [1 - c(p) \bar{\gamma}(p)] + s_k \frac{S_k(p)}{a_k(p)} \right) \right\}, \\ D = \{x \in (0, L)\}, t \in (0, T), \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ k(x, p) \left( \frac{F_k(s_k)}{\mu_k(p) a_k(p)} + \frac{F_q(s_k) p c(p) \beta}{\mu_q(p) z(p) p_{atm}} \right) \frac{\partial p}{\partial x} \right\} = \\ = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ m(x, p) \left( \frac{(1 - s_k) p \beta c(p)}{z(p) p_{atm}} + s_k \frac{1}{a_k(p)} \right) \right\}; \quad D = \{x \in (0, L)\}, t \in (0, T), \quad (2) \end{aligned}$$

$$p(x, t)|_{t=0} = p_0(x), s_k(x, t)|_{t=0} = s_{k0}(x), G = \{x \in (0, L)\}, \quad (3)$$

$$2\pi r h k(x, p) \left( \frac{F_q(s_k) p \beta [1 - c(p) \bar{\gamma}(p)]}{\mu_q(p) z(p) p_{atm}} + \frac{F_k(s_k) S_k(p)}{\mu_k(p) a_k(p)} \right) \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{x=0} = -q(t), t \in (0, T), \quad (4)$$

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0, G = \{x \in (0, L)\}. \quad (5)$$

Burada  $p$ ,  $m$ ,  $s_k$  və  $k$  - müvafiq olaraq cari təzyiq, məsaməlik, kondensatladoyma və keçiricilik;  $p_0$  və  $m_0$  - müvafiq olaraq başlanğıc lay təzyiqi və başlanğıc məsaməlik;  $F_q$  və  $F_k$  - müvafiq olaraq qaz və kondensata görə nisbi faza keçiricilikləri;  $a_k(p)$  və  $S_k(p)$  - müvafiq olaraq maye fazasının həcm əmsalı və maye fazasında həll olmuş qazın miqdarı;  $c(p)$  - kondensatın qaz fazasında miqdarı;  $\bar{\gamma}(p)$  - normal şəraitdə maye və qaz fazalarındakı kondensatın həcmi çəkirlərinin nisbəti  $\mu_q(p)$  və  $\mu_k(p)$  - müvafiq olaraq qazın və maye fazasının özlülüyü;  $\beta$  - qaz üçün temperatur düzəlişi;  $p_{at}$  - atmosfer təzyiqi;  $L$  - layın drenaj sahəsinin uzunluğudur. Fərz edək ki, lay parametrlərinin təzyiqdən asılılığı aşağıdakı şəkildə verilir:

$$m = m_0(x) \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\alpha_1}, k = k_0(x) \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\alpha_2}; \quad (6)$$

Burada  $m_0, k_0$  - başlanğıc lay təzyiqində məsaməlik və keçiriciliyin qiymətləri;  $\alpha_1$  və  $\alpha_2$  - təyin olunmalı əmsallardır.

Elə  $(\alpha_1, \alpha_2)$  cütü tapmaq tələb olunur ki, (1) - (6) məsələsinin həlli aşağıdakı funksiyanın qiymətini minimallaşdırsın:

$$J(\alpha_1, \alpha_2) = \int_0^{\bar{T}} [p(0, t) - p_c(t)]^2 dt + \varepsilon(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \Rightarrow \min \quad (7)$$

Burada  $\bar{T}$  - quyu məlumatlarının emal zamanı;  $p(0, t)$  - nəzəri həlldən tapılan quyudibi təzyiqi;  $p_c(t)$  - quyudibi təzyiqin faktiki ölçülmüş qiymətləri.  $\varepsilon \geq 0$  requlyarizasiya parametridir.

Qeyd edək ki, (7) məqsəd funksiyasında ikinci həddin olmağı (1)-(6), (7) məsələsinin yeganəliyini təmin edir.

Məqsəd (7) funksiyasının qradientinin tapılmasıdır. Bunun üçün qoşma

məslə qurulmuş və  $(\alpha_1, \alpha_2)$  cütünü tapmaq üçün aşağıdakı iterasiya formulu tapılmışdır:

$$\alpha_i^{k+1} = \alpha_i^k - \lambda_k \frac{\partial J(\alpha_1^k, \alpha_2^k)}{\partial \alpha_i}, \quad i = 1, 2,$$

Burada  $k = 0, 1, \dots$ , iterasiyanın sayı,  $\lambda_k \geq 0$  - qradientlər üsulunun addımıdır.

Layın kollektor xassələrinin təyini üçün tərs məsələnin həlli algoritmi aşağıdakı şəkildədir:

Parametrlərin ilkin qiymətlərindən istifadə etməklə (1) - (6) düz məsələsi sonlu fərqlər üsulu ilə həll edilir. Nəticədə layın müxtəlif nöqtələrində və həmçinin quyuda təzyiq tapılır. Quyuda təzyiqin faktiki və hasablama qiymətlərinin fərqinin zamandan asılılığı təyin edilir. Quyuda təzyiqlər arasındakı asılılıqdan istifadə etməklə qoşma sərhəd məsələsi həll edilir. (1) - (6) düz məsələsinin və qoşma sərhəd məsələsinin həllərinin nəticələri əsasında funksionalın tutum və süzülmə parametrlərinə görə törəməsi layın müxtəlif nöqtələrində təyin edilir.

Tapılan qradientə görə uyğun minimallaşdırma üsullarını tətbiq etməklə uyğun axtarış istiqaməti qurulur, bu istiqamət üzrə addım təyin edilir. Bununla tərs məsələnin həll algoritminin birinci iterasiyası qurtarır və (7) fuhksiyasının qiyməti hesablanır. Tutum və süzülmə parametrlərinin dəqiqləşmiş qiymətinə görə düz məsələ yenidən həll edilir.

Müxtəlif zaman anlarında quyuda təzyiqin hesabat və faktiki qiymətləri əsasında fərqin qiyməti tapılır və qoşma sərhəd məsələsi həll edilir. Yenə də funksionalın törəməsinin qiyməti təyin edilir. Yenidən lay parametrləri dəqiqləşdirilir və (7) funksionalının qiyməti hesablanır. Əgər birinci və ikinci iterasiyadan sonra funksionalın tapılan qiymətləri az fərqlənirlərsə, daha doğrusu verilən xətanın  $\delta$  qiyməti qədər fərqlidirsə, onda tərs məsələnin həlli qurtarmış hesab olunur. Əks halda üçüncü iterasiyaya keçid yaranır və s. Nəticədə tərs məsələnin həllindən layın bütün elementar yaddaşlarında süzülmə-tutum parametrlərinin qiymətləri dəqiqləşdirilir.

### **Ədəbiyyat**

1. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980, 520 с.
2. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем: Пер. с английского. М.: Недра, 1982. 407 с.
3. Дейк Л.П. Практический инжиниринг резервуаров. М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2008, 668 с.

## TƏSADÜFİ GƏRGİNLİK ALTINDA OLAN SİLİNDRDƏ İSTİLİKKEÇİRMƏ MƏSƏLƏSİNİN STOXAŞTİK TƏHLİLİ

**Hacıyeva Sibel Sədrəddin qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

sibelhaciyeva1996@gmail.com

**Xülasə:** Təsadüfi gərginlik altındakı silindrdə, sağ tərəfi bu gərginliyin yaratdığı təsadüfi istilik miqdarı ilə ifadə olunan, qeyri-bircins tənlik üçün qoyulmuş başlanğıc-sərhəd məsələsi araşdırılır [1]. İstilik miqdarı sıxlığının müntəzəm paylanmaya malik müəyyən çoxluqdan generasiya olunmuş qiymətlərində Maple proqram mühitində həllə aid cədvəllər və 3D-qrafiklər qurulur.

**Açar sözlər:** silindrdə istilikkeçirmə, təsadüfi kəmiyyət, müntəzəm paylanma, Bessel funksiyaları.

**Məsələnin qoyuluşu:** Radiusu  $a$ -olan dairəvi silindrdə

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T(r,t)}{\partial r} \right) - \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{Q}{k}, \quad 0 < r < a, \quad t > 0$$

$$T|_{r \rightarrow +0} = O(1), \quad T|_{r=a} = 0, \quad T|_{t=0} = \varphi(r)$$

məsələsi araşdırılır; burada  $T(r,t)$  - məchul temperatur,  $Q$  - təsadüfi istilik miqdarı sıxlığı,  $\varphi(r)$  - məlum başlanğıc funksiyadır.

**Tədqiqatın məqsədi:**  $Q$  - təsadüfi kəmiyyətinin müntəzəm paylanmaya malik çoxluqdan generasiya olunmuş qiymətlərində qoyulmuş məsələnin həllinə aid cədvəl və qrafiklərin Maple-proqram mühitində qurulması [2].

**Tədqiqatın üsulları:** Məsələnin həlli

$$T(r,t) = T_1(r) + T_2(r,t)$$

şəklində axtırılır; burada  $T_1(r)$  - istiliyin stasionar paylanmasını ifadə edir və

$$T_1(r) = \frac{Qa^2}{4k} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)$$

düsturu ilə tapılır,  $T_2(r,t)$  isə

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T_2(r,t)}{\partial r} \right) - \frac{\partial T_2}{\partial t} = 0, \quad 0 < r < a, \quad t > 0$$

$$T_2|_{r \rightarrow +0} = O(1), \quad T_2|_{r=a} = 0, \quad T_2|_{t=0} = \varphi(r) - T_1(r)$$

məsələsinin həllidir.

**Tədqiqatın mərhələləri:**

- 1)  $\varphi(r) = \sin(r)$  üçün  $T_2(r,t)$ -nin Bessel funksiyaları üzrə Furye sırası

şəklində analitik ifadəsi alınır.

```
> M:=array(1..5,1..5):
> for m1 from 1 to 5 do for m2 from 1 to 5 do M[m1,m2]:=evalf(T[1]
(0.1*m1,0.1*m2),5) od od:
> convert(M,Matrix);
```

$$\begin{bmatrix} 0.51883 & 0.40220 & 0.33680 & 0.30010 & 0.27955 \\ 0.49968 & 0.38809 & 0.32552 & 0.29040 & 0.27074 \\ 0.46831 & 0.36488 & 0.30688 & 0.27434 & 0.25611 \\ 0.42553 & 0.33302 & 0.28115 & 0.25204 & 0.23574 \\ 0.37238 & 0.29310 & 0.24865 & 0.22370 & 0.20973 \end{bmatrix} \quad (1)$$

```
> for k1 from 1 to 5 do for k2 from 1 to 5 do M[k1,k2]:=evalf(T[3]
(0.1*k1,0.1*k2),5) od od:
> convert(M,Matrix);
```

$$\begin{bmatrix} 0.48094 & 0.41167 & 0.34848 & 0.31302 & 0.29316 \\ 0.47147 & 0.39733 & 0.33688 & 0.30295 & 0.28395 \\ 0.45382 & 0.37375 & 0.31771 & 0.28626 & 0.26865 \\ 0.42575 & 0.34133 & 0.29122 & 0.26309 & 0.24734 \\ 0.38517 & 0.30067 & 0.25772 & 0.23361 & 0.22012 \end{bmatrix} \quad (2)$$

2)  $Q \sim U(1; 1.1)$  olduqda, yəni  $(1; 1.1)$  intervalında müntəzəm paylanmaya malik çoxluqdan generasiya edilmiş  $Q$ -qiymətlərində, həlli ifadə edən sonsuz sıranın 1-ci və 3-cü xüsusi cəmlərinin

$(r, t) = (0, 1 m_1; 0, 1 m_2)$ ;  $m_1, m_2 = 1, 5$  şəbəkəsində qiymətlər cədvəli qurulur.

```
> sol2:=unapply(pdsolve([EQ2, T2(a, t)=0, T2(r, 0)=phi2(r)], T2(r, t)), r,
t);
```

$$sol2 := (r, t) \mapsto T2(r, t) = casesplit/ans \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot \text{BesselJ}(0, \lambda_n)^2 + 2 \cdot \text{BesselJ}(1, \lambda_n)^2} \left( \left( \int_0^1 (Q \cdot r^2 + 4 \cdot \sin(r) - Q) \cdot \text{BesselJ}(0, \lambda_n \cdot r) \cdot r \, dr \right) \cdot \text{BesselJ}(0, \lambda_n \cdot r) \cdot \left( -\sinh(\lambda_n^2 \cdot t) + \cosh(\lambda_n^2 \cdot t) \right) \right), \{ \lambda_n = \text{BesselJZeros}(0, n) \wedge 0 \leq \lambda_n \} \right)$$

Xüsusi cəmlərə aid 3D-qrafikləri də alınır.

### Ədəbiyyat

1. Amada, S. Stochastic Analysis of Heat Conduction and Thermal Stresses in Solids, In book: Heat Transfer Phenomena and Applications, pp 243-266, 2012
2. Gasimov.G.R., Abusutaş.Z.A., Solution of heat conduction problem with discontinuous boundary conditions in nonhomogenous moving cylinder using Maple, International Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 106, no. 4, pp. 1127-1150, 2016

## TƏSADÜFİ TEMPERATURLU MÜHİTDƏ YERLƏŞƏN SİLİNDRİN OXUNDAN KEÇƏN MÜSTƏVİLƏRDƏ İSTİLİYİN YAYILMASI

**Hacıyeva Sibel Sədrəddin qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

sibelhaciyeva1996@gmail.com

**Xülasə:** İşdə təsadüfi mühitdə yerləşdirilmiş sonlu uzunluqlu silindrin oxundan keçən müstəvilərdə istiliyin yayılması prosesi araşdırılır. Silindrin səthinin temperaturu təsadüfi dəyişən parametrdən asılı qəbul edilir, uyğun sərhəd məsələsinin həlli Maple-proqram paketi vasitəsilə qurulur [1].

**Açar sözlər:** silindrə istilikkeçirmə, normal paylanma, təsadüfi funksiya, Maple.

**Məsələnin qoyuluşu:** Radiusu 1-olan və uzunluğu 10-a bərabər silindrə

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} v(r, z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} v(r, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} v(r, z) = 0$$

tənliyinin

$$v(1, z) = g(z), \quad v(r, 0) = 0, \quad v(r, 10) = 0$$

şərtlərini ödəyən həlli axtarılır, haradakı  $g(z)$  — təsadüfi funksiyaadır.

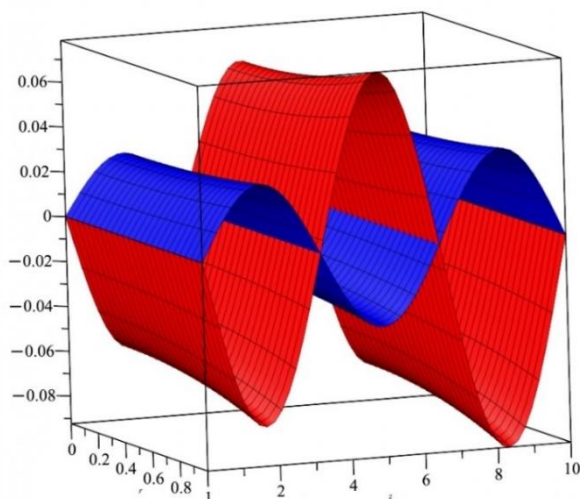
**Tədqiqatın məqsədi:**  $g(z) = X \sin(z)$  sərhəd funksiyasının asılı olduğu  $X$ -təsadüfi kəmiyyətinin normal paylanmaya malik çoxluqdan generasiya olunmuş qiymətlərində məsələnin həllinin analitik şəklinin və səthinin qurulması.

**Tədqiqatın üsulları:** Silindrə istilikkeçirmə məsələsinin həllinin Furye üsulu ilə qurulması və generasiya üsulları ilə təsadüfi kəmiyyətlərin qiymətlərinin alınması.

**Tədqiqatın mərhələləri:**

1. Qoyulmuş məsələnin həllinin Maple-da qurulması və reallaşdırılması [2].
2.  $X$ -in generasiyası aparılır.
3. 3-cü xüsusi cəmin  $X$ -in iki təsadüfi seçilmiş qiymətlərində hesablanaraq, 3D-qrafikin qurulması alınır.

```
> plot3d([subs(X=XN[3], VS[3](r, z)), subs(X=XN[7], VS[3](r, z))], r=0.  
.1, z=0..10, color=[blue, red]);
```



```
> EQS:=diff(v(r,z),r$2)+(1/r)*diff(v(r,z),r)+diff(v(r,z),z$2)=0;
```

$$EQS := \frac{\partial^2}{\partial r^2} v(r, z) + \frac{\frac{\partial}{\partial r} v(r, z)}{r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} v(r, z) = 0$$

```
> BICS:=v(1,z)=g(z), v(r,0)=0, v(r,10)=0;
```

$$BICS := v(1, z) = g(z), v(r, 0) = 0, v(r, 10) = 0$$

```
> pdsolve([EQS,BICS],v(r,z),HINTboundedseries(r=0));
```

$$v(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5 \operatorname{BesselI}\left(0, \frac{\pi n}{10}\right)} \left( \sin\left(\frac{\pi n z}{10}\right) \left( 5 {}_2C_5(n) \operatorname{BesselY}\left(0, \frac{1}{10} \pi n r\right) \operatorname{BesselI}\left(0, \frac{\pi n}{10}\right) - 5 \operatorname{BesselY}\left(0, \frac{1}{10} \pi n\right) \operatorname{BesselI}\left(0, \frac{\pi n r}{10}\right) {}_2C_5(n) + \left( \int_0^{10} g(z) \sin\left(\frac{\pi n z}{10}\right) dz \right) \operatorname{BesselI}\left(0, \frac{\pi n r}{10}\right) \right) \right)$$

### Ədəbiyyat

1. Cyganowski.S., P.Klojen, J.Ombach. From Elementary Probability to Stochastic Equations with Maple, Springer, Berlin, p.324, 2002.
2. Gasimov G.R., Rzaev E.A., Agaeva M.H., Correlation Studying the Maple package of the Bessel equation with a random inhomogeneous part, BSEU Journal of engineering research and technology, vol.2, iss.2, pp.1-6, 2021.

## **KOMPÜTER MODELƏŞDİRİLMƏSİ VASİTƏSİLƏ RİYAZİYYAT BİLİKLƏRİNİN PEŞƏ FƏNLƏRİ İLƏ İNTEQRASIYASININ TƏDRİSDƏ TƏTBİQİ**

**Həbibov Vahab Mehdi oğlu, Bəşirli Əfsanə Əkbər qızı**

*(LDU, Təbiyyat fakültəsi)*

*vahab.hebibov@mail.ru, besirliiefsanee636@gmail.com*

**Xülasə:** *Bu tezisdə kompüter modelləşdirilməsi vasitəsilə riyaziyyat biliklərinin peşə fənləri ilə integrasiyası praktik tətbiqlərlə araşdırılır. Rəqəmsal modellər şagirdlərin nəzəri biliklərini praktik problemlərlə əlaqələndirir və fənlərarası bacarıqlarını artırır.*

**Açar sözlər:** *kompüter modelləşdirilməsi, riyaziyyat təhsili, peşə fənləri, fənlərarası integrasiya, tədris texnologiyaları, rəqəmsal modellər, tətbiqi öyrənmə, praktiki layihələr.*

Kompüter modelləşdirməsi müasir təhsil sistemində riyaziyyat biliklərinin digər fənlərlə integrasiyasında effektiv vasitə kimi çıxış edir. XXI əsrin təhsil tələbləri şagirdləri yalnız nəzəri biliklərlə deyil, həm də praktiki bacarıqlarla təmin etməyi tələb edir. Riyaziyyat biliklərinin fizika, kimya, biologiya və informatika kimi fənlərlə integrasiyası şagirdlərin analitik və tənqidi düşünmə qabiliyyətini gücləndirir və onların fənlərarası əlaqəni daha dərinlən qavramasına şərait yaradır. Kompüter modelləşdirmə bu integrasiyanı vizual və interaktiv şəkildə həyata keçirməyə imkan verir, mürəkkəb abstrakt anlayışların şagirdlər üçün daha əlçatan olmasını təmin edir[1].

Müasir təhsil ədəbiyyatına əsasən, kompüter modelləşdirmə müxtəlif sahələrdə uğurla tətbiq olunur. Riyaziyyat fənnində diferensial tənliklərin, funksiyaların, statistik analizlərin simulyasiyası şagirdlərin nəzəri bilikləri praktiki çevirməsini asanlaşdırır[3]. Eyni zamanda, fizika dərslərində hərəkət qanunlarının və qravitasiya tənliklərinin GeoGebra və PhET kimi proqram vasitəsilə vizuallaşdırılması, kimyada reaksiyaların kinetikasının və mol hesablamada məsələlərinin modelləşdirilməsi, biologiyada populyasiya dinamikasının diferensial tənliklərlə təsviri və informatika dərslərində riyazi alqoritmlərin proqramlaşdırılması şagirdlər üçün dərsləri daha interaktiv və maraqlı edir[5].

Tədqiqat metodologiyası analitik və eksperimental yanaşmanı birləşdirir. Analitik metod mövcud ədəbiyyat və proqram təminatlarının təhlilinə yönəldilmişdir, eksperimental metod isə məktəblərdə pilot dərslərin keçirilməsini əhatə edir. Şagirdlərin reaksiyaları, dərslər materialını mənimsəmə səviyyəsi və riyaziyyat biliklərinin digər fənlərlə tətbiqi qiymətləndirilir. Kompüter modelləşdirmə üçün seçilən vasitələr arasında GeoGebra, MATLAB, Python kitab-



xanaları və PhET simulyasiyaları ən effektiv hesab olunur[4].

Tədris prosesi zamanı komputer modelləşdirmə vasitəsilə şagirdlər abstrakt riyazi anlayışları vizuallaşdırır, funksiyaları və tənlikləri real dünya hadisələri ilə əlaqələndirirlər. Məsələn, bir funksiya qrafikinə hərəkət qanunlarını təsvir etməsi, kimyəvi reaksiyanın sürətini qrafiklə göstərməsi və ya populyasiya dəyişmələrinin diferensial tənliklərlə simulyasiyası şagirdlərin həm riyaziyyatı, həm də müvafiq fənni praktik şəkildə mənimsəməsinə imkan verir[3]. Bu yanaşma dərsləri sadəcə məlumat ötürülən məkan olmadan, interaktiv və öyrədici mühitə çevirir.

Nəticədə, komputer modelləşdirməsi riyaziyyat biliklərinin digər fənlərlə integrasiyasında həm şagirdlərin anlayışını dərinləşdirir, həm də onların praktik tətbiq bacarıqlarını inkişaf etdirir. Təhsil prosesində bu yanaşmanın tətbiqi müəllimlərin metodik bacarıqlarını artırır və dərslərinin zənginləşdirilməsinə imkan verir. Təvsiyə olunur ki, məktəb proqramlarında komputer modelləşdirməyə daha çox yer verilsin, müəllimlər üçün xüsusi treninqlər təşkil edilsin və şagirdlərin yaş və bilik səviyyəsinə uyğun interaktiv proqram təminatı seçilsin[2].

#### **Ədəbiyyat**

1. Peter Frejd (2025) – Fostering the spirit of mathematical modelling in vocational education.
2. Mathematical Modelling in Vocational Mathematics Education (2024).
3. Integrating STEM and Mathematical Modeling (2026).
4. Educational Technology Integration in Mathematics (2025).
5. Interactive Simulations in Math Education (2024).

### **ÜMUMTƏHSİL MƏKTƏBİNDƏ FUNKSİYA ANLAYIŞININ FORMALAŞDIRILMASINA MÜXTƏLİF YANAŞMALAR**

**Həbibov Vahab Mehti oğlu, Əliyeva Aysel İsmayıl qızı**

*(LDU, Təbiyyat fakültəsi)*

*vahab.hebibov@mail.ru, aysel.aliyeva823@gmail.com*

**Xülasə:** *Tədqiqat işində müasir riyaziyyat təhsilinin fundamental anlayışlarından biri olan funksiya anlayışının orta məktəb riyaziyyat kursunda, xüsusilə dərinləşdirilmiş proqramlarda formalaşdırılması metodikası araşdırılır. Məqalədə funksiya anlayışının tədrisində genetik, məntiqi-nəzəri və tətbiqi yanaşmaların müqayisəli təhlili aparılır. Funksional asılılıqların öyrənilməsində həm ənənəvi üsulların, həm də müasir informasiya*

*texnologiyalarının (dinamik həndəsə mühitləri və proqramlaşdırma elementləri) rolu əsaslandırılır. Tədqiqatın nəticəsi olaraq şagirdlərdə abstrakt təfəkkürün inkişafı üçün müxtəlif model və alqoritmlərin tətbiqi təklif edilir.*

**Açar sözlər:** riyaziyyatın tədrisi metodikası, funksiya, təyin oblastı, dərinləşdirilmiş kurs, didaktik prinsiplər, riyazi modelləşdirmə.

Müasir riyaziyyat təhsilində funksiya anlayışı həm cəbr, həm də analizin əsasını təşkil edən ən mühüm konseptlərdən biridir. Funksional asılılıqların öyrənilməsi şagirdlərin təfəkküründə statik mənzərədən dinamik mənzərəyə keçidi təmin edir. Dərinləşdirilmiş riyaziyyat kursunda bu mövzu həm fənlərarası əlaqələrin qurulması, həm də şagirdlərin elmi-tədqiqat bacarıqlarının inkişafı üçün geniş imkanlar açır [1].

### 1. Tarixi Yanaşma

Bu yanaşma funksiyanın təkamül yolunu izləyir və şagirdlərə bu anlayışı "dəyişmə" və "asılılıq" prizmasından təqdim edir. Burada argument sərbəst dəyişən, funksiya isə asılı dəyişən kimi verilir. Şagird real həyatda baş verən prosesləri (məsələn, cismin hərəkəti və ya temperaturun zamandan asılılığı) riyazi modelə çevirməyi öyrənir [2].

Misal: Sərbəst düşmə qanunu olan  $s(t) = \frac{gt^2}{2}$  düsturu vasitəsilə şagird kəmiyyət asılılıqlarını daha aydın dərk edir.

### 2. Məntiqi-Nəzəri (Çoxluqlar Nəzəriyyəsi) Yanaşma

Dərinləşdirilmiş kurslarda funksiya iki boş olmayan çoxluğun elementləri arasındakı uyğunluq (inikas) kimi baxılır. Bu yanaşma şagirdə funksiyanın təyin oblastını ( $D(f)$ ) və qiymətlər çoxluğunu ( $E(f)$ ) daha dərinlən anlamağa imkan verir [4].

Misal:  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$  funksiyasının təyin oblastının tapılması şagirdlərdə çoxluqlar üzərində əməllər aparmaq vərdişini formalaşdırır:  $D(f) = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ .

### 1. Funksiyaların Qrafik Çevrilmələri

Şagirdlərdə vizual təfəkkürü inkişaf etdirmək üçün  $y = f(x)$  qrafikindən istifadə edərək mürəkkəb formalı (məsələn, modullu) qrafiklərin qurulması metodikası mühüm yer tutur. Bu, funksiyanın xassələrini analitik hesablama aparmadan vizual şəkildə müəyyən etməyə kömək edir [1].

Metodik tapşırıq:  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  funksiyasının qrafikindən  $y = |f(x)|$  qrafikinə keçid zamanı simmetriya prinsiplərinin tətbiqi.

### 2. Parametrdən Asılı Funksiyalar

Dərinləşdirilmiş kursun ən mürəkkəb hissəsi parametrik asılılıqlardır. Bu tip məsələlərin həlli şagirdlərdə tədqiqatçılıq qabiliyyətini artırır [2].

Misal:  $f(x) = x^2 - 2ax + 4$  funksiyasının bütün ədədi  $ox$ da müsbət olması üçün  $a$  parametrinin araşdırılması ( $D < 0$  şərti ilə  $a \in (-2; 2)$ ).

Funksiya anlayışının formalaşdırılmasında dinamik proqram mühitləri (GeoGebra, Desmos) inqilabi rol oynayır. Sürüşdürmə (slider) alətləri vasitəsilə funksiyanın qrafikinin parametrlərdən asılı olaraq necə dəyişdiyini canlı müşahidə etmək mümkündür [5]. Bu, şagirdlərin analitik və vizual qavrayışını sintez edir. Ümumtəhsil məktəblərində, xüsusilə dərinləşdirilmiş siniflərdə funksiya anlayışına kompleks yanaşmaq lazımdır. Genetik yanaşma mövzunun mahiyyətini, məntiqi yanaşma riyazi dəqiqliyi, tətbiqi yanaşma isə praktiki əhəmiyyəti aşılır. Bu yanaşmaların vəhdəti şagirdlərin gələcək elmi fəaliyyətlərinə möhkəm zəmin yaradır [3].

### **Ədəbiyyat**

1. Həmidov, S.S. Riyaziyyatın tədrisi metodikası (ümumi kurs). Bakı: Bakı Universiteti nəşriyyatı, 2012. – 312 səh.
2. Əliyev, Ə., Həmidov, S. Riyaziyyatın tədrisi metodikasından mühazirələr. Bakı: ADPU, 2010. – 245 səh.
3. Vilenkin, N.Y. Funksiyalar riyaziyyat məktəb kursunda. Moskva: Prosveşenie, 1985. – 192 səh.
4. Stewart, J. Calculus: Early Transcendentals. 8th Edition, Cengage Learning, 2015. – 1368 p.
5. Azərbaycan Respublikası Təhsil İnstitutu. Riyaziyyat fənni üzrə kurikulum materialları və metodik vəsaitlər. Bakı, 2024.

## **RİYAZİYYATIN TƏDRİSİNDƏ KEYS TEXNOLOGİYASINDAN İSTİFADƏ**

**Həmidov Ruslan Allahverən oğlu, Həbibov Şakir Əlif oğlu**

*(LDU, Təbiyyat fakültəsi)*

*rqamidov@mail.ru, hebibov099@gmail.com*

**Xülasə.** *İşdə riyaziyyatın tədrisində yeni təlim texnologiyalarından biri olan keys texnologiyası və onun tədris prosesinə tətbiqləri araşdırılır, konkret nümunələr göstərilir. Belə ki, tədqiqat işində keys texnologiyasının mahiyyəti, riyaziyyatın tədrisində tətbiqinin səmərəliliyi kifayət qədər şərh olunur. Nəticə olaraq riyaziyyatın tədrisində keys texnologiyasının tətbiqinin şagirdlərin bilik, bacarıq və praktiki vərdislərinin artırılmasında rolu və əhəmiyyəti təhlil edilir.*

**Açar sözlər:** *Keys texnologiyası, yeni təlim texnologiyaları, müasir qiymətləndirmə üsulları*

Yeni təlim texnologiyaları ilə tanışlıq, onların tətbiqinə səy göstərmək bu gün təhsil sistemimizdə mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Lakin bu texnologiyaların tətqiqatı sahəsində ciddi iş aparılmasına ehtiyac vardır. Tətqiqat işi bu ehtiyacın az da olsa ödənilməsi məqsədinə xidmət edir.

Keys (case) sözünün ingilis dilindən tərcüməsi hadisə, situasiya deməkdir. Ümumiyyətlə, pedaqoji texnologiya dedikdə təlim prosesində qarşıya qoyulan məqsədə çatmaqdan ötrü istifadə olunan metod, üsul, vasitələr başa düşülür. Keys texnologiyasının mahiyyətini yaranmış mürəkkəb situasiyadan çıxış yollarının axtarılması təşkil edir. Təhsil alanlar problemin qoyuluşuna, onun həll yollarının axtarılmasına və bu həll yollarının təhlil olunmasına yönləndirilir [1-4]. Bu zaman şagirdlərdə real həyati situasiyaların riyazi qanunauyğunluqlarını görə bilmək kompetensiyasının formalaşdırılması mühümdür. Odur ki, riyaziyyatın tədrisi zamanı yalnız ənənəvi təlim sisteminə uyğun məsələlər deyil, həm də şagirdlərin real həyatda rast gələ bildiyi problemlə situasiyalara uyğun məsələlər verilməlidir. Belə məsələlərin həllinin keys texnologiyası vasitəsi ilə həyata keçirilməsi böyük əhəmiyyət kəsb edir. Keys texnologiyası nəzəri bilikləri praktik məsələlərin həllinə tətbiq etməyə imkan verən alətdir [2,3].

Keys texnologiyasından istifadə etməklə dərslərin aşağıdakı kimi təşkil olunması tövsiyyə olunur: Şagirdlərə situasiyanı əhatəli təsfi edən tapşırıq verilir. Tapşırığı yerinə yetirmək üçün şagirdlərdən fənn üzrə müəyyən biliklər tələb olunur. Bəzən bir neçə fənn üzrə biliklər tələb oluna bilər. Tapşırığın əsasında problem xarakterli suallar durur. Bu zaman müəllim və şagirdin məqsədləri fərqli olur. Müəllim şagirdlərin tapşırığın mahiyyətini anlamalarına, şagirdlər isə problemin həll yolunu tapmağa çalışır. Nəticədə yeni biliklərin, yeni praktik vərdişlərin qazanılmasına imkan yaranır [4]. Keys texnologiyasının tətbiqinə aid bir məsələyə baxaq:

Məsələ orta statistik kəmiyyətlərin hesablanmasına aid olduğu üçün şagirdlər ədədi orta, kvadratik orta, meyl, dispersiya haqqında zəruri informasiyalar malik olmalıdırlar. Məsələnin məzmunu şagirdlərə elan olunur: Vakant iş yerinə iki namizəd vardır. Təyin olunan sınaq müddətində onlar müəyyən məhsul hazırlayırlar. Məhsulun sayı cədvəldə verilir:

| Günlər | I işçi | II işçi |
|--------|--------|---------|
| I      | 57     | 66      |
| II     | 59     | 45      |
| III    | 55     | 60      |
| IV     | 53     | 55      |
| V      | 51     | 49      |

Şagirdlərə daha yaxşı namizədi seçmək tapşırılır. Bununla da şagirdlər problemin həlli prosesinə başlayırlar. Əvvəlcə onlar hər işçi tərəfindən hazırlanan məhsulların ədədi ortasını hesablayırlar. Məlum olur ki, hər iki işçinin bir gündə hazırladığı məhsulların sayı orta hesabla eynidir (55 ədəd). Başqa orta qiymətlərin hesablanması da heç bir nəticə vermir. Şagirdlər ədədi orta qiymətdən meyllərin cəmini hesablayırlar. Hər iki işçi üçün bu göstərici sıfıra bərabər olur. İdeya yaranır ki, əgər mənfi ədədlər olmasaydı, sıfır alınmazdı. Onda şagirdlər bu meyllərin kvadratları cəmini hesablayırlar və nəticə alınır. Birinci işçi üçün bu ədəd 40, ikinci üçün 282 alınır. Bu isə o deməkdir ki, ikinci daha çox qeyri-stabil işləyir. Bəzi günlərdə o tam gücü ilə işləmir, digər günlərdə isə geriliyini aradan qaldırmaq üçün sürətlə işləyir. Bu isə, yəqin ki, məhsulun keyfiyyətinə təsir göstəcək. Bununla da birinci işçinin vakant yerə daha çox layiq olduğu qəbul olunur.

Əgər sinif güclü olarsa, dərs müddətində daha mürəkkəb situasiyaya baxıla bilər:

İşçilər eyni məhsuldarlıqla işləyirlər. Lakin günlərin sayı müxtəlifdir. Məlum olur ki, əvvəlki məsələdə problemin həllinə imkan verən meyllərin kvadratları cəmi bu məsələdə eyni alınır. Yekun nəticəni almağa meyllərin kvadratları cəminin ədədi orta qiyməti- dispersiyanın hesablanması kömək olur.

İki işçi eyni məhsuldan hazırlayır. Onlardan biri 5 gün, digəri 4 gün işləyir. Onların hər gün hazırladıqları məhsulların sayı cədvəldə verilmişdir.

| Günlər | I işçi | II işçi |
|--------|--------|---------|
| I      | 53     | 52      |
| II     | 54     | 46      |
| III    | 49     | 53      |
| IV     | 48     | 49      |
| V      | 46     |         |

Hansı işçi daha stabil işləyir?

Məsələ aşağıdakı plan üzrə həll olunur:

- 1) Birinci işçinin gündəlik işinin orta qiyməti tapılır (50 ədəd)
- 2) İkinci işçinin gündəlik işinin orta qiyməti tapılır (50 ədəd)
- 3) Orta qiymətdən gündəlik meyllər hesablanır.

Birinci işçi üçün 3, 4, -1, -2, -4, ikinci işçi üçün 2, -4, 3, -1. Hər iki işçi üçün meyllərin cəmi sıfır olur.

- 4) Meyllərin kvadratları hesablanır:

Birinci işçi üçün 9, 16, 1, 4, 16 alınır. İkinci işçi üçün 4, 16, 9, 1 alınır. İlk dörd gündə meyllərin kvadratları cəmi eyni olur.

5) Meyllərin kvadratlarının orta qiyməti – dispersiya hesablanır. Birinci işçi üçün dispersiya 9,2 ; ikinci işçi üçün 7,5 alınır.

Cavab: İkinci işçi daha stabil işləyir.

Keys texnologiyasının tətbiqi prosesində müəllimin pedaqoji fəaliyyətinin əsas istiqamətləri olaraq göstərilir ki, bu prosesdə müəllim heç bir göstəriş vermir, əlavə suallar və əlavə informasiyalar vastəsi ilə problemin həll yollarının tapılmasına köməklik göstərir, hətta müəyyən vəziyyətlərdə müəllim özü problemin həlli yolunu şagirdlərlə birgə araşdırır.

Göründüyü kimi, keys texnologiyası şagirdlərdə analitik, praktik, yaradıcı, kommunikativ və sosial bacarıqları formalaşdırır.

Tədqiqat işində nəticə olaraq şərh edilir ki, keys təlim texnologiyası nəzəriyyəni praktika ilə optimal şəkildə birləşdirməyə imkan verir. Şagirdlərin müxtəlif informasiya mənbələri ilə işləmək bacarığını inkişaf etdirir. Bu texnologiyalardan istifadə edərkən şagirdlər hazır biliklər almır. Bu bilikləri müstəqil olaraq qazanmağa çalışırlar. Aydındır ki, həyati şəraitdə qəbul olunan qərarlar daha yaxşı yadda qalır. Bundan başqa keysdə göstərilən problemin həlli prosesi yaradıcı idraki prosesdir və bu proses kollektiv fəaliyyət xarakteri daşıyır. Beləliklə şagirdlər ünsiyyət qaydalarına riayət etməyi, qrupda işləməyi, müsahibinə qulaq asmağı, öz fikrini əsaslandırmağı öyrənirlər. Eyni zamanda keys təlim texnologiyası müəllimlə şagirdin işgüzar əməkdaşlığına yönələn interaktiv təlim texnologiyasıdır. Həm də bu texnologiya təlimin təşkilinin effektiv vasitəsidir. Lakin onu bütün təhsil məsələlərinə tətbiq oluna biləcək universal vasitə hesab etmək olmaz. Bu texnologiyanın effektivliyi ondadır ki, asanlıqla digər təlim texnologiyaları ilə birləşə bilər.

### **Ədəbiyyat**

1. Nəzərov A. M. Müasir təlim texnologiyaları. Bakı: ADPU nəşriyyatı, 2012.
2. Orucova, C. A. Müasir pedaqoji texnologiyalar (Keys-texnologiyası). Azərbaycan Respublikasının Təhsil İnstitutunun Elmi əsərləri, 89(2), 2022.
3. Гусева О.Л. Кейс-стади как метод исследования. Высшая школа экономики, Санкт – Петербург, 2013.
4. Трус А. С., Лесогорова Ж. В. Использование кейс-технологии на уроках математики. Сборник докладов III Международной научно-практической конференции 28-29 июня 2022 года / БГУ - г. Минск, Республика Беларусь.

## ÜMUMİLƏŞMİŞ LEONTİYEV MODELİNƏ GÖRƏ QURULMUŞ QƏRAR QƏBULETMƏNİN ÇOXKRİTERİYALI MƏSƏLƏSİ VƏ ONUN HƏLLİ

**Həmidov Rafael Hüseyn oğlu, Qurbanlı Türkan Ramil qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

*qurbanliturkan1511@gmail.com*

**Xülasə:** Sadə Leontiyev modelinə görə hər bir məhsul yalnız bir texnologiyadan istifadə etməklə istehsal oluna bilər və hər bir texnologiyanın tətbiqi ilə yalnız bir məhsul istehsal oluna bilər. Ümumiləşmiş Leontiyev modelinə görə isə bir məhsul müxtəlif texnoloji proseslərin köməyi ilə istehsal oluna bilər. İşdə bu cür modelin tətbiqi ilə praktikada tətbiq oluna bilən qərar qəbuletmənin iki kriteriyalı məsələsinə baxılır və məsələnin pareto sərhəddində dialoq şəklində alqoritmə son variantın qurulması yolu göstərilir.

**Açar sözlər:** xətti proqramlaşdırma, effektiv həll, effektiv qiymətləndirmə, balans modeli, pareto sərhəddi.

$i$  saylı məhsulun  $k_i$  sayda texnologiyadan istifadə olunmaqla hazırlandığını fərz edirik.  $a_{ij}^k$  ilə  $i$  saylı məhsuldan  $j$  saylı məhsulun vahid miqdarda  $k$  sayda texnologiyanın tətbiqi zamanı sərf olunan miqdarını işarə edirik. Onda vahid zamanda  $i$  saylı məhsulun istehsalının həcmi aşağıdakı kimi olacaqdır:

$$y_i = \sum_{k=1}^{k_i} x_i^k - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{k_i} a_{ij}^k x_j^k, \quad i=1, \dots, n \quad (1)$$

Adətən tətbiq olunan texnologiyaların imkanından qabaqcadan məlum məhdudiyyətlər daxilində istifadə olunur. Riyazi olaraq belə məhdudiyyətlər istehsalın həcminə

$$x_i^k \leq d_i^k \quad k = 1, \dots, k_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

(2) məhdudiyyəti (1) şərti ilə adətən uyuşmur. Ona görə də ən yaxşı variantın axtarılmasında istifadə olunan seçim çoxluğu

$$\sum_{k=1}^{k_i} x_i^k - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{k_i} a_{ij}^k x_j^k \leq y_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$x_i^k \leq d_i^k \quad k = 1, \dots, k_i, \quad i = 1, \dots, n$$

kimi təqdim olunur. Variantların müqayisəsi

$$y_1 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{k_i} c_{ij}^k x_j^k \rightarrow \max,$$

$$y_2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{k_i} q_{ij}^k x_j^k \rightarrow \max,$$

kimi iki kriteriyadan istifadə edərək kriteriyalar fəzasında pareto nizamına görə aparılır. Pareto nizamına görə maksimal nöqtələr çoxluğu müstəvidə pareto sərhəddini təyin edir. [1,2] işdə bu sərhəddən dialoq formasında olan alqoritmın köməyi ilə son variantın seçilmə qaydası göstərilir.

### Ədəbiyyat

1. Гейл Д. Теория линейных экономических моделей. М.: Изд-во иностран. лит., 1963, 420 с
2. Гамидов Р.Г. Построение поретовой границы многокритериальных задач. Изв. АНА Азерб., серия физ.-тех. и мат. наук, 1999, №3-4, стр. 37-44.

## QƏRAR QƏBULETMƏNİN İKİ KRİTERİYALI BİR MƏSƏLƏSİ VƏ ONUN HƏLLİ

**Həmidov Rafael Hüseyn oğlu, Qurbanlı Türkan Ramil qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

*qurbanliturkan1511@gmail.com*

**Xülasə:** İşdə qərar qəbuletmənin iki kriteriyalı qeyri-xətti proqramlaşdırmanın bir məsələsinə baxılır. Məsələnin spesifikasiyasına əsaslanaraq onun reduksiya olunmaqla pareto sərhəddinin qurulmasının yolu göstərilir. Həll prosesində istifadə olunan hesablamaya əsasən iterativ yolla icra olunur. Belə hesabla onun icrasının paralel alqoritm şəklində aparılması üçün imkan vardır.

**Açar sözlər:** Effektiv həll, effektiv qiymətləndirmə, qradient, pareto sərhəddi.

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^T D x + (c, x) \rightarrow \max \\ y_2(x) &= x B x + (b, x) \rightarrow \max \\ X : x &\leq A x + b, \quad x \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

kimi iki kriteriyalı məsələyə baxılır. Burada

$$\begin{aligned} D, B, A &\in \mathbb{R}^n, \quad D, B, A \geq 0, \\ (E - A)^{-1} &\geq 0, \quad x, c, e, b \in \mathbb{R}^n, \quad b > 0. \end{aligned}$$

Məqsəd məsələ (1)-in pareto sərhəddini qurmaqdır.

$$Y = \{(y_1^{(x)}, y_2^{(x)}), x \in X\}$$

Y-in effektiv qabarıq olduğunu fərz edirik, yəni  $Y + E^2$ -çoxluğu qabarıqdır.

$$Y + E^2 = \{z \in E^2 \mid z = y + t, t \geq 0, t \in E^2\}$$



$$Y^p = \{y^0 \in Y \mid y \in Y, y \geq y^0 \Rightarrow y = y^0\}$$

Çoxluğu verilmiş məsələnin pareto çoxluğu adlanır.

$$X^p = \{x \in X \mid (y_1^{(x)}, y_2^{(x)}) \in Y^p, x \in X\}$$

Çoxluğuna isə effektiv həllər çoxluğu deyilir. Məqsəd  $Y^p$ ,  $X^p$  çoxluğunu qurmaqdır.

$$G' = \{i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid c_i \geq 0, e_i \geq 0\}$$

**Lemma:**  $x^0 \in X^p$ ,  $x_i^0(Ax^0)_i + b_i$ ,  $i \in G'$  Lemmanın köməyi ilə ilkin məsələ  $G'$ -in elementlərinin sayı qədər az dəyişənli (1) kimi onunla ekvivalent olan məsələyə gətirilir. Sonra isə

$$\begin{aligned} \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) \rightarrow \max, \quad x \in X \\ \lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{aligned}$$

kimi məsələni [1]-dəki qayda ilə həll edib  $Y^p$  və  $X^p$ -ni qururuq.

İşdə [1,2]-də olan metodlardan istifadə edilmişdir.

### Ədəbiyyat

1. Гейл Д. Теория линейных экономических моделей. М.: Изд-во иностран. лит., 1963, 420 с
2. Гамидов Р.Г. Построение поретовой границы многокритериальных задач. Изв. АНА Азерб., серия физ.-тех. и мат. наук, 1999, №3-4, стр. 37-44.

## QEYRİ-HƏYAT SIĞORTASINDA SIĞORTA EHTİYATLARININ STATİSTİK QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ VƏ EHTİYAT RİSKİNİN NƏZƏRİ MODELƏŞDİRİLMƏSİ

**Hərbizadə Çimnaz Ehtiram qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

harbizadechimnaz@gmail.com

**Xülasə:** Bu tezisdə qeyri-həyat sığortasında sığorta ehtiyatlarının statistik qiymətləndirilməsi və ehtiyat riskinin modelləşdirilməsi məsələləri tədqiq olunur. Cari ehtiyatların hesablanması üçün Bayes stoxastik yanaşması tətbiq edilir və Chain-Ladder metodunun inkişaf etdirilmiş forması istifadə olunur. Bir neçə sığorta növü üzrə məcmu ehtiyatın müəyyən olunması zamanı kopula funksiyaları vasitəsilə asılılıq nəzərə alınır. Eyni zamanda risk marjasının hesablanması üçün kapitalın dəyəri metodu və onun alternativ forması təhlil edilir. Nəticələr göstərir ki, ehtiyat riskinin düzgün qiymətləndirilməsi üçün qeyri-müəyyənlik və portfellerarası əlaqələr mütləq nəzərə alınmalıdır.

**Açar sözlər:** qeyri-həyat sığortası, sığorta ehtiyatları, ehtiyat riski, Bayes yanaşması, Chain-Ladder metodu, kopula funksiyası, risk marjası.

Qeyri-həyat sığortasında sığorta ehtiyatları sığortaçının gələcək ödəniş öhdəliklərini yerinə yetirməsi üçün formalaşdırdığı əsas maliyyə mənbələrinəndən biridir. Bu ehtiyatlar artıq baş vermiş, lakin tam icra olunmamış sığorta hadisələri üzrə gələcək ödənişləri əhatə edir və onların düzgün qiymətləndirilməsi sığorta şirkətinin maliyyə sabitliyinə birbaşa təsir göstərir [1].

Cari qiymətləndirmə gələcək pul axınlarının ehtimal çəkili orta dəyəri kimi başa düşülür və bu, sığorta öhdəliklərinin əsaslandırılmış cari dəyərini ifadə edir. Zərərlərin inkişafını modelləşdirmək üçün ödəniş üçbucağından istifadə olunur. Tutaq ki,  $Y_{i,j}$  –  $i$ -ci sığorta ili üzrə ( $j - 1$ ) il gecikmə ilə ödənilmiş artımlı zərər məbləğini,  $Z_{i,j}$  isə yığım məbləğini göstərir. Bu halda inkişaf əmsalı belə müəyyən olunur [3]:

$$DF_{i,j} = \frac{Z_{i,j+1}}{Z_{i,j}}. \quad (1)$$

Klassik Chain-Ladder metodunda bu əmsallar üzrə orta göstəricilər hesablanır və həcmə görə çəkilən inkişaf əmsalı aşağıdakı kimi verilir:

$$WDF_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} Z_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} Z_{i,j}}. \quad (2)$$

Bu yanaşma praktik olsa da, təsadüfi dəyişkənliyi nəzərə almır. Bu səbəbdən Bayes yanaşmasında inkişaf əmsalları təsadüfi dəyişən kimi modelləşdirilir [5]:

$$DF_{i,j} \sim N\left(\theta_j, \frac{1}{\tau_{i,j}}\right). \quad (3)$$

Burada  $\theta_j$  – inkişaf ilinə uyğun orta əmsal,  $\tau_{i,j}$  isə dəqiqlik parametridir. Parametrlərin özü də ayrıca paylanma ilə qəbul edilir:

$$\theta_j \sim N\left(\mu_\theta, \frac{1}{\tau_\theta}\right). \quad (4)$$

və prior paylanmalar:

$$\tau \sim \Gamma(a, b), \mu_\theta \sim N(c, d), \tau_\theta \sim \Gamma(e, f). \quad (5)$$

Bu model Bayes iyerarxik yanaşmasını formalaşdırır və nəticədə ehtiyatın yalnız nöqtə qiyməti deyil, onun paylanması da əldə olunur. Bu isə ehtiyat riskinin daha düzgün ölçülməsinə imkan verir.

Bayes yanaşmasında aprior məlumat müşahidə olunan məlumatla birləşdirilərək aposterior paylanma əldə edilir. Bu paylanmanın analitik formada tapılması çətin olduğundan Markov zənciri Monte Karlo (MCMC) üsulları tətbiq olunur. Xüsusilə Gibbs algoritmi vasitəsilə parametrlər üzrə seçmələr aparılır və bu seçmələr əsasında ehtiyatın orta qiyməti, dispersiyası və risk göstəriciləri hesablanır. Bu yanaşmanın əsas üstünlüyü parametr qeyri-müəyyənliyini də nəzərə almasıdır [2].

Bir neçə sığorta xətti üzrə fəaliyyət göstərən şirkətlər üçün ehtiyatların ayrıca hesablanması kifayət etmir, çünki real risk məcmu portfel üzrə formalaşır. Əgər bu xətlər arasında asılılıq mövcuddursa, onu nəzərə almamaq riskin düzgün qiymətləndirilməməsinə səbəb ola bilər. Bu məqsədlə kopula funksiyalarından istifadə olunur. Sklar teoreminə əsasən birgə paylanma belə yazılır:

$$F(x_1, \dots, x_p) = C(F_1(x_1), \dots, F_p(x_p)). \quad (6)$$

Burada  $C$  kopula funksiyasıdır və o, dəyişənlər arasındakı asılılıq strukturunu müəyyən edir. Kopulanın ümumi tərif:

$$C(u_1, \dots, u_p) = P(U_1 \leq u_1, \dots, U_p \leq u_p). \quad (7)$$

Kopula parametrləri maksimum ehtimallılıq üsulu ilə qiymətləndirilir:

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \log c(F_1, \dots, F_k) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \log f_j. \quad (8)$$

Bu yanaşma həm müstəqillik, həm də asılılıq hallarında ehtiyat riskinin müqayisəsinə imkan verir və göstərir ki, asılılıq nəzərə alınmadıqda risk kapitalı az qiymətləndirilə bilər. Cari ehtiyat gözlənilən ödənişləri ifadə etsə də, qeyri-müəyyənliyi tam əhatə etmir. Bu səbəbdən risk marjası əlavə olunur. Risk marjası gələcək qeyri-müəyyənliyin maliyyə dəyərini göstərir və Solvency II çərçivəsində texniki ehtiyatların tərkib hissəsidir [3].

Kapitalın dəyəri metoduna görə risk marjası belə hesablanır:

$$RM_0 = \sum_{t=1}^{n-1} \frac{CoC \cdot SCR_{t-1}}{(1+i(0,t))^t}. \quad (9)$$

Bu formul gələcək kapital xərclərinin diskontlaşdırılması prinsipinə əsaslanır. Lakin bu yanaşma bəzi hallarda riskin iki dəfə nəzərə alınmasına səbəb olur. Bu problemi azaltmaq üçün alternativ yanaşma təklif edilir:

$$RM_0 = \sum_{t=1}^{n-1} CoC \cdot SC R_0 \cdot \frac{CE_{t-1}}{CE_0} \cdot \max(1, \ln(1 + \gamma_{t-1})) \cdot \frac{1}{(1+i(0,t))^t}. \quad (10)$$

burada

$$\gamma_t = \frac{CV(Res_t)}{CV(Res_0)} \quad (11)$$

Sadələşdirilmiş formada isə:

$$RM_0 = \frac{CoC \cdot (VaR_{99.5\%}(Res_0) - CE_0) \cdot ProFact}{1 + CoC \cdot ProFact} \quad (12)$$

Bu yanaşma risk marjasını ehtiyatın dəyişkənliyi ilə əlaqələndirir və daha real nəticə verir.

Nəticə olaraq qeyd etmək olar ki, qeyri-həyat sığortasında ehtiyatların statistik qiymətləndirilməsi üçün stoxastik modellər daha məqsəduyğundur. Bayes yanaşması və MCMC metodları qeyri-müəyyənliyi daha düzgün əks etdirir, kopula funksiyaları isə portfellərarası asılılığı nəzərə almağa imkan

verir. Risk marjasının hesablanması isə alternativ modellər daha əsaslandırılmış nəticələr verir və bu yanaşmalar sığorta şirkətlərində risklərin idarə olunmasını əhəmiyyətli dərəcədə yaxşılaşdırır.

### **Ədəbiyyat**

1. T.R.Məmtiyev. Qeyri-həyat sığortası riyaziyyatı. Bakı, 2022, 948 s.
2. Martínez Miranda, María Dolores, Bent Nielsen, Jens Perch Nielsen, and Richard Verrall. "Cash Flow Simulation for a Model of Outstanding Liabilities Based on Claim Amounts and Claim Numbers." *ASTIN Bulletin*, 2011, pp. 107–129.
3. Pigeon, Mathieu, and François Duval. "Individual Loss Reserving Using a Gradient Boosting-Based Approach." *Risks*, vol. 7, no. 3, 2019.
4. Verrall, Richard, and Jens Perch Nielsen. "Prediction of RBNS and IBNR Claims Using Claim Amounts and Claim Counts." 2010.
5. Wüthrich, Mario. "Machine Learning in Individual Claims Reserving." *Scandinavian Actuarial Journal*, 2018, pp. 465–480.

## **İNFORMASIYA SİSTEMLƏRİNDƏ KİBERTƏHLÜKƏSİZLİK İNSİDENTLƏRİNİN İDARƏ EDİLMƏSİ**

**Həsənova Nazlı Əli qızı, Hüseynova Sitarə Əli qızı**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*(AU, İnformasiya–kommunikasiya texnologiyaları fakültəsi)*

*Nazly.Hasanova@au.edu.az, sitara.huseynova@student.au.edu.az*

**Xülasə:** *Tədqiqat işində informasiya sisteminin təhlükəsizliyinin təmin edilməsində kibertəhlükəsizlik insidentlərinin menecmentinin əsas komponentləri və hadisələrin prioritetləri araşdırılır.*

**Açar sözlər:** *informasiya sistemi, proqram təminatı təhlükəsizliyi, kibertəhlükəsizlik insidenti, insident menecmenti.*

Müasir dövrdə rəqəmsal transformasiya prosesləri informasiya sistemlərinin (İS) kritik infrastrukturun ayrılmaz hissəsinə çevrilməsinə səbəb olmuşdur. Lakin bu inkişaf eyni zamanda kibertəhdidlərin mürəkkəbliyini və miqyasını da artırır. Kibertəhlükəsizlik insidentlərinin menecmenti, informasiya sistemlərində konfidensiallıq, bütövlük və əlçatanlıq prinsiplərinin qorunması üçün reaktiv və proaktiv tədbirlərin vəhdətini təşkil edir. İnformasiya təhlükəsizliyinin təmin edilməsi yalnız qabaqlayıcı texnologiyaların tətbiqi ilə məhdudlaşmır; eyni zamanda baş vermiş qaçılmaz insidentlərin minimum zərərlə ara-

dan qaldırılması və sistemin fəaliyyətinin bərpası üçün effektiv idarəetmə çərçivəsinin qurulmasını tələb edir. NIST SP 800-61 standartına əsasən, insidentlərin idarə edilməsi dövrü (hazırlıq, aşkarlama, lokallaşdırma və bərpa) müəssisələrin rəqəmsal dayanıqlığının əsas sütunudur. Effektiv insident menecmenti təşkilati riskləri azaldır, maliyyə itkilərinin qarşısını alır və informasiya sistemlərinin uzunmüddətli təhlükəsizlik strategiyasının formalaşmasında həlledici rol oynayır. Menecment sisteminin qurulması aşağıdakı əsas komponentlərə söykənir:

- **Siyasətin müəyyən edilməsi:** Siyasət rəhbərliyin hadisələrə reaksiya ilə bağlı mövqeyini ifadə edən sənəddir. Siyasət daxilində hadisənin tərfi, hadisənin idarə edilməsi üçün rollar və məsuliyyətlər, eləcə də rəhbərliyin dəstəyi öz əksini tapmalıdır.
- **Hadisələrə reaksiya planı:** Plan hadisənin idarə edilməsi prosesində atılacaq addımları təsvir edən yol xəritəsidir. Bu plan təşkilat daxilində hadisələrin sistemli şəkildə həll olunmasını təmin edir.
- **Hadisələrə reaksiya komandası (IRT):** Effektiv menecment sistemi üçün komandanın strukturu müəyyən edilməlidir. Bura mərkəzləşdirilmiş hadisələrə reaksiya komandası, paylanmış komandalar və ya koordinasiyaedici komanda modelləri daxil ola bilər.
- **Hadisə yoxlama siyahıları (Checklists):** Bu siyahılar hadisə baş verdikdə hər bir addımın ardıcılıqla yerinə yetirilməsini təmin edən bir vasitədir.

Onlar hadisənin idarə edilməsi zamanı heç bir kritik mərhələni qaçırmamağa kömək edir.

- **Ünsiyyət və rabitə sistemi:** Hadisənin idarə edilməsi zamanı komanda üzvləri, rəhbərlik və lazım gəldikdə hüquq-mühafizə orqanları ilə əlaqə qurmaq üçün təhlükəsiz rabitə kanalları və əlaqə məlumatları siyahısı mövcud olmalıdır [1].

İS-lərində baş verən imtina hadisələrinin prioritetləşdirilməsi kibertəhlükəsizlik insidentlərinin idarə edilməsində ən kritik qərar nöqtələrindəndir. Hadisələr müvafiq amillərə əsasən prioritetləşdirilməlidir:

- **Hadisənin funksional təsiri:** IT sistemlərini hədəf alan hadisələr adətən həmin sistemlərin təmin etdiyi biznes funksionallığına təsir edir və nəticədə həmin sistemlərin istifadəçilərinə müəyyən mənfi təsir göstərir. Hadisəni idarə edənlər hadisənin təsirlənmiş sistemlərin mövcud funksionallığına necə təsir edəcəyini, həmçinin hadisə dərhal nəzarət altına alınmazsa, onun gələcəkdə mümkün olan funksional təsirini nəzərə almalıdırlar.
- **Hadisənin məlumatlara təsiri:** Hadisələr təşkilatın məlumatlarının məxfiliyi, bütövlüyü və mövcudluğuna təsir edə bilər. Həssas məlumatların çıxarılması

rılmasına səbəb olan bir hadisə, əgər məlumatlardan hər hansı biri tərəfdəş təşkilata aid idisə, digər təşkilatlara da təsir göstərə bilər. Hadisəni idarə edənlər bu məlumatların çıxarılmasının təşkilatın ümumi missiyasına necə təsir edəcəyini nəzərə almalıdırlar.

- **Hadisədən bərpa olunma:** Hadisənin həcmi və təsir etdiyi resursların növü həmin hadisədən bərpa olunmaq üçün sərf edilməli vaxt və resursların miqdarını müəyyən edəcək. Hadisədən həqiqətən bərpa olunmaq üçün lazım olan səylər nəzərə alınmalı və onu bərpa səylərinin yaradacağı dəyər və hadisə ilə bağlı tələblərlə müqayisə etməlidirlər.

İnsidentlərə reaksiya metodologiyaları adətən hazırlığa üstünlük verir. Təkcə təşkilatın hadisələrə cavab verməyə hazır olması üçün insidentlərə reaksiya qabiliyyəti yaratmaqla kifayətlənməyib, həm də sistemlərin, şəbəkələrin və tətbiqlərin kifayət qədər təhlükəsiz olmasını təmin etməklə hadisələrin qarşısını almağı da nəzərdə tutur. Hadisələrin qarşısının effektiv şəkildə alınması üçün proqram təminatı və sistem səviyyəsində aşağıdakı metodoloji addımlar tətbiq edilməlidir:

- **Sistemlərin və tətbiqlərin təhlükəsizliyi:** Hər bir sistem və tətbiq müvafiq dərəcədə təhlükəsizliyə malik olmalıdır. Bu fəaliyyətlərə sistemlərin bərkidilməsi (hardening), konfigurasiyaların mütəmadi olaraq yoxlanılması və tətbiqlərin təhlükəsizlik boşluqlarına qarşı skan edilməsi daxildir.
- **Zəifliklərin idarə edilməsi:** Təşkilatın poçt serverinin zəifliyini hədəf alan yeni bir istismar proqramı barədə elanlar və ya veb serverin qeydlərində zəiflik skaneri istifadəsinin izləri mütəmadi izlənilməlidir. Proqram təminatının təhlükəsizliyini təmin etmək üçün məlum zəifliklər vaxtında aşkar edilməli və aradan qaldırılmalıdır.
- **Öncədən xəbərdar edici əlamətlər:** Əgər öncədən xəbərdar edici əlamətlər aşkarlanarsa, təşkilat təhlükəsizlik vəziyyətini dəyişərək hədəfi hücumdan qorumaq imkanı əldə edə bilər. Ən azı, təşkilat hədəfə yönəlmiş fəaliyyəti daha yaxından izləyə bilər.
- **İstifadəçi maarifləndirilməsi:** İstifadəçiləri sistemlərdən, şəbəkələrdən və tətbiqlərdən istifadə ilə bağlı risklər barədə məlumatlandırmaq, onların proqram təminatı ilə bağlı təhlükəsizlik siyasətlərinə riayət etməsini təmin edir [2].

Bu yanaşma hadisələrə reaksiya proqramlarının uğuru üçün əsasdır və tətbiqlərin hələ istismar mərhələsindən öncə təhlükəsiz olmasını hədəfləyir. İnsidentlərin funksional və məlumat təsirinə görə prioritetləşdirilməsi, biznesə dəyən zərərin minimuma endirilməsində həlledici rol oynayır. Eyni zamanda, proqram təminatının təhlükəsizliyi (SDLC) və sistemlərin bərkidilməsi (harde-

ning) vasitəsilə hadisələrin qarşısının alınması hazırlıq mərhələsinin əsasını təşkil edir. Təşkilat daxilində siyasətin müəyyən edilməsi, xüsusi reaksiya komandalарının (IRT) yaradılması və yoxlama siyahılarının tətbiqi insidentlərin sistemli şəkildə həll olunmasını təmin edir.

Yekun olaraq, effektiv menecment sistemi təşkilati riskləri azaldır və gələcəkdə baş verə biləcək bənzər hadisələrin qarşısını almaq üçün dərslər çıxarmağa imkan verir.

### **Ədəbiyyat**

1. И.В.Жидков, И.В.Зубарев, И.В.Хабибуллин. Выбор рациональной модели разработки безопасного программного обеспечения. Вопросы кибербезопасности, 2021, №5(45), с.21–29.
2. Z.Ciekanowski, J.Nowicka, M.Czternastek, S.Żurawski, P.Mikosik. How Cybersecurity Shapes Effective Organizational Management. European Research Studies Journal, 2024, Volume XXVII, Issue 2, pp.454–464.

## **VEB RESURLARDA İSTİFADƏÇİ AUTENTİFİKASIYASI İLƏ İNFORMASIYA TƏHLÜKƏSİZLİYİNİN TƏMİN EDİLMƏSİ**

**Həsənova Nazlı Əli qızı, Quliyev Cəmil Kərim oğlu**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*(AU, İnformasiya–kommunikasiya texnologiyaları fakültəsi)*

*Nazly.Hasanova@au.edu.az, jamil.quliyev@student.au.edu.az*

**Xülasə:** *Tədqiqat işində NIST SP 800-63-3 standartı çərçivəsində veb resursların təhlükəsizliyini təmin edən autentifikasiya vasitələri, onların müqayisəli təhlili və çoxfaktorlu müdafiə alqoritmlərinin tətbiqi araşdırılır.*

**Açar sözlər:** *informasiya təhlükəsizliyi, veb resurslar, autentifikasiya, rəqəmsal identifikasiya, çoxfaktorlu autentifikasiya.*

Rəqəmsal dünya inkişaf etdikcə, daha güclü təhlükəsizlik tədbirlərinə və istifadəçilər üçün rahat təcrübəyə olan tələbat da artır. Autentifikasiya üsulları həm icazəsiz girişin qarşısını alan ilk bəyər rolunu oynayır, həm də istifadəçilərin tətbiqlər haqqında ilk təəssüratını formalaşdırır. Müasir rəqəmsal ekosistemdə istifadəçi identifikasiyası və autentifikasiyası veb resursların təhlükəsizliyinin təməlini təşkil edir. NIST SP 800-63-3 (Rəqəmsal İdentifikasiya Bələdçisi) standartına əsasən, rəqəmsal identifikasiya prosesi istifadəçinin özünü təsdiq etməsi və sistemin bu şəxsiyyəti etibarlı şəkildə yoxlaması üzərində quru-

lur. Rəqəmsal resurslara müraciət edən subyektlərin (istifadəçilərin) autentifikasiyası, informasiya təhlükəsizliyinin təmin olunmasında müdafiənin ilk və ən vacib səddidir.

Veb tətbiqlərdə istifadə olunan autentifikasiya vasitələri, identifikasiya məlumatlarının (PII - Şəxsi İdentifikasiya Məlumatları) mühafizəsi və etibarlı girişin idarə edilməsi üçün beynəlxalq standartlara uyğun şəkildə layihələndirilməlidir. NIST standartları, autentifikasiya prosesində risklərin idarə edilməsi çərçivəsini (RMF - Risk Management Framework) və rəqəmsal identifikasiyanın həyat dövrünü müəyyən edərək, təhlükəsizlik mühitinin formalaşdırılması üçün metodoloji əsasları təqdim edir.

Veb tətbiqlərdə identifikasiya proseslərinin beynəlxalq standartlara (NIST) uyğunlaşdırılması ilə informasiya təhlükəsizliyinin yüksəldilməsi imkanlarını artırılması vacib məsələlərdəndir. Veb resurslarda istifadə edilən autentifikasiya üsullarının müqayisəli təhlilinin aparılması və potensial autentifikasiya hücumlarına qarşı dayanıqlı müdafiə mexanizmlərinin tətbiq edilməsi doğru autentifikasiya metodunun seçilməsi ilə nəticələnir. Bu isə çoxfaktorlu autentifikasiya (MFA) və rəqəmsal identifikasiyanın təmin edilməsi alqoritmlərinin qurulması, şifrə (PIN), birdəfəlik şifrə (OTP) və kriptografik autentifikasiya vasitələrinin integrasiyası ilə həyata keçirilir.

Veb tətbiqlərdə autentifikasiya vasitələrinin seçimi NIST SP 800-63-3 standartında təsvir edilən autentifikasiya faktorlarına əsaslanır. Standarta görə, bu vasitələr aşağıdakı kimi təsnif edilir:

- **Yadda saxlanılan gizli məlumatlar (Memorized Secret Authenticators)** - İstifadəçinin yadda saxladığı və daxil etdiyi şifrələr (passwords) və PIN kodlar;
- **Birdəfəlik kodlar (Look-up Secret Authenticators)** - İstifadəçinin əvvəlcədən təqdim olunan siyahıdan istifadə edərək daxil etdiyi birdəfəlik kodlar;
- **Kənar vasitələrlə ötürülən kodlar (Out-of-Band Authenticators)** - İstifadəçinin ayrı bir cihaz və ya kanal vasitəsilə aldığı (məsələn, SMS və ya e-mail) təsdiq kodları;
- **Kriptografik vasitələr (Cryptographic Hardware/Software Authenticators)** - FIDO tokenlər, smart kartlar və TOTP (Time-Based One-Time Password) kimi proqram təminatı əsaslı kriptografik mexanizmlər [1].

Vasitələrin təhlükəsizlik səviyyəsi AAL (Authenticator Assurance Levels) ilə müəyyən edilir. AAL1, AAL2 və AAL3 səviyyələri autentifikasiya prosesində tələb olunan təhlükəsizlik gücünü və risklərin idarə edilməsi (RMF) çərçivəsini formalaşdırır. Autentifikasiya üsullarının müqayisəli təhlili AAL (Authenticator Assurance Levels) çərçivəsində aparılır. Metodologiyaya görə, hər bir üsulun effektivliyi onun müqavimət göstərə biləcəyi hücum növləri (məsələn, *phishing*



və ya *man-in-the-middle*) ilə ölçülür. Müqayisə zamanı istifadəçi təcrübəsi (usability) və təhlükəsizlik səviyyəsi arasındakı balans əsas götürülür. Standart, aşağı səviyyəli (AAL1) autentifikasiya üsulları ilə yüksək təhlükəsizlik tələb edən (AAL3) üsulların təhlükə modellərinə görə fərqləndirilməsini tələb edir.

Hücumlardan qorunma metodologiyası RMF (Risk Management Framework) çərçivəsində qurulur. Bu yanaşma, sistemin autentifikasiya prosesində *Presentation Attack Detection* (PAD) kimi mexanizmlərin tətbiqini nəzərdə tutur. Metodologiya, sistemin autentifikasiya məlumatlarının sızmasının qarşısını almaq üçün etibarlı kanal (secure channel) vasitəsilə əlaqə saxlanılmasını və istifadəçinin şəxsiyyətinin yoxlanılması prosesində hücum cəhdlərinin (məsələn, şifrə oğurluğu və ya təkrar giriş hücumları) sistem tərəfindən aşkar edilərək bloklanmasını tələb edir [2].

Çoxfaktorlu autentifikasiya alqoritmi "multi-factor" prinsipinə əsaslanır. Standarta görə, müdafiə alqoritmi qurularkən istifadəçi iki və ya daha çox müstəqil autentifikasiya faktoru (məsələn, istifadəçinin bildiyi gizli məlumat və sahib olduğu fiziki qurğu) ilə təsdiqlənməlidir. Metodologiya, *Time-Based One-Time Password* (TOTP) kimi alqoritmlərin istifadəsi zamanı vaxt sinxronizasiyasının və kriptografik açarların etibarlılığının təmin edilməsini, sistemin həm texniki, həm də təhlükəsizlik səviyyəsində inteqrasiyasını tələb edir.

Aparılan tədqiqat göstərir ki, veb resurslarda informasiya təhlükəsizliyinin təmin edilməsi istifadəçi autentifikasiyasının NIST SP 800-63-3 standartında təsbit olunmuş "Risklərin İdarə Edilməsi Çərçivəsi" (RMF) və "Autentifikasiya Təminat Səviyyələri" (AAL) meyarları əsasında qurulmasından birbaşa asılıdır. Müasir autentifikasiya vasitələrinin, xüsusilə çoxfaktorlu autentifikasiya (MFA) və kriptografik alqoritmlərin (TOTP) tətbiqi, "phishing" və "man-in-the-middle" kimi geniş yayılmış kibertəhlükələrin qarşısının alınmasında ən effektiv müdafiə mexanizmidir. Beləliklə, sistemin təhlükəsizlik profilinə uyğun autentifikasiya üsullarının seçilməsi və vaxtaşırı yenilənməsi veb tətbiqlərin dayanıqlılığını əhəmiyyətli dərəcədə yüksəldir.

### Ədəbiyyat

1. A.B.Sofian, A.F.A.B.Peradus, F.Yong, I.Shearer, N.N.B.Ismail, Y.A.Mahendran və M.Faisal, "Enhancing authentication security: Analyzing time-based one-time password systems," *International Journal of Computer Technology and Science*, 2024, iyul, cild 1, №3, s.56–70.
2. V.Dixit və D.Kaur, "Development of two-factor authentication to mitigate phishing attack," *Journal of Software Engineering and Applications*, 2024, cild 17, №11, s.297–308.

## **GARCH, EGARCH VƏ TGARCH MODELLƏRİNİN QURULMASI VƏ MÜQAYISƏLİ QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ: EUR/USD MƏZƏNNƏSİ ƏSASINDA EMPİRİKİ TƏHLİL**

**Həsənova Nərmin Natiq qızı**

*(BDU, SABAH mərkəzi)*

*nhesanova1000@gmail.com*

**Xülasə:** *Bu tədqiqatda EUR/USD məzənnəsi üzrə volatilliyin modelləşdirilməsi məqsədilə GARCH modeli, EGARCH modeli və TGARCH modeli modelləri tətbiq edilmişdir. Logaritmik gəlirlər əsasında qurulan modellər maksimum ehtimallıq üsulu ilə qiymətləndirilmiş və AIC, BIC meyarları ilə müqayisə olunmuşdur. Nəticələr göstərmişdir ki, GARCH modeli ümumi volatillik dinamikasını izah etsə də, asimmetrik təsirləri nəzərə almaqda məhduddur. EGARCH və TGARCH modelləri isə mənfi şokların daha güclü təsirini əks etdirərək daha dəqiq proqnoz nəticələri vermişdir. Bu, leverage effektinin mövcudluğunu təsdiqləyir. Tədqiqat nəticələri valyuta bazarında risklərin idarə olunması və proqnozlaşdırma üçün praktik əhəmiyyət daşıyır.*

**Açar sözlər:** *EUR/USD, volatillik, GARCH (1,1), ARCH effekti, şərti dispersiya, volatillik diapazonu, ehtiyat səviyyələri, risk proqnozu, valyuta bazarı.*

Müasir qlobal maliyyə bazarlarında valyuta məzənnələrinin dinamikası iqtisadi sabitliyin təmin olunması, beynəlxalq ticarət əlaqələrinin genişlənməsi və investisiya qərarlarının formalaşması baxımından mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Xüsusilə EUR/USD valyuta cütünü dünya üzrə ən yüksək likvidliyə malik maliyyə alətlərindən biri olmaqla, qlobal kapital axınlarının əsas indikatorlarından hesab olunur. Bu baxımdan həmin məzənnənin dəyişkənliyinin (volatilliyinin) düzgün qiymətləndirilməsi maliyyə risklərinin idarə olunması və proqnozlaşdırma baxımından xüsusi aktuallıq daşıyır [6, s. 120].

Maliyyə zaman sıralarının əsas xüsusiyyətlərindən biri olan volatillik klasterləşməsi, yəni yüksək dəyişkənlik dövrlərinin bir-birini izləməsi və aşağı dəyişkənlik mərhələləri ilə növbələşməsi, klassik statistik modellərin tətbiq imkanlarını məhdudlaşdırır. Bu səbəbdən şərti dispersiyanın modelləşdirilməsinə əsaslanan ekonometrik yanaşmalar geniş yayılmışdır. Bu istiqamətdə GARCH modeli modeli maliyyə bazarlarında volatilliyin təhlili üçün əsas metodlardan biri kimi qəbul edilir və onun tətbiqi geniş empirik nəticələrlə təsdiqlənmişdir [2, s. 310].

Maliyyə bazarlarında şokların təsiri simmetrik xarakter daşıyır. Belə ki, mənfi informasiyanın bazara təsiri adətən müsbət informasiyadan daha güclü olur və bu hadisə "leverage effekti" kimi xarakterizə olunur. Bu xüsusiyyətin

nəzərə alınması məqsədilə EGARCH modeli və TGARCH modeli modelləri işlənib hazırlanmışdır. Bu modellər volatilliyin asimmetrik davranışını daha adekvat şəkildə əks etdirməyə imkan verir və praktiki tətbiqlərdə daha dəqiq nəticələr əldə olunmasına şərait yaradır [3, s. 350; 4, s. 1785].

Son illərdə aparılmış empirik tədqiqatlar göstərir ki, müxtəlif GARCH tipli modellərin müqayisəli təhlili valyuta bazarlarında volatilliyin daha düzgün qiymətləndirilməsinə imkan verir. Xüsusilə, inkişaf etmiş maliyyə bazarlarında EGARCH və TGARCH modellərinin proqnozlaşdırma qabiliyyətinin daha yüksək olduğu müşahidə edilmişdir [1, s. 990; 5, s. 210]. Bu baxımdan EUR/USD məzənnəsi üzərində aparılan analizlər həm nəzəri modellərin effektivliyinin yoxlanılması, həm də praktik tətbiqlərin genişləndirilməsi baxımından mühüm əhəmiyyət daşıyır.

Tədqiqatın məqsədi EUR/USD məzənnəsinin volatilliyini GARCH modeli, EGARCH modeli və TGARCH modeli modelləri əsasında modelləşdirmək və onların proqnozlaşdırma qabiliyyətini müqayisəli şəkildə qiymətləndirməkdən ibarətdir. Bu məqsədə nail olmaq üçün valyuta məzənnəsinin statistik xüsusiyyətləri təhlil edilir, müvafiq modellər qurulur və əldə olunan nəticələr müqayisəli şəkildə qiymətləndirilir.

Maliyyə zaman sıralarının təhlilində əsas problemlərdən biri dəyişkənliyin sabit olmaması, yəni dispersiyanın zaman üzrə dəyişməsidir. Klassik xətti modellər bu xüsusiyyəti nəzərə almadığı üçün maliyyə bazarlarında müşahidə olunan volatillik davranışını tam əks etdirə bilmir. Bu səbəbdən şərti dispersiyanın modelləşdirilməsinə əsaslanan yanaşmalar geniş tətbiq olunmağa başlamışdır. Bu istiqamətdə GARCH modeli modeli maliyyə zaman sıralarında volatilliyin ölçülməsi və proqnozlaşdırılması üçün ən geniş istifadə olunan metodlardan biridir [2, s. 308].

GARCH modeli əvvəlki dövrlərdə müşahidə olunan səhvlərin kvadratları və əvvəlki dispersiya qiymətləri əsasında cari dövrün volatilliyini müəyyən edir. Bu model aşağıdakı ümumi formada ifadə olunur:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

Burada  $\sigma_t^2$ - cari dövrün şərti dispersiyası,  $\varepsilon_{t-1}^2$  – əvvəlki dövrün səhv kvadratı  $\sigma_{t-1}^2$  isə əvvəlki dövrün dispersiyasıdır. Modelin əsas üstünlüyü volatillik klasterləşməsinə izah etməsidir. Lakin bu modelin əsas çatışmazlığı onun simmetrik xarakter daşmasıdır, yəni müsbət və mənfi şokların təsiri eyni qəbul edilir [6, s. 215].

Simmetriya problemini aradan qaldırmaq məqsədilə EGARCH modeli modeli təklif olunmuşdur. Bu modeldə dispersiyanın loqarifmik forması istifadə olunur və şokların təsiri asimmetrik şəkildə nəzərə alınır:

$$\ln(\sigma_t^2) = \omega + \ln(\sigma_{t-1}^2) + \gamma \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \alpha \left( \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| + E \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| \right)$$

Bu modelin əsas üstünlüyü ondan ibarətdir ki, mənfi və müsbət şokların volatilliyə təsiri fərqli şəkildə modelləşdirilir. Əgər  $\gamma < 0$  olarsa, bu leverage effektinin mövcudluğunu göstərir. EGARCH modeli xüsusilə maliyyə bazarlarında risklərin daha dəqiq qiymətləndirilməsinə imkan verir [3, s. 349].

Asimmetrik volatilliyin modelləşdirilməsi üçün istifadə olunan digər mühüm yanaşmalardan biri TGARCH modeli modelidir. Bu modeldə mənfi şoklar üçün əlavə parametr daxil edilir:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma D_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

burada  $D_{t-1}$  indikator dəyişəni olub, əgər  $\varepsilon_{t-1} < 0$  olarsa 1, əks halda 0 qiymətini alır. Bu yanaşma mənfi şokların volatilliyə təsirini ayrıca qiymətləndirməyə imkan verir. Əgər  $\gamma > 0$  olarsa, bu, mənfi xəbərlərin bazarda daha güclü volatillik yaratdığını göstərir [4, s. 1782].

Tədqiqatda EUR/USD valyuta cütliyü üzrə gündəlik bağlanmış qiymətləri istifadə olunur. Analiz üçün əvvəlcə logaritmik gəlirlər hesablanır:

$$r_t = \ln\left(\frac{p_t}{p_{t-1}}\right)$$

burada  $P_t$  – cari dövrün qiyməti,  $P_{t-1}$  isə əvvəlki dövrün qiymətidir. Bu yanaşma zaman sırasını stasionarlaşdırmaq və modelləşdirmə üçün uyğun hala gətirmək məqsədi daşıyır [5, s. 145].

Model parametrləri maksimum ehtimallıq üsulu ilə qiymətləndirilir. Hər bir model üçün aşağıdakı kriteriyalar əsasında müqayisə aparılır:

- Akaike informasiya kriteriyası (AIC)
- Schwarz kriteriyası (BIC)
- Log-likelihood funksiyası

Bu göstəricilər modellərin uyğunluq səviyyəsini və proqnozlaşdırma qabiliyyətini qiymətləndirməyə imkan verir [6, s. 332].

Empirik nəticələr göstərir ki, GARCH modeli ümumi volatillik dinamikasını izah etsə də, asimmetrik təsirləri nəzərə almır. EGARCH və TGARCH modelləri isə mənfi şokların təsirini daha dəqiq əks etdirərək daha yüksək proqnoz dəqiqliyi təmin edir. Xüsusilə maliyyə böhranı və qeyri-sabitlik dövrlərində bu modellərin üstünlüyü daha aydın müşahidə olunur [1, s. 995].

Aparılmış təhlil göstərir ki, GARCH modeli modeli volatilliyin ümumi xüsusiyyətlərini izah etmək üçün effektiv olsa da, EGARCH modeli və TGARCH modeli modelləri asimmetrik təsirləri nəzərə almaq baxımından daha üstün nəticələr verir. Bu səbəbdən EUR/USD məzənnəsinin volatilliyinin proqnozlaşdırılmasında asimmetrik modellərin istifadəsi daha məqsədəuyğun hesab olunur.

### Ədəbiyyat

1. Charfi S., Mselmi F. Exchange rate volatilliyinin GARCH və EGARCH modelləri ilə modelləşdirilməsi və proqnozlaşdırılması // *Quantitative Finance and Economics*. – 2022. – Vol. 6, № 2. – s. 206–222.
2. Darma Y.D., Utami A., Pujihearta P. Volatilliyin proqnozlaşdırılması: GARCH və EGARCH modellərinin müqayisəsi (2018–2024 məlumatları əsasında) // *International Journal of Business and Economics*. – 2025. – s. 320–335.
3. Ekeocha P.C. Exchange rate volatility və iqtisadi qeyri-müəyyənliyin GARCH-MIDAS modeli ilə təhlili // *Applied Economics Letters*. – 2025. – s. 1–15.
4. Hassan A. Normalizing flow yanaşması ilə genişləndirilmiş GARCH, TGARCH və EGARCH modellərinin müqayisəli qiymətləndirilməsi // *Risks*. – 2026. – Vol. 14, № 5. – s. 100–118.
5. Ni X. Comparative analysis of exchange rate volatility forecasting and Value-at-Risk measurement using GARCH-type models (EUR/USD və digər valyutalar üzrə) // *Advances in Economics, Business and Management Research*. – 2026. – s. 335–348. (GARCH, EGARCH və GJR/TGARCH modellərinin müqayisəsi, EUR/USD daxil olmaqla)
6. Suwondo J. GARCH, GJR-GARCH və EGARCH modellərinin müqayisəli təhlili və volatillik proqnozlaşdırılması // *Economics and Data Analysis Journal*. – 2026. – s. 1–12. (EGARCH modelinin asimmetrik volatilliyi daha yaxşı izah etdiyi göstərilir)

## XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMADA İKİLİ QIYMƏTLƏNDİRMƏLƏRİN DAYANIQLIQ ANALİZİ

**Həşimov Sadıq Akif oğlu, Ağayeva Xədicə İlham qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

hashimov@list.ru, agayevaxedice2001@gmail.com

**Xülasə:** İşdə, xətti proqramlaşdırma məsələsi və ona uyğun ikili məsələyə baxılır. Baxılan məsələlərinin tapılmış optimal həllin müxtəlif parametrlərinin dəyişməsi zamanı necə davranması müəyyən edilir. Bu baxımdan ikili qiymətlərin dayanıqlıq analizi tədqiq olunur.

**Açar sözlər:** xətti proqramlaşdırma, dayanıqlıq analizi, ikili məsələ.

Xətti proqramlaşdırmanın əsas tərkib hissələrindən biri olan ikilik nəzəriyyəsi yalnız riyazi baxımdan deyil, həm də iqtisadi məzmun baxımından xüsusi praktiki əhəmiyyətə malikdir. İlkin məsələyə uyğun qurulan ikili məsələ vasitəsilə resursların dəyərini qiymətləndirmək, onların istifadəsinin səmərəliliyini müəyyən etmək və daha əsaslandırılmış iqtisadi qərarlar qəbul etmək mümkündür. Ona görə də xətti proqramlaşdırmada ikilik nəzəriyyəsinin tətbiqinin öyrənilməsi həm nəzəri [1,3], həm də praktik baxımdan zəruridir [2].

Xətti proqramlaşdırma məsələlərinin tədqiqi zamanı təkcə optimal həlli tapmaq kifayət etmir. Praktiki tətbiqlərdə əsas məsələ ondan ibarətdir ki, tapılmış optimal həllin müxtəlif parametrlərinin dəyişməsi zamanı necə davranması müəyyən edilsin. Bu baxımdan ikili məsələlərin dayanıqlıq analizi adlanan anlayış xüsusi əhəmiyyət kəsb edir.

Xətti proqramlaşdırmada ikili qiymətləndirmələrin dayanıqlıq analizini tədqiq etmək üçün kanonik xətti proqramlaşdırma məsələsinə baxaq:

$$F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min. \quad (1)$$

Məhdudiyyət şərtləri:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n}. \quad (3)$$

Bu məsələyə uyğun ikili məsələ isə aşağıdakı kimidir:

$$F^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \max. \quad (4)$$

Məhdudiyyət şərtləri isə:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (5)$$

(1)-(3) ilkin xətti proqramlaşdırma məsələsinin və ona uyğun (4)-(5) ikili məsələsinin araşdırılmasına davam edək.

Fərz edək ki, (1)-(3) məsələsinin degenerasiya olunmamış (non-degenerate) dayaq planları mövcuddur və onlardan ən azı biri optimaldır. Sonra isə məqsəd funksiyasının maksimum qiymətinə baxırıq və bu qiyməti (1)-(3) məsələsində xətti tənliklər sisteminin (2) sərbəst hədlərindən (yəni  $b_1, b_2, \dots, b_m$ ) ibarət funksiya kimi nəzərdən keçirəcəyik:  $F_{\max}(b_1, b_2, \dots, b_m)$  [1].

Məlumdur ki, (4)-(5) ikili məsələsinin optimal planında dəyişənin qiyməti  $F_{\max}(b_1, b_2, \dots, b_m)$  funksiyasının həmin arqumentə görə qismən törəməsinə bərabərdir, yəni

$$\frac{\partial F_{\max}}{\partial b_i} = y_i^* \quad (6)$$

Sonuncu bərabərlik çox mühüm riyazi və iqtisadi məna daşıyır. Bu bərabərliyin mahiyyəti ondan ibarətdir ki,  $b_i$  kəmiyyətlərinin dəyişməsi  $F_{\max}(b_1, b_2, \dots, b_m)$  funksiyasının artmasına və azalmasına səbəb olur. Bu dəyişmə  $|y_i^*|$  qiyməti ilə xarakterizə olunur və yalnız o halda düzgün ola bilər ki,  $b_i$  dəyişdikdə müvafiq (4)-(5) ikili məsələsinin optimal planında  $y_i^*$  dəyi-

şənlərinin qiymətləri dəyişməz qalsın. Buna görə də əsas məqsəd ondan ibarətdir ki, (2) xətti tənliklər sisteminin sərbəst hədlərinin (yəni  $b_i$ ) hər biri üçün elə dəyişmə intervalını tapmaq lazımdır ki, bu interval daxilində ikili məsələnin (4)-(5) optimal planında  $y_i^*$  dəyişənlərinin qiymətləri dəyişməsin. Başqa sözlə, məqsəd ondan ibarətdir ki, sərbəst hədlərdə müəyyən dəyişiklik olsa belə, bu, optimal bazisin dəyişməsinə səbəb olmamalı və  $y_i$  dəyişənlərinin qiymətləri sabit qalmalıdır. Bu isə nəzəri və praktik baxımdan olduqca vacibdir, çünki real iqtisadi proseslərdə resursların həcmi, ehtiyatların miqdarı və digər parametrlər çox vaxt sabit qalmır. Bu sabitlik şərti isə  $b_i + \Delta b_i$  ilə ifadə olunan bütün qiymətlər üçün o zaman doğru olar ki, (1)-(3) məsələsinin son simpleks cədvəlində  $P_0$  vektorunun sütununda mənfi ədədlər olmasın, yəni aşağıdakı vektorun komponentləri arasında mənfi ədəd olmasın:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 + \Delta b_1 \\ \dots \\ b_n + \Delta b_n \end{pmatrix}.$$

Burada (1)-(3) məsələsinin optimal planını müəyyən edən bu matris  $B^{-1}$  – bazis vektorlarının komponentlərindən qurulmuş  $B$  matrisinin tərsidir. Verilmiş matris vasitəsilə sərbəst hədlərdə baş verən dəyişikliklərin bazis həllə necə təsir etdiyi müəyyənləşdirilir. Əgər alınan yeni bazis həllin bütün komponentləri arasında mənfi element yoxdursa, deməli əvvəlki bazis öz optimallığını və yararlılığını saxlayır.

Deməli, əgər (1)-(3) məsələsinin optimal həlli tapılıbsa, onda  $b_i$  dəyişənlərinə əsasən ikili qiymətlərin dayanıqlıq analizini aparmaq çətin deyil.

Bu isə öz növbəsində (4)-(5) ikili məsələsinin optimal planının (2) xətti tənliklər sisteminin sərbəst hədlərinin dəyişməsinə görə sabitliyini təhlil etməyə, bu dəyişikliklərin məqsəd funksiyasının maksimum qiymətinə nə qədər təsir etdiyini öyrənməyə və mümkün dəyişikliklər içərisində ən sərfəli variantı seçməyə imkan verir.

Bir sözlə, dəyişikliklərin həm optimal plana, həm də nəticəyə təsirini qiymətləndirib ən yaxşı seçimi tapırıq. Beləliklə, ikili qiymətlərin dayanıqlıq analizi həm optimal həllin etibarlılığını yoxlamaq, həm də dəyişən iqtisadi şəraitdə daha düzgün və əsaslandırılmış idarəetmə qərarları qəbul etməyə imkan verir.

#### **Ədəbiyyat**

1. İskəndərov A.D., Tağıyev R.Q., Yaqubov Q.Y. Optimallaşdırma üsulları. Çəşnoğlu 2002., -400 s.
2. İsgəndərov A.D., Tağıyev R.Q., Həşimov S.A. Optimallaşdırma üsulları məsələ və misallarla. Dərs vəsaiti. Bakı-2016. - 272 s.
3. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2004, -824 с.

## **MƏNFƏƏTİN MAKSİMUMLAŞDIRILMASI MƏSƏLƏSİNİN İQTİSADI-RİYAZİ MODELİNİN QURULMASI**

**Həşimov Sadiq Akif oğlu, Əsgərova İlkanə Ramil qızı**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*hashimov@list.ru, ilkanaskerova@gmail.com*

**Xülasə:** *İşdə optimallaşdırma metodlarının iqtisadi qərarların qəbulunda tətbiqinin nəzəri, həm də praktik baxımdan mühüm əhəmiyyəti izah olunur. Optimallaşdırma üsullarından istifadə etməklə mənfəətin maksimumlaşdırılması məsələsinin iqtisadi-riyazi model əsasında qurulması və həll yollarının əsaslandırılması təqdim olunur.*

**Açar sözlər:** *iqtisadi-riyazi model, optimallaşdırma üsulları, mənfəətin maksimumlaşdırılması.*

Müasir iqtisadi şəraitdə istehsal və sənaye müəssisələrin qarşısında duran əsas məsələlərdən biri mövcud resurslardan səmərəli istifadə edərək fəaliyyətini düzgün təşkil etməkdir. Müəssisələr arasında rəqabətin artması, xammal və enerji qiymətlərinin dəyişkənliyi, bazar tələbinin qeyri-sabitliyi iqtisadi qərarların vaxtaşırı daha dəqiq verilməsi tələbini zəruri edir. Bu baxımdan optimallaşdırma üsullarının tətbiqi ilə iqtisadi prosesin iqtisadi-riyazi modelinin iqtisadi problemlərin həllində elmi-praktiki əhəmiyyət kəsb edir. Optimallaşdırma üsullarını tətbiq etməklə müəssisələr mənfəəti artırmaq, xərcləri azaltmaq və qərar qəbul etmə prosesini daha əsaslandırılmış şəkildə aparmaq imkanına malik olurlar. Bu metodlar müəssisə idarəetməsində, mikroiqtisadi və makroiqtisadi səviyyədə planlaşdırma və proqnozlaşdırmada geniş istifadə olunur. Müasir dövrdə qərarların yalnız təcrübəyə əsasən verilməsi bəzən riskli nəticələrə səbəb olur və bu isə elmi yanaşmanın vacibliyini ön plana çıxarır. İqtisadi proseslərin mürəkkəbləşməsi iqtisadi-riyazi modellərin rolunu daha da artırmışdır. Bu səbəbdən optimallaşdırma metodlarının iqtisadi qərarların qəbulunda tətbiqi həm nəzəri [1,3], həm də praktik baxımdan mühüm əhəmiyyət kəsb edir [2].

İşdə iqtisadi məsələlərin iqtisadi-riyazi modelinin qurulmasının nəzəri əsasları, mənfəətin maksimumlaşdırılması məsələlərinin qoyuluşu araşdırılır.

Mənfəətin maksimumlaşdırılması iqtisadi qərarvermənin əsas məqsədlərindən biri hesab olunur. Müəssisə fəaliyyətində istehsalın həcmi, satış qiyməti və xərclər mənfəəti formalaşdırır. Bu məsələnin qoyuluşu üçün əvvəlcə məqsəd funksiyası dəqiq şəkildə müəyyən edilməlidir. Məqsəd funksiyası adətən ümumi gəlirlə ümumi xərclərin fərqi kimi ifadə olunur. Mənfəətin artırıl-



ması yalnız satışın çoxalması ilə məhdudlaşmır, resursların düzgün bölüşdürülməsi də vacibdir. İstehsal prosesində əmək, xammal və avadanlıq kimi resurslar məhdud olduğundan seçim etmək tələb olunur. Buna görə optimallaşdırma yanaşması müəssisəyə daha düzgün qərar verməyə kömək edir. Hər bir məhsul növü fərqli gəlir gətirdiyi üçün prioritetlərin seçilməsi zəruridir. Bu mərhələdə iqtisadi məqsəd sadə formada "ən yüksək mənfəət əldə etmək" kimi müəyyənləşdirilir. Məsələnin qoyuluşu zamanı bazar tələbi də nəzərə alınmalı və real şərtlərdən kənara çıxılmamalıdır.

Mənfəətin maksimumlaşdırılması məsələsinin riyazi qoyuluşu və xətti proqramlaşdırma modelini verək.

Bu məqsədlə fərz edək ki, müəssisənin əsas məqsədi məhdud resurslar şəraitində mənfəətin maksimumlaşdırılmasıdır.

Tutaq ki, müəssisə  $n$  adda məhsul istehsal edir,  $x_i \geq 0$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Burada  $x_i$  -  $i$ -ci məhsulun istehsal həcmi göstərir.  $p_i$  ilə  $i$ -ci məhsulun satış qiymətini,  $c_i$  ilə  $i$ -ci məhsulun vahid dəyişən xərci,  $a_{ji}$  ilə  $j$ -ci resursun  $i$ -ci məhsul istehsalı üçün sərf normasını,  $b_j$  ilə  $j$ -ci resursun mövcud ehtiyatı miqdarını işarə edək. Bu işarələmələr daxilində mənfəət (ümumi gəlir) funksiyası:

$$R = \sum_{i=1}^n p_i x_i \quad (1)$$

Ümumi dəyişən xərclər funksiyası:

$$C = \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad (2)$$

(1), (2) -dən istifadə etsək mənfəət funksiyası aşağıdakı şəkildə olar:

$$Z = R - C = \sum_{i=1}^n (p_i - c_i) x_i \quad (3)$$

(3) -də  $d_i = p_i - c_i$  işarə edək. Onda məqsəd funksiyası:

$$Z = \sum_{i=1}^n d_i x_i \rightarrow \max \quad (4)$$

(4) şəkildə olar.

Əgər müəssisədə  $m$  növ resurs varsa, onda hər resurs üçün aşağıdakı məhdudiyyət şərtləri qoyulur:

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \leq b_j, \quad j = 1, \dots, m \quad (5)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Beləliklə mənfəətin maksimumlaşdırılması məsələsi (5), (6) şərtləri daxilində aşağıdakı xətti proqramlaşdırma məsələsi şəklini alır:

$$Z = \sum_{i=1}^n d_i x_i \rightarrow \max \quad (7)$$

məhdudiyyət şərtləri:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i &\leq b_j, \quad j = 1, \dots, m, \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (8)$$

(7), (8) məsələsini kompakt formada yazmaq üçün aşağıdakı işarələmələrdən istifadə edək.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (10)$$

(9), (10) işarələmələr daxilində baxılan məsələni aşağıdakı kimi yazmaq olar.

$$Z = \langle d, x \rangle \rightarrow \max$$

şərtlərlə:

$$\begin{aligned} Ax &\leq b, \\ x &\geq 0. \end{aligned}$$

Alınan məsələ klassik xətti proqramlaşdırma məsələsidir.

Məlumdur ki, əgər baxılan məsələdə mümkün həllər çoxluğu  $X = \{x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$  boş deyilsə və  $Z$  məqsəd funksiyası  $X$  – çoxluğunda məhduddursa, onda Veyerştras teoreminə əsasən məqsəd funksiyası maksimum qiymətini bu çoxluğun ən azı bir sərhəd nöqtəsində alır. [1, səh. 77].

### **Ədəbiyyat**

1. İskəndərov A.D., Tağıyev R.Q., Yaqubov Q.Y. Optimallaşdırma üsulları. Çarşıoğlu 2002., -400 s.
2. İsgəndərov A.D., Tağıyev R.Q., Həşimov S.A. Optimallaşdırma üsulları məsələ və misallarla. Dərs vəsaiti. Bakı-2016. - 272 s.
3. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2004, -824 с.

## **MAŞIN ÖYRƏNMƏSİ ALQORİTMLƏRİNİN SƏS TANIMADA EFFEKTİVLİYİ**

**Hüseynova Yasəmən İsfəndiyar qızı, Kazımova İlahə Məmmədağa qızı,  
Cavadzadə Samirə Əlihüseyn qızı**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*y.huseynova@mail.ru, kazımova.1973@mail.ru, samirehuseynova61@gmail.com*

**Xülasə:** *Bu məqalədə maşın öyrənməsi alqoritmlərinin səs tanıma sistemlərində rolu və onların effektivliyi təhlil olunur. Səsin avtomatik tanınması texnologiyalarının əsas iş prinsipləri izah edilir və bu sahədə istifadə olunan ənənəvi modellər ilə müasir dərin öyrənmə yanaşmaları müqayisə olunur. Xüsusilə Gizli Markov Modelləri və Gaussian qarışıq modelləri ilə yanaşı, dərin neyron şəbəkələri, LSTM və Transformer əsaslı modellərin üstünlükləri araşdırılır.*

*Məqalədə həmçinin səs tanıma sistemlərinin effektivliyinin qiymətləndirilməsi üsulları, o cümlədən Word Error Rate göstəricisi nəzərdən keçirilir. Effektivliyə təsir edən əsas amillər – verilənlərin keyfiyyəti, səs-küy səviyyəsi, aksent fərqləri və hesablama resursları geniş şəkildə təhlil olunur. Bununla yanaşı, mövcud problemlər və gələcək inkişaf istiqamətləri də müzakirə edilir. Aparılan təhlil göstərir ki, dərin öyrənmə metodları səs tanıma sistemlərinin dəqiqliyini və etibarlılığını əhəmiyyətli dərəcədə artırmışdır və bu sahədə gələcək tədqiqatlar daha yüksək performanslı modellərin yaradılmasına yönələcəkdir.*

**Açar sözlər:** *maşın öyrənməsi, neyron şəbəkələri, akustik modeləşdirmə, LSTM, Transformer, Word Error Rate, süni intellekt*

Səsin avtomatik tanınması (Automatic Speech Recognition – ASR) texnologiyası müasir hesablama sistemlərinin və süni intellekt arxitekturasının fundamental komponentlərindən birinə transformasiya olunmuşdur. Sözügedən texnologiya, insan nitqinin akustik və linqvistik xüsusiyyətlərinin kompüter alqoritmləri vasitəsilə təhlil edilərək, yüksək dəqiqliklə rəqəmsal mətn formatına transformasiyasını təmin edir. Bu proses, insan–kompüter interfeyslərinin optimallaşdırılması ilə yanaşı, kommunikasiya proseslərinin daha təbii və intuitiv şəkildə həyata keçirilməsinə şərait yaradır.

Müasir dövrdə ASR sistemləri mobil tətbiqlərdən tutmuş ağıllı assistentlərə, avtomatlaşdırılmış müştəri xidmətləri platformalarına və biometrik identifikasiya əsaslı təhlükəsizlik sistemlərinə qədər geniş bir spektrdə tətbiq olunaraq, rəqəmsal transformasiya prosesinin hərəkətverici qüvvələrindən birinə çevrilmişdir.

Səs tanıma sahəsində əsas irəliləyişlər maşın öyrənməsi alqoritmlərinin inkişafı ilə bağlıdır. Xüsusilə dərin öyrənmə metodlarının tətbiqi nəticəsində sistemlərin dəqiqliyi və etibarlılığı əhəmiyyətli dərəcədə artmışdır [1].

**Səs Tanıma Sistemlərinin Quruluşu** .Tipik səs tanıma sistemi bir neçə əsas mərhələdən ibarətdir. İlk mərhələdə səs signalı qəbul olunur və rəqəmsal formaya çevrilir. Bu zaman səs-küyün azaldılması və signalın normallaşdırılması kimi proseslər həyata keçirilir.

Növbəti mərhələdə signalın xüsusiyyətləri çıxarılır. Bu məqsədlə geniş istifadə olunan üsullardan biri MFCC (Mel-Frequency Cepstral Coefficients) metodudur. Bu yanaşma insan eşitmə sisteminin xüsusiyyətlərini nəzərə alaraq signalın daha effektiv təsvirini yaradır [5].

Son mərhələdə isə akustik model və dil modeli vasitəsilə səs signalı sözlərə və cümlələrə çevrilir. Bu mərhələdə istifadə olunan alqoritmlər sistemin ümumi performansını müəyyən edir.

**Ənənəvi alqoritmlər və onların xüsusiyyətləri**-Səs tanımanın ilkin mərhələlərində əsasən statistik modellərdən istifadə edilmişdir. Gizli Markov Modelləri (HMM) zaman ardıcılığını modelləşdirmək üçün effektiv üsul kimi qəbul olunmuşdur. Bu modellər çox vaxt Gaussian Mixture Models (GMM) ilə birlikdə tətbiq olunmuşdur. Bu yanaşmaların əsas üstünlüyü sadəlik və stabil-lik olsa da, mürəkkəb nitq nümunələrini modelləşdirməkdə müəyyən məhdudiyyətlər mövcuddur. Xüsusilə dəyişkən mühitlərdə və fərqli aksentlərdə onların dəqiqliyi aşağı düşür[3].

**Dərin öyrənmə yanaşmaları** -Dərin öyrənmə metodlarının tətbiqi səs tanıma sahəsində yeni imkanlar açmışdır. Dərin neyron şəbəkələri çoxqatlı strukturlar vasitəsilə mürəkkəb verilənlərdən xüsusiyyətləri avtomatik öyrənmə bilir və bu da tanıma dəqiqliyini artırır [1].

RNN və LSTM kimi modellər zaman ardıcılığını nəzərə alaraq nitqin kontekstini daha düzgün analiz edir. Bu xüsusilə uzun və mürəkkəb cümlələrin tanınmasında mühüm rol oynayır [2]. Bundan əlavə, Transformer əsaslı modellər "attention" mexanizmi vasitəsilə paralel emal imkanları təqdim edir və həm sürət, həm də dəqiqlik baxımından üstün nəticələr verir [4].

## **Nəticə**

Maşın öyrənməsi alqoritmləri səs tanıma sistemlərinin inkişafında əsas rol oynayır. Ənənəvi modellər bu sahənin əsasını qoymuş, dərin öyrənmə metodları isə onun inkişafını sürətləndirmişdir. Müasir texnologiyalar sayəsində səs tanıma sistemləri daha dəqiq və effektiv olmuşdur. Gələcəkdə bu sahədə daha innovativ yanaşmaların tətbiqi ilə sistemlərin performansının daha da artacağı gözlənilir.

### Ədəbiyyat

1. Hinton, G., Deng, L., Yu, D., Dahl, G. E., Mohamed, A.-R., Jaitly, N., Senior, A., Vanhoucke, V., Nguyen, P., Sainath, T. N., & Kingsbury, B. (2012). Deep neural networks for acoustic modeling in speech recognition: The shared views of four research groups. *IEEE Signal Processing Magazine*, 29(6), 82–97.  
<https://doi.org/10.1109/MSP.2012.2205597>
2. Graves, A., Mohamed, A.-R., & Hinton, G. (2013). Speech recognition with deep recurrent neural networks. *2013 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 6645–6649.  
<https://doi.org/10.1109/ICASSP.2013.6638947>
3. Rabiner, L. R. (1989). A tutorial on hidden Markov models and selected applications in speech recognition. *Proceedings of the IEEE*, 77(2), 257–286.  
<https://doi.org/10.1109/5.18626>
4. Vaswani, A., Shazeer, N., Parmar, N., Uszkoreit, J., Jones, L., Gomez, A. N., Kaiser, Ł., & Polosukhin, I. (2017). Attention is all you need. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 30.  
<https://proceedings.neurips.cc/paper/2017/hash/3f5ee243547dee91fbd053c1c4a845aa-Abstract.html>
5. Jurafsky, D., & Martin, J. H. (2020). *Speech and language processing: An introduction to natural language processing, computational linguistics, and speech recognition* (3rd ed. draft). Pearson.

## SƏS SİQNALLARININ TANINMASINDA ƏLAMƏT SEÇİMİ METODLARININ EFFEKTİVLİYİNİN TƏDQIQI

**Hüseynova Yasəmən İsfəndiyar qızı, Məmmədli Aysun Elmar qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi),

(NDU, Fizika riyaziyyat fakültəsi)

[y.huseynova@mail.ru](mailto:y.huseynova@mail.ru), [memiyevaaysun616@gmail.com](mailto:memiyevaaysun616@gmail.com)

**Xülasə:** Səs siqnallarının avtomatik tanınması sistemlərinin effektivliyi birbaşa olaraq istifadə olunan xüsusiyyətlər toplusundan asılıdır. Xüsusiyyətlərin seçilməsi mərhələsi həm hesablama səmərəliliyinə, həm də tanınma dəqiqliyinə ciddi təsir göstərir. Təqdim olunan məqalədə səs siqnallarının emalı zamanı təbiiq edilən əlamət seçimi metodları sistemli şəkildə təhlil olunur, onların nəzəri əsasları araşdırılır və effektivlik baxımından müqayisəsi aparılır [1].

**Açar sözlər:** səs siqnalı, əlamət seçimi, nitqin tanınması, xüsusiyyət çıxarılması, maşın öyrənməsi.

Səs siqnallarının tanınması müasir informasiya sistemlərində mühüm yer tutan tədqiqat istiqamətlərindən biridir. Bu texnologiya insan-kompüter qarşılıqlı əlaqəsinin optimallaşdırılması və intellektual sistemlərin yaradılması baxımından geniş tətbiq sahəsinə malikdir [2].

Nitqin tanınması sistemlərinin strukturunda əsas mərhələlərdən biri xüsusiyyətlərin çıxarılması və seçilməsidir. Bu mərhələdə məqsəd xam siqnalın daha informativ və kompakt təsvirini əldə etməkdir [1].

### **Səs siqnallarının xüsusiyyətləri və emalı**

Səs siqnalı qeyri-stasionar və zamanla dəyişən xarakterə malikdir [3]. Bu siqnallar müxtəlif tezlik komponentlərinin kombinasiyası kimi formalaşır və insan danışığının akustik xüsusiyyətlərini əks etdirir.

Siqnalın ilkin emalı mərhələsində diskretləşdirmə, səs-küyün azaldılması və normallaşdırma kimi prosedurlar həyata keçirilir. Bu mərhələdən sonra xüsusiyyət çıxarılması prosesi başlayır[1].

### **Əlamət çıxarılması metodları**

Nitq siqnallarının təhlili zamanı geniş istifadə olunan xüsusiyyət çıxarma metodları aşağıdakılardır:

- **MFCC** – insan eşitmə sisteminə uyğun tezlik analizi təqdim edir [1].
- **LPC** – siqnalın statistik modelini qurmağa imkan verir [3].
- **PLP** – psixoakustik xüsusiyyətləri nəzərə alır [3].
- **Spektral üsullar** – dərin öyrənmə modellərində geniş istifadə olunur [4].

Bu metodlar müxtəlif səviyyədə informativlik təqdim edir və seçimi tətbiq sahəsindən asılıdır.

### **Əlamət seçimi probleminin qoyuluşu**

Əlamət seçimi çoxölçülü verilənlər məkanında optimal alt çoxluğun müəyyən edilməsi kimi ifadə olunur. Bu problem aşağıdakı səbəblərlə bağlıdır:

- artıq xüsusiyyətlərin mövcudluğu
- informasiya təkrarı
- modelin overfitting riski

Bu səbəbdən əlamət seçimi modelin ümumiləşdirmə qabiliyyətini artırmaq üçün vacibdir [5].

### **Əlamət seçimi metodlarının təsnifatı, Filter metodları**

Statistik kriteriyalar əsasında seçim aparılır və modeldən asılı deyil [5].

### **Wrapper metodları**

Model performansına əsaslanaraq optimal xüsusiyyətlər seçilir [5].

### **Embedded metodlar**

Model daxilində həyata keçirilir (məsələn, L1-regularizasiya) [4].

### **Effektivliyin qiymətləndirilməsi**

Əlamət seçimi metodlarının effektivliyi tanınma dəqiqliyi, hesablama mürəkkəbliyi və modelin sabitliyi kimi meyarlarla ölçülür. Müxtəlif yanaşmalar fərqli şəraitlərdə müxtəlif nəticələr verir[4].

### **Müasir yanaşmalar**

Dərin öyrənmə metodları xüsusiyyətlərin avtomatik öyrənilməsinə imkan yaradır və bu da ənənəvi əlamət seçimi mərhələsini qismən sadələşdirir [4].

### **Nəticə**

Aparılan təhlil göstərir ki, səs siqnallarının tanınmasında əlamət seçimi metodları sistemin ümumi performansına əhəmiyyətli təsir göstərir. Optimal nəticə əldə etmək üçün metod seçimi tətbiq sahəsinə uyğun şəkildə aparılmalıdır.

### **Ədəbiyyat**

1. Rabiner, L. R., & Juang, B. H. (1993). *Fundamentals of speech recognition*. Prentice Hall.
2. Jurafsky, D., & Martin, J. H. (2009). *Speech and language processing: An introduction to natural language processing, computational linguistics, and speech recognition* (2nd ed.). Pearson.
3. O'Shaughnessy, D. (2000). *Speech communications: Human and machine* (2nd ed.). IEEE Press.
4. Bishop, C. M. (2006). *Pattern recognition and machine learning*. Springer.
5. Guyon, I., & Elisseeff, A. (2003). An introduction to variable and feature selection. *Journal of Machine Learning Research*, 3, 1157–1182.

### **RƏQƏMSAL SÜRƏT:**

### **HESABLAMA METODLARINDAN ALQORİTMİK DÜŞÜNCƏYƏ**

**Hüseynova Yasəmən İsfəndiyar qızı, Məmmədova Könül Nizami qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi),

(NDU, Fizika riyaziyyat fakültəsi)

y.huseynova@mail.ru, konulmammadova@ndu.edu.az

**Xülasə:** Müasir texnoloji inkişaf təkə cihazların gücü ilə deyil, mürəkkəbliyi idarə edən riyazi səmərəliliklə ölçülür. Məlumat həcmi artdıqca, düzgün alqoritm bir tapşırığı "qeyri-mümkün"dən "mümkün"ə çevirən əsas amildir.

Bu prosesin mərkəzində dayanan alqoritmik düşüncə dörd sütun üzərində qurulur: problemi hissələrə bölən parçalanma, oxşarlıqları tapan nümunə tanıma, mahiyyəti üzə çıxaran abstraksiya və resurslara qənaət edən optimallaşdırma.

*Mühəndislik innovasiyalarında isə Nyuton-Rafson kimi ədədi metodlar əvəzolunmazdır. Onun kvadratik yaxınlaşma gücü hər addımda dəqiqliyi ikiqat artıraraq, ən mürəkkəb tənliklərin saniyələr içində həllinə imkan verir.*

*Sürətli hesablama və alqoritmik məntiqin sinerjisi xaosu nizama salaraq, rəqəmsal transformasiyanın əsas rəqəbat üstünlüyünü təşkil edir.*

**Açar sözlər:** *Alqoritmik düşüncə, hesablama səmərəliliyi, ədədi metodlar, Nyuton-Rafson metodu, optimallaşdırma, rəqəmsal transformasiya.*

## **İnnovasiyada ədədi metodların rolu**

Bir çox texniki və mühəndislik sahələrində "mükəmməl" analitik həllər tapmaq çox vaxt mümkün olmur. Məhz burada sürətli ədədi metodlar əvəzolunmaz hala gəlir. Təkrarlanan yaxınlaşmalardan istifadə etməklə kompüterlər insanların əsrlər boyu hesablaya biləcəyi mürəkkəb problemləri həll edə bilər [1].

Məsələn, mühəndislikdə mürəkkəb funksiyaların köklərini tapmaq çox vaxt Nyuton-Rafson iterasiyası kimi metodlardan asılıdır :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Bu spesifik metod kvadratik konvergenziyasına görə qiymətləndirilir — yəni hər addımda düzgün rəqəmlərin sayı təxminən ikiqat artır və bu da onu əsl mənada "sürətli" bir metod halına gətirir[6].

Rəqəmsal alqoritmlərin innovativ həllərə necə çevrildiyini görmək istəyirsinizsə, gəlin Nyuton-Rafson metodunu real mühəndislik tapşırığı olan boru kəmərlərində maye axınının hesablanması üzərində sınaqdan keçirək.

Mühəndislikdə boru kəmərlərindəki təzyiq itkisini hesablamaq üçün sürtünmə əmsalını tapmaq lazımdır. Bunun üçün istifadə olunan Kolbruk-Uayt tənliyi isə kifayət qədər mürəkkəbdir. Bu tənlik transsendent struktura malikdir, yəni axtardığımız məchul bərabərliyin hər iki tərəfində iştirak edir. Bu səbəbdən onu adi cəbri üsullarla tək buraxıb həll etmək imkansızdır. Sürtünmə əmsalını  $f$  tapmalıyıq. Kökünü tapmaq istədiyimiz sadələşdirilmiş funksiya belə görünür:

$$F(f) = \frac{1}{\sqrt{f}} + 2 \log_{10} \left( \frac{\epsilon/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re\sqrt{f}} \right) = 0$$

Sözügədən tənliyin analitik həllinin mürəkkəbliyi onun kağız və kalkulyator vasitəsilə əglabatan müddətdə hesablanmasını qeyri-mümkün edir. Bu səbəbdən mühəndislər ədədi üsullara müraciət edərək, problemi alqoritmik ardıcılığa çevirir və iterativ həll strategiyalarını tətbiq edirlər[3].

Nyuton-Rafson (toxunanlar) yanaşması müasir hesablama texnikasının ən güclü və zərif alətlərindən biridir. Bu metodun işləmə prinsipini daha dərin-



dən başa düşmək üçün onu üç əsas mərhələ üzrə genişləndirək:

### **1. İlk Təxmin $x_0$ : Hesablama üçün "Start" nöqtəsi**

Kompüter sıfırdan başlaya bilməz; ona hədəfə yaxın bir nöqtə lazımdır. Mühəndislikdə bu təxmin kor-koranə deyil, fiziki reallığa əsasən seçilir.

- **Fiziki Məntiq:** Məsələn, bir boruda sürtünmə əmsalını hesablayarkən, biz bilirik ki, bu rəqəm adətən 0.008 ilə 0.08 arasında olur. 0.02 kimi bir rəqəmlə başlamaq, alqoritmin yanlış istiqamətə getməsinin qarşısını alır.

- **Həssaslıq:** Əgər ilkin təxmin kökdən (həqiqi cavabdan) çox uzaq olarsa, alqoritm bəzən "uzaqlaşa" (divergence) bilər. Buna görə də, mühəndislik təcrübəsi burada "ağıllı başlanğıc" rolunu oynayır. [3].

### **2. Toxunanın Atılışı : Həndəsi Məntiq**

Bu mərhələ alqoritmin "görmə" qabiliyyətidir. Kompüter funksiyanın həmin nöqtədəki qiymətini  $f(x_n)$  və meylini (törəməsini)  $f'(x_n)$  və hesablayır.

- **Toxunan Xətt:** Funksiyanın ayrısına həmin nöqtədə bir toxunan xətt çəkilir. Bu xətt funksiyanın yerli davranışını xətti şəkildə təmsil edir.

- **Meyl:** Törəmə bizə funksiyanın nə qədər sürətlə artdığını və ya azaldığını deyir. Əgər meyl dikdirsə, deməli kök çox yaxındadır; əgər meyl mailidirsə, kök daha uzaqda ola bilər.

### **• 3. Düzəliş: Riyazi Sıçrayış**

- Burada artıq məşhur düstur işə düşür:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

**Atəş açmaq:** Bu düstur toxunan xəttin  $x$  oxunu kəsdiyi nöqtəni tapır. Həmin nöqtə  $x_{n+1}$  bizim yeni, daha dəqiq təxminimiz olur.

**İterasiya Dövrü:** Kompüter bu addımı təkrar-təkrar icra edir. Hər addımda kökə daha da yaxınlaşır.

- **Kvadratik Yaxınlaşma:** Nyuton metodunun ən böyük üstünlüyü budur ki, kökə yaxınlaşdıqca dəqiqlik eksponent olaraq artır. Məsələn, əgər birinci addımda 2 rəqəm dəqiqdirsə, ikinci addımda 4, üçüncüdə isə artıq 8 rəqəm dəqiqliyi əldə edilir [4], [5].

### **Mühəndislikdə Əhəmiyyəti: "Stop" Kriteriyası**

Alqoritm sonsuza qədər davam etmir. Mühəndis proqramda bir **"tolerantlıq"** ( $\varepsilon$ ) təyin edir (məsələn,  $10^{-6}$ ). İki ardıcıl təxmin arasındakı fərq bu rəqəmdən kiçik olduqda, kompüter "cavab kifayət qədər dəqiqdir" deyib dövrü dayandırır [2].

### **Nəticə**

Rəqəmsal dünya getdikcə çətinləşən problemləri azalan vaxtla həll edə biləcəyimiz fərziyyəsi üzərində qurulub. Alqoritmik düşüncəyə yiyələnməklə xaosu məntiqə çevirmək bacarığı qazanırıq. Sürətli hesablama metodlarına

üstünlük verməklə, bu məntiqin qlobal, qarşılıqlı əlaqəli cəmiyyətin tələblərinə uyğunlaşa biləcəyini təmin edirik. Birlikdə, bunlar 21-ci əsrdə ən böyük rəqabət üstünlüyünü təmsil edir.

### **Ədəbiyyat**

1. Aho, A. V., Hopcroft, J. E., & Ullman, J. D. (1974). *The design and analysis of computer algorithms*. Addison-Wesley.
2. Burden, R. L., Faires, J. D., & Burden, A. M. (2015). *Numerical analysis* (10th ed.). Cengage Learning.
3. Chapra, S. C., & Canale, R. P. (2020). *Numerical methods for engineers* (8th ed.). McGraw-Hill Education.
4. Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., & Stein, C. (2022). *Introduction to algorithms* (4th ed.). MIT Press.
5. Gutttag, J. V. (2021). *Introduction to computation and programming using Python: With application to computational modeling and understanding data* (3rd ed.). MIT Press.
6. Higham, N. J. (2002). *Accuracy and stability of numerical algorithms* (2nd ed.). Society for Industrial and Applied Mathematics.

## **SWIFT PROQRAMLAŞDIRMA DİLİ ƏSASINDA iOS TƏTBİQLƏRİNİN TƏHLÜKƏSİZ VƏ EFFEKTİV HAZIRLANMASI**

**Hüseynova Yasəmən İsfəndiyar qızı, Rəsulov Nurlan Bəxtiyar oğlu**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika),*

*(ADNSU, İnformasiya texnologiyaları və idarəetmə fakültəsi)*

*y.huseynova@mail.ru, rasulovnurlan6@gmail.com*

**Xülasə:** *SWIFT* proqramlaşdırma dili *iOS* ekosisteminə tətbiqetmələrin hazırlanması üçün əsas müasir texnologiyalardan biridir. Bu dil yüksək performans, təhlükəsizlik və sadə sintaksis xüsusiyyətləri ilə mobil proqramlaşdırmada geniş istifadə olunur. *SWIFT*-in *iOS* inkişafında rolu tətbiqlərin daha stabil, sürətli və təhlükəsiz şəkildə yaradılmasına imkan verir. Müasir mobil proqramlaşdırma mühitində *SWIFT* həm Apple ekosisteminin inkişafını sürətləndirir, həm də proqramçıların daha effektiv həllər hazırlamasına şərait yaradır. Məqalədə *SWIFT* proqramlaşdırma dilinin *iOS* ekosisteminə tətbiqi və onun inkişaf perspektivləri təhlil edilmişdir.

**Açar sözlər:** *SWIFT, iOS, mobil proqramlaşdırma, tətbiqetmə, proqramlaşdırma dili, Apple ekosistemi.*

Müasir dövrdə mobil texnologiyaların sürətli inkişafı proqram təminatının hazırlanması sahəsində yeni yanaşmaların yaranmasına səbəb olmuşdur. Xüsusilə *iOS* platforması üzərində tətbiqlərin hazırlanması yüksək təhlükəsizlik, stabil işləmə və performans tələbləri ilə seçilir. Bu platformada əsas proq-

ramlaşdırma dili kimi Swift istifadə olunur.

SWIFT proqramlaşdırma dili Apple tərəfindən hazırlanaraq iOS ekosisteminə tətbiqlərin daha sadə, təhlükəsiz və effektiv şəkildə yaradılmasına imkan vermişdir. Dilin müasir xüsusiyyətləri proqramçıların işini asanlaşdırmaqla yanaşı, mobil tətbiqlərin keyfiyyətini də artırır.

Bu tezisdə Swift proqramlaşdırma dilinin iOS tətbiqlərinin təhlükəsiz və effektiv hazırlanmasında rolu, onun texniki xüsusiyyətləri və inkişaf istiqamətləri araşdırılır.

### **SWIFT proqramlaşdırma dilinin yaranması və inkişafı**

SWIFT proqramlaşdırma dili Apple şirkəti tərəfindən 2014-cü ildə iOS, macOS və digər Apple platformaları üçün müasir proqramlaşdırma dili kimi təqdim edilmişdir. SWIFT, uzun illər iOS inkişafında istifadə edilən Objective-C dilinin yerini qismən və ya tam şəkildə əvəz etmək məqsədilə yaradılmışdır.

Dil yaradılarkən əsas məqsəd aşağıdakı problemlərin həlli olmuşdur:

- mürəkkəb sintaksisin sadələşdirilməsi
- yaddaş idarəetməsində təhlükəsizlik
- yüksək performans təmin edilməsi
- proqramçı məhsuldarlığının artırılması

SWIFT açıq mənbə (open-source) dil kimi inkişaf etdirildikdən sonra Linux və digər platformalara da uyğunlaşdırılmışdır ki, bu da onun istifadəsini genişləndirmişdir [1].

### **SWIFT dilinin əsas xüsusiyyətləri**

SWIFT müasir proqramlaşdırma dilləri arasında təhlükəsizlik və performans balansı ilə seçilir.

Swift dili müasir proqramlaşdırma dilləri arasında aşağıdakı xüsusiyyətləri ilə fərqlənir:

- Sadə və oxunaqlı sintaksis
- Güclü tip sistemi (type safety)
- Avtomatik yaddaş idarəetməsi (ARC)
- Yüksək performans
- Səhvlərin kompilyasiya mərhələsində aşkarlanması

Swift dilinin əsas xüsusiyyətləri:

| Xüsusiyyət  | İzahı                                 |
|-------------|---------------------------------------|
| Type Safety | Səhv tip istifadəsinin qarşısını alır |
| ARC         | Yaddaşı avtomatik idarə edir          |
| Syntax      | Sadə və başa düşülən                  |
| Performance | Yüksək icra sürəti                    |

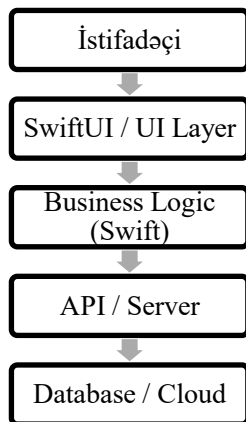
**Cədvəl 1.** SWIFT dilinin əsas xüsusiyyətləri

Bu xüsusiyyətlər tətbiqlərin daha stabil və təhlükəsiz işləməsini təmin edir [2]. Gəlin indi SWİFT və Objective-C müqayisəsinə baxaq

| Xüsusiyyət         | Swift            | Objective-C   |
|--------------------|------------------|---------------|
| Sintaksis          | Sadə və oxunaqlı | Mürəkkəb      |
| Təhlükəsizlik      | Yüksək           | Orta          |
| Performans         | Yüksək           | Orta          |
| Yaddaş idarəetməsi | Avtomatik (ARC)  | Qismən manual |
| Öyrənmə çətinliyi  | Asan             | Çətin         |

**Cədvəl 2.** SWİFT və Objective-C müqayisəsi

### iOS tətbiq arxitekturasında Swift-in yeri



**Sxem 1.** iOS tətbiq arxitekturasında Swift-in yeri

### SWİFT proqramlaşdırma dilində təhlükəsizlik mexanizmləri

SWİFT proqramlaşdırma dili iOS tətbiqlərinin təhlükəsizliyinin artırılmasında mühüm rol oynayır. Dilin dizaynında əsas məqsədlərdən biri proqram təminatında yaranan xətalara və təhlükəsizlik risklərinin minimuma endirilməsidir.

SWİFT-də istifadə olunan optional tip sistemi null (boş dəyər) xətalara qarşısını alır və proqramın daha stabil işləməsini təmin edir. Bundan əlavə, güclü tip yoxlaması (type safety) sayəsində yanlış tip istifadəsi kompilyasiya mərhələsində aşkarlanır və icra zamanı baş verə biləcək kritik xətalara qarşısı alınır [3].

SWİFT həmçinin Automatic Reference Counting (ARC) mexanizmi ilə yaddaşa avtomatik idarə olunmasını təmin edir. Bu yanaşma yaddaş sızmalarını (memory leaks) azaldır və tətbiqin performansını artırır. Kompilyator səviyyəsində səhvlərin əvvəlcədən aşkarlanması isə proqram təminatının daha etibarlı olmasına şərait yaradır [4].

### **Swift dilinin effektivlik və performans üstünlükləri**

SWIFT yüksək performanslı LLVM compiler üzərində qurulduğu üçün mobil tətbiqlərdə sürətli icra və optimallaşdırılmış kod generasiyası təmin edir. Bu xüsusiyyət iOS tətbiqlərinin daha az resursla daha yüksək məhsuldarlıq göstərməsinə imkan yaradır.

Swift-də multithreading və paralel işləmə imkanları tətbiqlərin eyni zamanda bir neçə əməliyyatı yerinə yetirməsinə şərait yaradır. Bu isə xüsusilə real vaxt məlumat emalı tələb edən tətbiqlərdə mühüm üstünlükdür.

Ümumilikdə Swift-in performans üstünlükləri onu mobil proqramlaşdırma üçün ən effektiv dillərdən birinə çevirir və iOS ekosisteminə geniş istifadə olunmasını təmin edir [5].

### **Swift dilinin inkişaf istiqamətləri və müasir tendensiyalar**

Son illərdə Swift dilinin inkişafı daha çox açıq mənbə ekosisteminin genişlənməsi və cross-platform imkanlarının artırılması istiqamətində yönəlmişdir. Swift artıq yalnız iOS deyil, həm də server tərəfli proqramlaşdırma və digər platformalarda istifadə olunmağa başlanmışdır.

SwiftUI framework-ünün inkişafı ilə birlikdə istifadəçi interfeyslərinin yaradılması daha sadə və deklarativ bir formaya keçmişdir. Bu isə proqramçıların daha az kodla daha funksional tətbiqlər hazırlamasına imkan verir.

Bundan əlavə, Swift-in süni intellekt və maşın öyrənməsi sahələrinə inteqrasiyası da gələcək inkişaf istiqamətlərindən biri hesab olunur. Bu, mobil tətbiqlərin daha ağıllı və adaptiv olmasına şərait yaradır [5].

Swift proqramlaşdırma dili iOS platformasında tətbiqlərin təhlükəsiz, sürətli və effektiv şəkildə hazırlanmasında əsas rol oynayır. Dilin sadə sintaksisi, güclü tip sistemi və yaddaş təhlükəsizliyi mexanizmləri onu müasir mobil proqramlaşdırmanın ən vacib texnologiyalarından birinə çevirir.

Swift həmçinin performans baxımından yüksək göstəricilərə malik olmaqla yanaşı, inkişaf edən ekosistemi ilə proqram təminatının gələcək tendensiyalarına uyğunlaşa bilər. Buna görə də Swift iOS tətbiqlərinin hazırlanmasında strateji əhəmiyyət daşıyan proqramlaşdırma dili hesab olunur.

### **Ədəbiyyat**

1. Apple Inc. (2024). *The Swift programming language (Swift 5.9)*. Apple Developer Documentation. <https://docs.swift.org/swift-book/>
2. Apple Inc. (2023). *iOS security guide*. Apple Support. <https://support.apple.com/guide/security>
3. Swift.org. (2022–2024). *Swift evolution: Official documentation and updates*. <https://www.swift.org>
4. Kodeco. (2023–2025). *iOS & Swift development tutorials*. <https://www.kodeco.com>
5. IEEE Xplore Digital Library. (2022–2025). *Recent trends in Swift performance and mobile application development*.

## **REKURSİV FUNKSIYALARIN İŞLƏMƏ PRİNSİPİNİN MÜQAYİSƏLİ TƏHLİLİ**

**İbrahimova Kəmalə İbrahim qızı**

*(NMI, Təbiət və İncəsənət fakültəsi)*

*kamalaibraquimova100@mail.ru*

**Xülasə.** *Rekursiya həm riyaziyyat, həm də kompüter elmlərinin qovşağında yerləşən yalnız nəzəri konsepsiya olmayıb, həm də gündəlik proqramlaşdırmanın əsas alətlərindən biri hesab olunur. Rekursiv funksiyalar proqramlaşdırmanın ən maraqlı və güclü konseptlərindən biri olmaqla onun tədqiqi nəzəriyyədən başlayıb, yaddaşın idarə olunmasına və real tətbiqlərə qədər uzun bir yolu əhatə edir. Praktikada rekursiya çox vaxt iterativ üsullarla müqayisə olunur. Kiçik məsələlərdə rekursiya daha "təmiz", böyük məsələlərdə isə optimallaşdırılmış iterativ üsullarla verilir. Tədqiqat məhz, bu problemlərin qoyuluşu və həlli yollarını özündə birləşdirir.*

**Açar sözlər:** *rekursiya, rekursiv funksiyalar, iterativ üsullar, hesablama səmərəliliyi, memorization prosesi.*

Proqram təminatının hazırlanmasında həll metodunun seçilməsi problemin topoloji strukturu və hesablama resurslarının optimal idarə olunması prinsiplərinə əsaslanır. Rekursiya riyazi cəhətdən səmərəli həll yolu təklif etsə də, onun tətbiqi hər zaman hesablama səmərəliliyi baxımından özünü doğrultmur. Çünki araşdırılan problemin həlli metodu onun daxili strukturuna adekvat olmalıdır. Özünü təkrarlayan alt-strukturlardan təşkil olunmuş iyerarxik məlumat modelləri — məsələn, ağac strukturları, qraflar və ya fraktal həndəsə elementləri üçün rekursiya ən rəşional yanaşmadır. Fayl sistemlərində bir-birinə daxil olan qovluqlar üzərində rekursiv gəzinti buna bariz nümunədir; burada hər bir alt-struktur kök strukturun xüsusiyyətlərini daşdığı üçün, rekursiya kodu daha oxunaqlı və idarə olunan edir. Massivlər üzərində sadə əməliyyatların aparılması zamanı isə xətti məlumat strukturları üçün iterativ yanaşmaya üstünlük verilir, bunun da, fundamental səbəbləri mövcuddur:

- Yaddaşın yüklənməsi (Overhead): Hər bir rekursiv çağırış sistemin çağırış yığını yaddaşında (Call Stack) yeni bir aktivasiya çərçivəsi (stack frame) yaradır. Bu,  $O(n)$  qədər əlavə yaddaş sərfi deməkdir və dərin rekursiya ("deep recursion") zamanı yaddaşın yüklənməsi riskini kritik həddə çatdırır;

- Prosessual resurs sərfi: Funksiya çağırışları zamanı registrlərin saxlanması və bərpası (context switching) CPU səviyyəsində əlavə hesablama yükü yaradır. İterativ həllər isə sabit yaddaş mürəkkəbliyi ( $O(1)$ ) ilə işləyərək sistemin deterministik davranışını təmin edir;

- Sistem dayanıqlılığı (Robustness): Kritik sistemlərdə proqramın proqnozlaşdırıla bilən (deterministic) olması vacib şərtidir. İterativ metodlar yan təsirlərdən daha az asılı olur və müasir kompilyatorlar tərəfindən daha effektiv optimallaşdırılır. Rekursiya yalnız o halda tətbiq olunmalıdır ki, alqoritmin mürəkkəbliyini azaltmaq və kodun auditi (maintainability) üçün rekursiyanın gətirdiyi üstünlüklər, yaddaş sərfi ilə bağlı yaranan riskləri kompensasiya edə bilsin.

Rekursiya — funksiyanın öz-özünü çağırması prosesi olduğundan, riyazi və məntiqi baxımdan o, böyük bir problemi eyni tipli daha kiçik alt-problemlərə bölərək həll etmək üsulu kimi hazırlanmışdır. Hər bir düzgün yazılmış rekursiv funksiya iki əsas hissədən ibarət olmalıdır [1]:

1. Baza halı (Base Case): Funksiyanın özünü çağırmasını dayandıran şərt. Bu hissə olmasa, funksiya sonsuz dövrə girər və yaddaşın dolmasına (Stack Overflow) səbəb olar.

2. Rekursiv addım (Recursive Step): Funksiyanın problemi kiçildərək özünü yenidən çağırdığı hissədir.

Faktorialın hesablanması nümunəsinə baxaq. Riyaziyyatda  $n!$  ( $n$  faktorial) aşağıdakı kimi təyin olunur:

- $0! = 1$  (Baza halı)
- $n! = n * (n-1)!$  (Rekursiv addım)

Rekursiyanın işləmə prosesi belədir (Stack Yaddaşı): Rekursiyanı başa düşmək üçün *Stack (Yığın)* məlumat strukturunu bilmək vacibdir. Hər dəfə funksiya çağırılanda, sistem yaddaşda (Call Stack) yeni bir "çərçivə" (frame) yaradır.  $\text{factorial}(3)$  çağırıldıqda baş verənlər:

1.  $\text{factorial}(3)$  çağırılır - gözləyir...
2.  $\text{factorial}(2)$  çağırılır - gözləyir...
3.  $\text{factorial}(1)$  çağırılır - gözləyir...
4.  $\text{factorial}(0)$  çağırılır - *1 qaytarır (Baza halı)*.
5. Yaddaş geriye doğru açılır:  $1 * 1 \rightarrow 1 * 2 \rightarrow 2 * 3 = 6$ .

Hər bir rekursiv çağırışın dövrlər (for, while) vasitəsilə də həlli mümkündür [2].

| Xüsusiyyət        | Rekursiya                                                        | İterasiya (Dövr)             |
|-------------------|------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| Kodun uzunluğu    | Daha qısa və oxunaqlı                                            | Daha uzun ola bilər          |
| Yaddaş istifadəsi | Çox (hər çağırış yığını-yaddaşda yaradılan blok əlavə yer tutur) | Az (Yalnız dəyişənlər tutur) |
| Sürət             | Daha yavaş (çağırış yükü)                                        | Daha sürətli                 |
| Bitmə şərti       | Baza halı ilə                                                    | Dövr şərti ilə               |

Ən məşhur rekursiv problemlərə nümunə olaraq aşağıdakıları göstərə bilərik:

A) *Fibonacci ardıcılığı*. Fibonacci ədədlərində hər bir ədəd özündən əvvəlki iki ədədin cəmidir:  $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$ . Rekursiya burada ağacvari bir struktur yaradır.

B) *Hanoy qüllələri (Towers of Hanoi)*. Bu problem rekursiyanın gücünü nümayiş etdirən ən yaxşı nümunədir. 3 çubuq və müxtəlif ölçülü diskrlə böyük bir tapşırığı həll etmək üçün rekursiya şərtidir [3].

Rekursiyanın 3 növü var:

1. Birbaşa rekursiya: Funksiya birbaşa özünü çağırır.
2. Dolayısı (İndirect) ilə baş verən rekursiya: A funksiyası B-ni çağırır, B isə öz növbəsində A-nı çağırır.
3. Quyuq Rekursiyası (Tail Recursion): Rekursiv çağırış funksiyanın daxilində yerinə yetirilən sonuncu əməliyyatdır. Bu, yaddaşın optimallaşdırılması üçün vacibdir.

Rekursiyanın üstünlükləri: Mürəkkəb alqoritmləri (məsələn, ağac strukturları, qraf gəzintiləri) daha sadə ifadə etməsi və "Parçala və idarə et" (Divide and Conquer) strategiyası üçün ideal olmasıdır.

Çatışmazlıqları isə: Yaddaşın səmərəsiz istifadə edilməsidir: Bu zaman dərin rekursiya *StackOverflowError* xətasına səbəb olur və hesablama səmərəliliyi (Computational Efficiency) təkrarlanan hesablamalar üçün (məsələn, optimallaşdırılmamış Fibonacci) əlavə vaxt itkisinə görə aşağı düşür.

Rekursiv funksiyanın hesablama səmərəliliyini artırmaq, başqa sözlə, rekursiyanın optimallaşdırılması üçün əvvəlki hesablamaların nəticələrini yadda saxlamaq üsulundan istifadə olunur. Buna *Memoization* (dinamik proqramlaşdırmanın bir hissəsi) deyilir.

**Nəticə:** Rekursiya mürəkkəb iyerarxiyaların idarə olunması üçün strateji abstraksiya aləti, iterasiya isə xətti və genişhəcmli məlumatların emalı üçün taktiki səmərəlilik metodudur.

### Ədəbiyyat

1. Гуриков, С. Р. Основы алгоритмизации и программирования на Python : учебное пособие / С. Р. Гуриков. - Москва : ИНФРА-М, 2023. - 342 с. - (Высшее образование. Бакалавриат). - Библиогр.: с. 339. – Текст : непосредственный.
2. Семакин, И. Г. Основы алгоритмизации и программирования : учебник / И. Г. Семакин, А. П. Шестаков. - 3-е изд., стер. - Москва : Академия, 2016. - 302 с. - (Профессиональное образование). - Библиогр.: с. 298-299. – Текст : непосредственный.
3. Грессер, Л. Глубокое обучение с подкреплением: теория и практика на языке Python / Л. Грессер, Л.К. Ван; - Санкт-Петербург [и др.] : Питер, 2022. - 415 с. - (Библиотека программиста). - Библиогр.: с. 405-415. – Текст: непосредственный.



## TİBBİ SİĞORTA PORTFELİNİN ZƏRƏRLİLİK DƏRƏCƏSİNİN DEMOQRAFİK FAKTORLAR ƏSASINDA QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ

**İsgəndərov Ramiz Kamal oğlu, Kərimli Nəzrin Rəhim qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

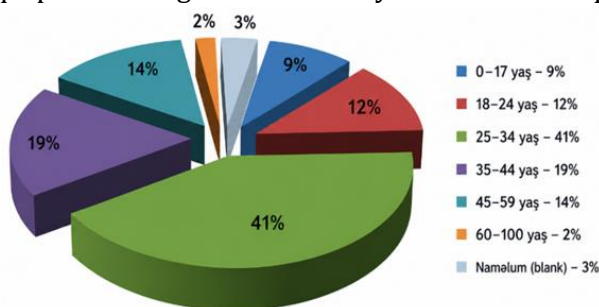
isgenderov\_ramiz@mail.ru, nazrinkarimli0204@gmail.com

**Xülasə:** Analiz zamanı sığorta portfeli yaş, cins və məhsul kateqoriyaları üzrə segmentləşdirilmiş və hər bir segment üzrə premium paylanması və zərərlik dərəcəsi göstəriciləri qiymətləndirilmişdir. Daha sonra yüksək riskli və aşağı gəlirli segmentlər müəyyən edilərək ümumi portfel balansı təhlil olunmuşdur.

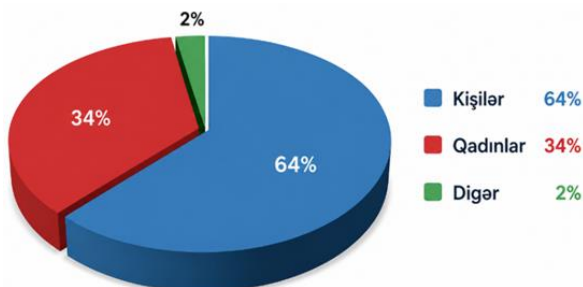
**Açar sözlər:** Zərərlik dərəcəsi, sığorta portfeli, sığorta tarifi.

Tədqiqat işində tibbi sığorta portefelinin demoqrafik və struktur analizi aparılmış və nəticələr ümumiləşdirilmişdir. Təhlil edilən məlumatlar şirkətin mövcud risk paylanmasını, demoqrafik göstəricilərin maliyyə nəticələrinə təsirini, eyni zamanda yeni və köhnə müqavilələr arasındakı zərərlik fərqlərini əhatə edir [1].

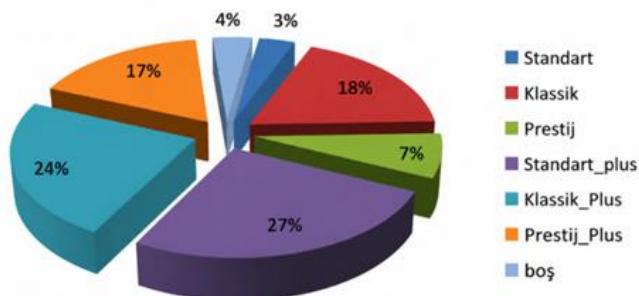
İlk olaraq, portfelin premium paylanmasına baxdıqda müşahidə olunur ki, əsas pay 25–34 yaş qrupuna məxsusdur və bu segment ümumi yazılmış mükafatların (written premium) təxminən 40%-dən çoxunu təşkil edir. Bu, sığorta şirkətinin əsasən iqtisadi cəhətdən aktiv və stabil gəlirli müştərilərə fokuslandığını göstərir. Digər yaş qrupları, 35–44 və 45–59 – orta səviyyədə paya malik olsa da, 60 və üzəri yaş qrupu portfeldə daha az təmsil olunur. Bununla belə, məhz bu yaş qrupunda risk göstəricilərinin yüksək olması diqqət çəkir.



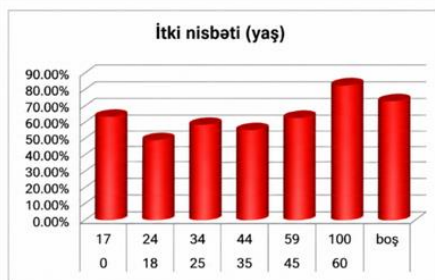
Cins üzrə təhlil göstərir ki, portfel əsasən kişi müştərilərdən formalaşmışdır və "earned premium"-un təxminən 60%-dən çoxu kişilərin payına düşür. Qadın müştərilər daha az paya malik olsa da, onların "loss ratio" göstəricisi xeyli yüksəkdir. Bu, qadın segmentində ya risk davranışlarının fərqli olmasını, ya da məhsul və ya tarif siyasətində qeyri-optimal yanaşmaların mövcudluğunu göstərə bilər.



Proqram üzrə strukturda isə "plus" kateqoriyalı məhsulların – xüsusilə Standart plus və Klassik plus üstünlük təşkil etdiyi müşahidə olunur. Bu, müştərilərin daha geniş təminatlı məhsullara üstünlük verdiyini göstərir və şirkət üçün daha yüksək premiya toplama imkanı yaradır. Lakin bu məhsulların bəzilərinə zərərlik dərəcəsi səviyyəsinin yüksək olması onların gəlirliliyini sual altına alır.



Zərərlik göstəricilərinin təhlili portfelin əsas risk nöqtələrini daha aydın göstərir. Yaş üzrə analizdə riskin yaş artdıqca yüksəldiyi müşahidə olunur və xüsusilə 60 üzəri yaş qrupunda zərərlik 80%-ə yaxınlaşır. Bu isə həmin segmentdə ya tariflərin düzgün təyin olunmadığını, ya da anderraytinq prosesinin kifayət qədər effektiv olmadığını göstərir. Cins üzrə "loss ratio" göstəricilərinə qadınların daha yüksək zərər nisbətinə malik olması diqqət çəkir. Bu, şirkət üçün mühüm signal olub həmin segment üzrə daha detallı analizlərin aparılmasını və risk əsaslı qiymətləndirmənin tətbiqini tələb edir [2].



Aparılan təhlil əsasında belə nəticəyə gəlmək olar ki, portfel struktur baxımından balanslı görünə də, yuxarı yaş qrupları, qadın segmenti və bəzi məhsul kateqoriyalarında yüksək zərərliyyəməlikdir, bu isə şirkətin gəlirliliyinə təzyiq göstərir. Bunun qarşısını almaq üçün risk əsaslı qiymət siyasətinin gücləndirilməsi, anderrayting prosesinin təkmilləşdirilməsi və problemli segmentlər üzrə daha dərin analitik yanaşmanın tətbiqi zəruridir.

#### Ədəbiyyat

1. Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M., Modern Actuarial Risk Theory, Springer, 2008, 381 s.
2. Ohlsson E., Johansson B., Non-Life Insurance Pricing with Generalized Linear Models, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010, 174 s.

### AYRILMAYAN SƏRHƏD ŞƏRTLİ DİFFUZİYA OPERATORUNUN MƏXSUSİ ƏDƏDLƏRİNİN ASİMPOTOTİKASI

**Kamilzadə Nərmin Cəmil qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

asadovcamil2@gmail.com

**Xülasə:** İşdə diffuziya tənliyinin və ayrılan sərhəd şərtlərinin doğurduğu operatora baxılır. Bu operatorun məxsusi ədədlərinin sonsuzluqdakı asimptotikası tapılmışdır.

**Açar sözlər:** diffuziya tənliy, ayrılmayan sərhəd şərtləri, məxsusi ədədlər, asimptotika.

$$y'' + [\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x)]y = 0 \quad (1)$$

diffuziya tənliyinin və

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad (2)$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) + by(0) = 0, \quad (3)$$

sərhəd şərtlərinin doğurduğu  $L$  operatoruna baxaq, burada  $p(x) \in W_2^1[0, \pi]$ ,  $q(x) \in L_2[0, \pi]$  – kompleksqiymətli funksiyalar və  $h, H, b$  – kompleks ədədlərdir.

Bu məsələni  $L(p, q, h, b, H)$  ilə işarə edirik.

Qeyd edək ki, ayrılmayan sərhəd şərtləri ilə verilmiş Şturm–Liuvill operatorları [1-3] işlərində tədqiq edilmişdir.

Tutaq ki,  $\varphi(x, \lambda)$  (1) tənliyinin aşağıdakı başlangıç şərtlərini ödəyən həllidir:

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h.$$

Aydındır ki,

$$\varphi(x, \lambda) = c(x, \lambda) + hs(x, \lambda),$$

burada  $c(x, \lambda)$  və  $s(x, \lambda)$  (1) diferensial tənliyinin kosinus və sinus tipli həlləridir.

Asanlıqla görmək olur ki,  $L(p, q, h, b, H)$  məsələsinin məxsusi ədədləri aşağıdakı xarakterik funksiyanın sıfırlarıdır:

$$\Delta(\lambda) = \varphi'(\pi, \lambda) + H\varphi(\pi, \lambda) + b.$$

**Lemma 1.5.**  $L(p, q, h, b, H)$  məsələsinin  $\lambda_n$  ( $n = \pm 0, \pm 1, \dots$ ) məxsusi ədədləri aşağıdakı asimptomatik düsturu ödəyir:

$$\lambda_n = n + a + \frac{\pi c_1 + h + H}{\pi n} + \frac{(-1)^n b}{\pi n} + \frac{f_n}{n}, \quad |n| \rightarrow \infty,$$

burada

$$a = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p(t) dt, \quad c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [q(t) + p^2(t)] dt,$$

$$\text{və} \quad \sum_n |f_n|^2 < \infty.$$

### Ədəbiyyat

1. Ахтямов А.М. О единственности восстановления краевых условий спектральной задачи по ее спектру // Фундаментальная и прикладная математика, 2000, т.6, № 4, с.995-1006.
2. Набиев И.М. Обратная спектральная задача для оператора диффузии на отрезке // Математическая физика, анализ, геометрия, 2004, т.11, № 3, с.302-313.
3. Шукюров А. Ш. Достаточные условия разрешимости задачи о восстановлении оператора диффузии по спектральным данным // Доклады НАН Азербайджана, 2008, Т. 64, № 2, с. 11-18.

## **FRAKSİONAL TÖRƏMƏLİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ƏSASINDA YADDAŞ EFFEKTİLİ TEXNİKİ SİSTEMLƏRİN ETİBARLILIQ MODELƏRİNİN QURULMASI**

**Kazımzadə Aytaç Azər qızı**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*gasanovaytach14@gmail.com*

**Xülasə:** *Bu tədqiqatda fraksional törəməli diferensial tənliklər əsasında yaddaş effektiv texniki sistemlərin etibarlılıq modellərinin qurulması məsələsi araşdırılmışdır. Klassik eksponensial etibarlılıq modellərinin əsas çatışmazlığı onların sistemin keçmiş vəziyyətlərini nəzərə almaması ilə bağlıdır. Bu səbəbdən fraksional yanaşma tətbiq edilərək etibarlılıq funksiyasının Mittag-Leffler funksiyası vasitəsilə ifadəsi verilmişdir. Aparılmış analitik və hesablama təhlillər göstərmişdir ki, fraksional modellər sistemin real davranışını, xüsusilə gecikmiş köhnəlmə və yaddaş effektivliyi daha dəqiq əks etdirir. Nəticədə bu yanaşmanın mürəkkəb və uzunmüddətli istismar olunan texniki sistemlər üçün daha effektiv olduğu müəyyən edilmişdir.*

**Açar sözlər:** *fraksional törəmə, etibarlılıq nəzəriyyəsi, yaddaş effekti, Mittag-Leffler funksiyası, texniki sistemlər.*

Etibarlılıq nəzəriyyəsində əsas məqsəd texniki sistemlərin müəyyən zaman intervalında nasazlıq vermədən işləmə ehtimalını – yəni etibarlılıq funksiyasını müəyyən etməkdir. Klassik yanaşmada bu proseslər sadə və geniş tətbiq olunan eksponensial qanun əsasında modelləşdirilir və aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

Burada  $R(t)$  sistemin  $t$  zaman anına qədər fasiləsiz işləmə ehtimalını, ləisə nasazlıqların orta intensivliyini xarakterizə edir. Bu model riyazi baxımdan sadə, analitik olaraq rahat və praktik hesablamalar üçün əlverişli olsa da, onun əsas çatışmazlığı sistemin əvvəlki vəziyyətlərini nəzərə almamasıdır. Yəni bu yanaşma "yaddaşsız" xarakter daşıyır və yalnız cari zaman anına əsaslanır [4].

Lakin real texniki sistemlərdə nasazlıqların yaranması çox vaxt əvvəlki istismar şəraiti, yüklənmələr, material yorğunluğu və mikrozədələnmələrin yığılması ilə sıx bağlı olur. Bu isə göstərir ki, sistemin cari vəziyyəti onun keçmişindən asılıdır. Məhz bu səbəbdən klassik eksponensial modellər bir çox hallarda real davranışı tam əks etdirə bilmir[1].

Bu problemi aradan qaldırmaq üçün fraksional törəmələrə əsaslanan yanaşma tətbiq edilir. Fraksional törəmə klassik törəmədən fərqli olaraq qeyri-tam dərəcəli törəmələrdən istifadə edir və beləliklə sistemin keçmiş vəziyyətlərini nəzərə almağa imkan verir. Bu yanaşma texniki sistemlərdə mövcud olan

yaddaş effektini riyazi olaraq modelləşdirməyə şərait yaradır[2].

Etibarlılıq üçün fraksional model aşağıdakı diferensial tənliklə ifadə olunur:

$$D_t^\alpha R(t) = -\lambda R(t), 0 < \alpha \leq 1$$

Burada  $D_t^\alpha$  fraksional törəməni,  $\alpha$  isə yaddaş parametrlərini göstərir. Əgər  $\alpha = 1$  olarsa, model klassik eksponensial formaya keçir. Lakin  $\alpha < 1$  olduqda sistemdə yaddaş effekti nəzərə alınır və bu da etibarlılıq funksiyasının dinamikasına ciddi təsir göstərir.

Bu tənliyin həlli eksponensial funksiya deyil, Mittag-Leffler funksiyası vasitəsilə ifadə olunur:

$$R(t) = E_\alpha(-\lambda t^\alpha)$$

Mittag-Leffler funksiyası eksponensial funksiyanın ümumiləşdirilmiş forması hesab olunur və fraksional sistemlərin təsvirində əsas rol oynayır. Bu funksiya vasitəsilə alınan etibarlılıq funksiyası klassik modeldən fərqli olaraq daha "yavaş azalan" xarakterə malikdir və bu da real sistemlərdə müşahidə olunan gecikmiş köhnəlmə proseslərini daha düzgün əks etdirir.

### Nümunə

Tutaq ki, texniki sistem üçün aşağıdakı parametrlər verilir:

$$\lambda = 0.1, \alpha = 0.7$$

Klassik model üçün etibarlılıq funksiyası:

$$R(t) = e^{-0.1t}$$

Fraksional model üçün isə:

$$R(t) = E_{0.7}(-0.1t^{0.7})$$

Bu ifadələr göstərir ki, fraksional model klassik modelin ümumiləşdirilmiş formasıdır və əlavə olaraq yaddaş effektini nəzərə alır [5].

### Hesablamalar və analitik təhlil

Mittag-Leffler funksiyası aşağıdakı sıra ilə təyin olunur:

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

Burada  $\Gamma(\cdot)$  Qamma funksiyasıdır və fraksional hesablamalarda mühüm rol oynayır. Praktiki hesablamalarda bu sonsuz cəmin ilk bir neçə həddi götürülərək yaxınlaşdırılmış nəticə əldə edilir:

$$E_\alpha(x) \approx 1 + \frac{x}{\Gamma(1 + \alpha)} + \frac{x^2}{\Gamma(1 + 2\alpha)}$$

Verilənlər:

$$\lambda = 0.1, \alpha = 0.7, t = 5$$

İlk olaraq hesablayırıq:

$$t^{\alpha} = 5^{0.7} \approx 3.08$$

Qamma funksiyasının qiymətləri:

$$\Gamma(1.7) \approx 0.91, \Gamma(2.4) \approx 1.24$$

Bunları ifadədə yerinə qoyduqda:

$$R(t) \approx 1 - \frac{0.1 \cdot 3.08}{0.91} + \frac{(0.1 \cdot 3.08)^2}{1.24} \approx 0.738$$

### **Müqayisə**

Klassik model üzrə:

$$R(t) = e^{-0.5} \approx 0.607$$

Fraksional model üzrə:

$$R(t) \approx 0.738$$

Bu nəticələr göstərir ki, fraksional model daha yüksək etibarlılıq qiyməti verir və real sistem davranışına daha yaxın nəticə təqdim edir [6].

### **Nəticə**

Aparılmış analitik və hesablamalı təhlillər göstərir ki, fraksional törəməli etibarlılıq modelləri texniki sistemlərin real davranışını daha dolğun və adekvat şəkildə əks etdirir. Klassik modellərdən fərqli olaraq, bu yanaşma sistemin keçmiş vəziyyətlərini nəzərə alır və yaddaş effektini modelləşdirməyə imkan verir.

Mittag-Leffler funksiyası ilə ifadə olunan etibarlılıq funksiyası daha "yavaş azalan" xarakterə malikdir və bu xüsusiyyət real texniki sistemlərdə müşahidə olunan gecikmiş köhnəlmə proseslərini düzgün təsvir edir. Bununla yanaşı, nasazlıq intensivliyinin zaman üzrə dəyişməsi və sistemin uzunmüddətli davranışının daha real qiymətləndirilməsi fraksional modellərin üstünlüyünü bir daha təsdiq edir.

Beləliklə, fraksional törəməli yanaşma etibarlılıq nəzəriyyəsində müasir və perspektivli istiqamət kimi çıxış edir və xüsusilə mürəkkəb, qeyri-xətti və uzunmüddətli istismar rejiminə malik texniki sistemlərin modelləşdirilməsində daha yüksək dəqiqlik təmin edir.

### **Ədəbiyyat**

1. Podlubny, I. Fractional Differential Equations. Academic Press, 1999.
2. Mainardi, F. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity. 2010.
3. Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. Theory and Applications... Elsevier, 2006.
4. Magin, R. Fractional Calculus in Bioengineering. 2006.
5. Bagley, R.L., Torvik, P.J. Journal of Rheology, 1983.
6. Machado, J.A.T. Communications in Nonlinear Science, 2011.

## ETİBARLILIQ NƏZƏRİYYƏSİNDƏ PALMA AXINI VƏ TƏSADÜFİ PROSESLƏR ƏSASINDA TƏHLİL

**Kazımzadə Aytac Azər qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

*gasanovaytach14@gmail.com*

**Xülasə:** Bu məqalədə etibarlılıq nəzəriyyəsində Palma axınının riyazi modeli formalaşdırılmış və onun Poisson prosesi və Markov zəncirləri ilə əlaqəsi analitik şəkildə əsaslandırılmışdır. Tədqiqat çərçivəsində nasazlıqların intensivliyi ilə sistemin etibarlılığı arasında funksional asılılıq qurulmuş və sistemin işləmə ehtimalını ifadə edən düstur əldə edilmişdir. Nəticələr göstərir ki, Palma axını əsasında qurulan model real texniki sistemlərin etibarlılığının proqnozlaşdırılmasında daha yüksək dəqiqlik təmin edir.

**Açar sözlər:** etibarlılıq, Palma axını, Poisson prosesi, Markov zənciri, nasazlıq.

Müasir texniki sistemlərin mürəkkəbləşməsi etibarlılıq nəzəriyyəsinin rolunu daha da artırmışdır. Sistemlərin fasiləsiz işləməsi və nasazlıqların minimuma endirilməsi mühəndislik və informasiya texnologiyalarında əsas problemlərdən biridir. Bu baxımdan nasazlıqların zaman üzrə baş vermə qanunauyğunluqlarını öyrənmək xüsusi əhəmiyyət kəsb edir.

Etibarlılıq nəzəriyyəsində hadisələrin zaman üzrə paylanmasını modelləşdirmək üçün təsadüfi proseslər geniş istifadə olunur. Bu proseslər içərisində Poisson prosesi və Markov zəncirləri xüsusi yer tutur. Bu modellər vasitəsilə nasazlıqların axını – yəni Palma axını – riyazi şəkildə təsvir edilir.

### 1. Palma axını və onun nəzəri əsasları

Palma axını sistemdə baş verən hadisələrin — xüsusilə nasazlıqların — zaman üzrə necə və hansı tezliklə meydana gəldiyini ifadə edən mühüm anlayışdır. Bu anlayış hadisələrin "gəliş ritmini" və onların zaman daxilində paylanmasını xarakterizə edir.

Bu axın təsadüfi xarakter daşıyır. Hadisələrin dəqiq baş vermə vaxtı əvvəlcədən müəyyən edilə bilmədiyi üçün ehtimal nəzəriyyəsi və təsadüfi proseslərdən istifadə olunur [1].

Palma axınının əsas xüsusiyyətləri:

- Hadisələrin müstəqilliyi
- Sabit intensivlik ( $\lambda = \text{const}$ )
- Kiçik zaman intervalında bir hadisənin baş vermə ehtimalının yüksək olması

Bu xüsusiyyətlər onu Poisson prosesi ilə sıx əlaqələndirir.



## **2. Poisson prosesi və Palma axını**

Poisson prosesi hadisələrin zaman üzrə paylanmasını təsvir edən əsas ehtimal modellərindən biridir və etibarlılıq nəzəriyyəsində nasazlıqların yaranma mexanizmini izah etmək üçün geniş istifadə olunur. Müəyyən  $t$  zaman intervalında baş verən hadisələrin sayı aşağıdakı ehtimal funksiyası ilə ifadə edilir:

$$P\{N(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

Burada  $\lambda$  hadisələrin intensivliyini,  $k$  isə hadisələrin sayını göstərir. Bu modelə əsasən nasazlıqlar təsadüfi xarakter daşıyır və onların orta sayı zamanla düz mütənasib olaraq artır, yəni  $E[N(t)] = \lambda t$ . Ardıcıl nasazlıqlar arasındakı vaxt intervalları isə eksponensial paylanma qanununa tabedir [4].

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0$$

Bu xüsusiyyət sistemin yaddaşsızlıq prinsipinə malik olduğunu göstərir, yəni əvvəlki hadisələr gələcək hadisələrin baş vermə ehtimalına təsir etmir.

Poisson modeli əsasında sistemin etibarlılıq funksiyası qurulur. Sistemin  $t$  zaman intervalında nasazlıq verməməsi ehtimalı aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$R(t) = P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$$

Bu düsturdan göründüyü kimi, sistemin etibarlılığı zaman keçdikcə eksponensial şəkildə azalır və intensivlik  $\lambda$  artdıqca sistem daha tez sıradan çıxır. Sistemin orta işləmə müddəti isə aşağıdakı kimi müəyyən edilir [2].

$$MTBF = \frac{1}{\lambda}$$

Bu nəticə göstərir ki, lazaldıqca sistem daha dayanıqlı olur və bu parametr texniki xidmət strategiyasının əsas göstəricilərindən biri hesab olunur.

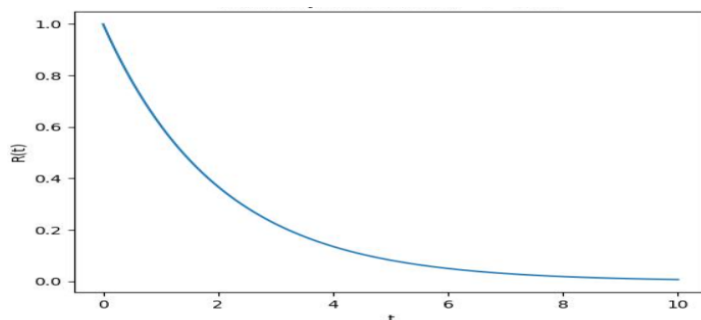
Sistemin dinamik davranışını daha dəqiq təsvir etmək üçün Markov modeli tətbiq olunur. Bu halda sistem iki vəziyyətli Markov prosesi kimi götürülür:  $S_0$  — işlək vəziyyət və  $S_1$  — nasaz vəziyyət. Sistem bu vəziyyətlər arasında  $\lambda$  (nasazlığa keçid intensivliyi) və  $\mu$  (bərpa intensivliyi) parametrləri ilə keçid edir. Stasionar rejimdə bu vəziyyətlərin ehtimalları aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$P_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, P_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

Beləliklə, sistemin uzunmüddətli etibarlılığı, yəni işlək vəziyyətdə olma ehtimalı

$$R = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

kimi ifadə edilir. Bu yanaşma Palma axını, Poisson prosesi və Markov modellərinin qarşılıqlı əlaqəsini göstərərək texniki sistemlərin etibarlılığının kompleks şəkildə qiymətləndirilməsinə imkan verir [6].



### **Yeni yanaşma**

Palma axını yalnız hadisə sayı kimi deyil, intensivlik funksiyası kimi qəbul edilir:

$$\lambda = f(t, x)$$

burada:

- $x$  — sistem parametrləri (yükənmə, temperatur və s.)

Bu yanaşma imkan verir:

- qeyri-sabit intensivlikləri nəzərə almağa
- real şəraitə uyğun modelləşdirmə aparmağa

### **Nəticə**

Aparılan təhlil göstərir ki, Palma axını etibarlılıq nəzəriyyəsində hadisələrin zaman üzrə paylanması izah edən əsas anlayışlardan biridir. Onun Poisson prosesi və Markov modelləri ilə birlikdə istifadəsi texniki sistemlərin etibarlılığını daha dəqiq qiymətləndirməyə imkan verir.

Əsas elmi nəticə:

Palma axını + Poisson prosesi + Markov modeli → kompleks etibarlılıq qiymətləndirilməsi üçün optimal yanaşma

### **Ədəbiyyat**

6. Gnedenko B.V. The Theory of Probability. Moscow, 1988.
7. Ross S. Stochastic Processes. Wiley, 2014.
8. Cox D.R., Isham V. Point Processes. Chapman & Hall, 1980.
9. Medhi J. Stochastic Models in Queueing Theory. Academic Press, 2003.
10. Trivedi K.S. Probability and Statistics with Reliability Applications. Wiley, 2002.
11. Barlow R., Proschan F. Statistical Theory of Reliability. Holt, 1996.
12. Papoulis A. Probability, Random Variables and Stochastic Processes. McGraw-Hill, 2002.
13. Feller W. An Introduction to Probability Theory. Wiley, 1971.

## VEKTOR METODUNUN HƏNDƏSƏ MƏSƏLƏLƏRİN HƏLLİNƏ TƏTBİQİ METODİKASI

**Qasımov Rəşid Ataxan oğlu , Adıgözəlova Fərqanə Siyavuş qızı**

*(LDU, Təbiyyat fakültəsi)*

*resid5757@mail.ru, farqana.adigozalova@mail.ru*

**Xülasə:** Vektorlar riyaziyyatın geniş tətbiq sahəsinə malik əsas anlayışlarından biridir. Vektorların tətbiq sahələrinə fizika, nəzəri mexanika, diferensial həndəsə, tenzor analizi və s. daxildir. Bu səbəbdən orta məktəb riyaziyyat kursunda bəzi məsələlərin vektorların tətbiqi ilə öyrənilməsi xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. Vektorların geniş tətbiq sahələrini nəzərə alaraq demək olar ki, vektor metodu riyazi məsələlərin həllində çox aktualdır.

**Açar sözlər:** vektor, vektorlar metodu, vektorial kəmiyyət, skalyar hasil, afin məsələlər, metrik məsələlər.

Vektorlar riyaziyyatın geniş tətbiq sahələrinə malik olan əsas anlayışlarından biridir. Vektorların tətbiq sahələrinə Fizikanı, nəzəri mexanikanı, diferensial həndəsəni, tenzor analizini və s. sahələri nümunə göstərmək olar. Bu səbəbdən də vektorların tətbiqi ilə orta məktəb riyaziyyat kursunda bəzi riyazi məsələlərin öyrənilməsi xüsusi əhəmiyyət daşıyır. Vektorların tətbiq sahələrinin genişliyini nəzərə alaraq, vektor metodunun riyazi məsələlərin həllində çox aktual olduğunu söyləmək olar.

Vektor termini fizikada vektorial kəmiyyət kimi, həndəsədə isə istiqamətlənmiş düz düz xətt parçası kimi xarakterizə olunur. Vektor metodu ilə həll edilən riyazi məsələlər iki qrupa bölünür: afin və metrik məsələlər[1].

Metrik məsələlərin həllində vektorların skalyar hasilı əmələndən geniş istifadə olunur. Lakin afin məsələlərin həllində skalyar hasil əmələndən istifadə olunmur.

Vektor metodu ilə riyazi məsələləri həll etmək üçün əvvəlcə məsələnin şərtini vektor dilinə çevirmək lazımdır. Bunun üçün vektorları daxil etmək, onları koordinat sisteminin bazis vektorları üzrə ayırmaq, vektorların bərabərliyi sistemini tərtib edib, sadələşdirmək lazımdır. Sonda vektorların bərabərliyini cəbri tənliklə əvəz edib, alınan tənliyi həll etmək lazımdır.

Vektor metodunun tətbiqi ilə həndəsi məsələləri həll etmək üçün qarşıya aşağıdakı məqsədlər qoyulur:

- Həndəsi məsələlərin həllinin səmərəli üsullarını öyrənmək və teoremləri isbat etmək bacarığına yiyələnmək;
- Şagirdlərdə ümumiləşdirmə və konkretləşdirmə vərdisləri formalaşdırmaq;

-Məsələ həlli zamanı şagirdlərə cəldlik keyfiyyəti aşılmaq.

Riyaziyyatın tədisi zamanı problemlı məsələlərin həllində istifadə olunan metodlardan biri olan vektor metodudur. Orta məktəbin həndəsə kursunda çətinliyi artırılmış məsələləri həll etmək üçün tez-tez bu metoddan istifadə olunur [2].

**Məsələ.**  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  kubunun tili  $a$ -ya bərabərdir.  $N \in CC_1$  və  $CN : NC_1 = 2 : 1$ ,  $M \in AA_1$ ,  $AM : MA_1 = 2 : 1$

olarsa,  $\overrightarrow{MN}$  və  $\overrightarrow{DC}$  vektorları arasındakı bucağı tapın.

**Həlli.**  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}$  və şərtə görə

$$\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AA_1}, \quad \overrightarrow{CN} = \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{CC_1}, \quad \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{DD_1}$$

olduğundan,

qiymətləri yerinə yazsaq,

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \frac{2}{3} \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AA_1}$$

$$\text{alarıq. } |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AA_1}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{DC}^2 + \frac{1}{9} \overrightarrow{AA_1}^2 + 2 \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA_1} + \frac{2}{3} \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AA_1}} = \sqrt{a^2 + a^2 + \frac{1}{9} a^2} = \frac{\sqrt{19}}{3} a.$$

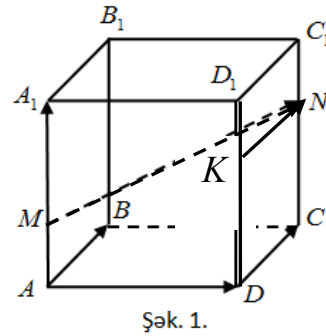
$\overrightarrow{KN} \parallel \overrightarrow{DC}$  quraq (şəx.1). Onda  $\overrightarrow{MN}$  və  $\overrightarrow{DC}$  vektorları arasındakı bucaq  $\overrightarrow{MN}$  və  $\overrightarrow{KN}$  vektorları arasındakı bucağa bərabər olar.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{KN} = \overrightarrow{KN} \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AA_1}\right) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{KN} + \overrightarrow{KN} \cdot \overrightarrow{KN} + \\ &+ \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{KN} \cdot \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{KN}^2 = a^2. \end{aligned}$$

$$\text{Skalyar hasilin tərifiinə görə } \cos \angle MNK = \frac{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{KN}}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{KN}|} = \frac{a^2}{\frac{\sqrt{19}}{3} a \cdot a} = \frac{3}{\sqrt{19}},$$

$$\angle MNK = \arccos \frac{3}{\sqrt{19}} \text{ alarıq.}$$

**Məsələ.**  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  kubu verilmişdir.  $CC_1$  tilinin orta nöqtəsi  $M$  olarsa,

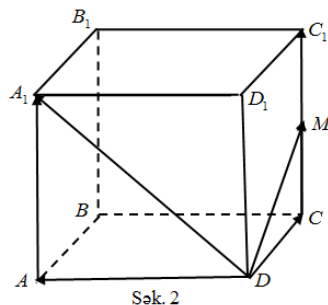


$\cos \angle A_1DM$  -i tapın.

**Həlli.** Kubun tili  $a$  olsun. Şərtə görə

$$\cos \angle A_1DM = \frac{\overline{DA_1} \cdot \overline{DM}}{|\overline{DA_1}| \cdot |\overline{DM}|} \text{ olar (şək. 2).}$$

$$\overline{DA_1} = \overline{DA} + \overline{AA_1},$$



$$|\overline{DA_1}| = \sqrt{(\overline{DA} + \overline{AA_1})^2} = \sqrt{\overline{DA}^2 + \overline{AA_1}^2 + 2\overline{DA} \cdot \overline{AA_1}} = a\sqrt{2},$$

$$\overline{DM} = \overline{DC} + \overline{CM} = \overline{DC} + \frac{1}{2}\overline{CC_1},$$

$$|\overline{DM}| = \sqrt{\left(\overline{DC} + \frac{1}{2}\overline{CC_1}\right)^2} = \sqrt{\overline{DC}^2 + \frac{1}{4}\overline{CC_1}^2 + \overline{DC} \cdot \overline{CC_1}} = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

$$\overline{DA} \cdot \overline{DC} = 0, \quad \overline{DA} \cdot \overline{CC_1} = 0, \quad \overline{AA_1} \cdot \overline{DC} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\overline{AA_1} \cdot \overline{CC_1} = \frac{1}{2}|\overline{AA_1}| \cdot |\overline{CC_1}| \cos 0^\circ = \frac{1}{2}a^2 \text{ olduğundan,}$$

$$\overline{DA_1} \cdot \overline{DM} = (\overline{DA} + \overline{AA_1}) \left( \overline{DC} + \frac{1}{2}\overline{CC_1} \right) = \overline{DA} \cdot \overline{DC} + \frac{1}{2}\overline{DA} \cdot \overline{CC_1} + \overline{AA_1} \cdot \overline{DC} + \frac{1}{2}\overline{AA_1} \cdot \overline{CC_1} = \frac{1}{2}a^2.$$

Bu qiymətləri skalyar hasil düsturunda yerinə yazsaq,

$$\cos \angle A_1DM = \frac{\frac{1}{2}a^2}{a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \angle A_1DM = \arccos \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Bu işin yeniliyi kəmiyyətlərlə bağlı çətinliyi artırılmış məsələlərin qismən çətin metod olan vektorlar metodu ilə həll edilməsi ilə bağlıdır.

İşin nəzəri və praktik əhəmiyyəti vektor metodunun tətbiqi ilə cəbri, həndəsi və fiziki məsələlərin həllində və teoremlərin isbatında şagirdlərə yardımçı ola bilməsidir.

### Ədəbiyyat

1. Həsənova X.S. Orta məktəbdə vektor anlayışının daxil edilməsi üsulları haqqında // Fizika, riyaziyyat və informatika tədrisi, 2010, № 1
2. Vəliyev M.M. Məktəb həndəsə kursunda vektorlar metodu ilə məsələ həlli üsulları. Bakı, 2001.

## **ÜMUMİLƏŞDİRİLMİŞ XƏTTİ MODELƏRİN MAHİYYƏTİ VƏ NƏZƏRİ ƏSASLARI**

**Qəhrəmanov Şirəli Fikrət oğlu**

*(BDU, Tətbiqi Riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*qehremanovsireli@gmail.com*

**Xülasə:** *Məqalədə ümumiləşdirilmiş xətti modellərin mahiyyəti və nəzəri əsasları araşdırılmışdır. Göstərilmişdir ki, bu modellər klassik xətti reqressiyanın genişləndirilmiş forması olmaqla müxtəlif tip statistik məlumatların təhlilinə imkan yaradır. Ümumiləşdirilmiş xətti modellərin əsas üstünlüyü ondan ibarətdir ki, onlar normal paylanmaya tabe olmayan müşahidələrin modelləşdirilməsində də istifadə edilə bilər. Məqalədə modelin təsadüfi, sistematik və əlaqə funksiyası komponentləri izah olunmuş, həmçinin bu yanaşmada istifadə olunan əsas paylanmalar və parametrlərin qiymətləndirilməsi prinsipləri şərh edilmişdir. Nəticədə ümumiləşdirilmiş xətti modellərin tətbiqi sahələrinin genişliyi və müasir statistik təhlildə tutduğu mühüm yer əsaslandırılmışdır.*

**Açar sözlər:** *ümumiləşdirilmiş xətti modellər, reqressiya, paylanma, əlaqə funksiyası, parametr, statistik təhlil.*

Statistik modelləşdirmə müxtəlif sahələrdə müşahidə olunan hadisələrin izahı, proqnozlaşdırılması və onların arasında mövcud olan qanunauyğunluqların müəyyən edilməsi üçün mühüm əhəmiyyət daşıyır. Uzun müddət klassik xətti reqressiya modelləri statistik təhlilin əsas alətlərindən biri olmuşdur. Lakin praktikada rast gəlinən məlumatların hamısı normal paylanmaya uyğun gəlmir və bu halda klassik modelin imkanları məhdudlaşır. Məsələn, hadisələrin sayı, yalnız müsbət qiymətlər alan kəmiyyətlər və ya ehtimal xarakterli nəticələr adi xətti modelin fərziyyələrinə tam uyğun olmur. Belə hallarda ümumiləşdirilmiş xətti modellər daha əlverişli yanaşma kimi çıxış edir [1].

Ümumiləşdirilmiş xətti modellər klassik xətti modelin ideyasını qoruyaraq onu daha geniş çərçivədə tətbiq etməyə imkan verir. Bu modellər ilk növbədə asılı dəyişənin müxtəlif ehtimal paylanmalarına malik ola bilməsi ilə seçilir. Başqa sözlə, nəticə dəyişəni mütləq normal paylanmalı deyil. Bu xüsusiyyət modelin praktiki əhəmiyyətini artırır və onu iqtisadiyyat, biologiya, tibb, mühəndislik və sığorta kimi müxtəlif sahələrdə istifadə olunan çevik statistik üsula çevirir [2].

Ümumiləşdirilmiş xətti modellər üç əsas komponentdən ibarətdir. Birinci komponent təsadüfi komponentdir. Bu hissə asılı dəyişənin ehtimal paylanmasını xarakterizə edir. Əgər müşahidə olunan göstərici hadisələrin saydırsa, Puasson paylanması, nəticə iki mümkün haldan ibarətdirsə, binom paylanması,

yalnız müsbət və fasiləsiz qiymətlər alırsa, qamma paylanması tətbiq oluna bilər. Deməli, modelin qurulmasında ilk mərhələ tədqiq olunan dəyişənin təbiətinə uyğun paylanmanın seçilməsidir [1], [3].

İkinci komponent sistematik komponent adlanır. Bu komponent izahedici dəyişənlərin xətti kombinasiyasını ifadə edir. Əgər  $x_1, x_2, \dots, x_k$  izahedici dəyişənlədirsə, sistematik komponent ümumi şəkildə belə göstərilir:

$$\eta = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k$$

Burada  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$  naməlum parametrlərdir və onların qiyməti seçilmiş məlumat əsasında müəyyən edilir. Sistematik komponent modelin hansı amillərdən asılı olduğunu və həmin amillərin nəticəyə necə təsir etdiyini göstərir.

Üçüncü komponent əlaqə funksiyasıdır. Əlaqə funksiyası asılı dəyişənin riyazi gözləntisi ilə sistematik komponent arasında münasibət yaradır. Ümumiləşdirilmiş xətti modelin əsas forması belə yazılır:

$$g(\mu) = \eta$$

Burada  $\mu = E(Y)$  asılı dəyişənin orta qiyməti,  $g(\cdot)$  isə əlaqə funksiyasıdır. Əlaqə funksiyasının seçimi istifadə olunan paylanma ilə əlaqədardır. Məsələn, Puasson paylanmasında çox vaxt loqarifmik əlaqə funksiyası, binom paylanmasında isə logit əlaqə funksiyası tətbiq edilir. Bu yanaşma nəticələrin nəzəri cəhətdən düzgün və praktik baxımdan şərh edilə bilən formada alınmasına imkan verir [2], [4].

Ümumiləşdirilmiş xətti modellərin nəzəri əsaslarından biri də müşahidələrin eksponensial ailəyə aid paylanmalarla ifadə olunmasıdır. Bu yanaşma modelin vahid bir çərçivədə qurulmasını təmin edir. Müxtəlif paylanmaların eyni metodoloji prinsip əsasında təhlil olunması statistik nəticələrin müqayisəsini və tətbiqini asanlaşdırır. Beləliklə, model yalnız ayrıca bir üsul deyil, bütöv bir nəzəri yanaşma kimi formalaşır.

Bu modellərdə parametrlərin qiymətləndirilməsi əsasən maksimum ehtimallıq üsulu ilə aparılır. Bu üsul seçilmiş müşahidələr üçün ən uyğun parametr qiymətlərini tapmağa xidmət edir. Parametrlərin qiymətləndirilməsindən sonra onların statistik əhəmiyyətliliyi yoxlanılır, modelin uyğunluğu qiymətləndirilir və izahedici dəyişənlərin nəticəyə təsiri şərh olunur. Model qurulduqdan sonra onun uyğunluğu və alınan nəticələrin etibarlılığı qiymətləndirilir.

Ümumiləşdirilmiş xətti modellərin mühüm cəhətlərindən biri də odur ki, onlar real məlumatların xüsusiyyətlərini daha dolğun nəzərə alır. Klassik xətti modellərdə dispersiyanın sabit olması və qalıqların normal paylanması kimi fərziyyələr tələb olunur. Lakin praktik məlumatlarda bu şərtlər çox vaxt ödənilmir. Ümumiləşdirilmiş xətti modellər isə paylanma və əlaqə funksiyası seçimi vasitəsilə bu çətinliyi aradan qaldırır. Nəticədə müşahidə olunan proseslər daha düzgün təsvir edilir və qərarvermə üçün daha etibarlı statistik nəticələr əldə olunur.

Beləliklə, ümumiləşdirilmiş xətti modellər klassik regressiya yanaşmasının inkişaf etmiş forması kimi müasir tətbiqi statistikanın əsas alətlərindən biridir. Onların mahiyyəti müxtəlif tip məlumatları vahid nəzəri əsas üzərində təhlil etməyə imkan verməsindədir. Təsadüfi komponent, sistematik komponent və əlaqə funksiyasının qarşılıqlı əlaqəsi bu modellərin nəzəri bazasını təşkil edir. Məhz bu xüsusiyyətlər ümumiləşdirilmiş xətti modelləri həm nəzəri, həm də praktik baxımdan əhəmiyyətli edir və onların gələcək tədqiqatlarda istifadəsini daha da aktuallaşdırır.

### **Ədəbiyyat**

1. McCullagh P., Nelder J.A. Generalized Linear Models. London: Chapman and Hall, 1989, 511 p.
2. Dobson A.J., Barnett A.G. An Introduction to Generalized Linear Models. 4th ed. Chapman & Hall/CRC, 2018, 392 p.
3. Agresti A. Foundations of Linear and Generalized Linear Models. Wiley, 2015, 480 p.
4. Ohlsson E., Johansson B. Non-Life Insurance Pricing with Generalized Linear Models. Springer Berlin Heidelberg, 2010, 174 p.

## **QEYRİ-HƏYAT SIĞORTASINDA SIĞORTA HAQLARININ HESABLANMASINDA ÜMUMİLƏŞDİRİLMİŞ XƏTTİ MODELLƏR**

**Qəhrəmanov Şirəli Fikrət oğlu**

*(BDU, Tətbiqi Riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*qehremanovsireli@gmail.com*

**Xülasə:** *Məqalədə qeyri-həyat sığortasında sığorta haqlarının hesablanması prosesində ümumiləşdirilmiş xətti modellərin tətbiqi araşdırılmışdır. Göstərilmişdir ki, qeyri-həyat sığortasında risklərin müxtəlifliyi, sığorta hadisələrinin tezliyi və zərər məbləğinin dəyişkənliyi tarifqoymada statistik yanaşmaların istifadəsini zəruri edir. Ümumiləşdirilmiş xətti modellər bu baxımdan risk faktorlarının təsirini qiymətləndirməyə, sığorta portfelini qruplaşdırmağa və daha əsaslandırılmış sığorta haqları müəyyən etməyə imkan verir. Məqalədə sığorta hadisələrinin tezliyi və zərər məbləğinin modelləşdirilməsi, həmçinin tarifin hesablanması bu modellərin üstünlükləri izah edilmişdir. Nəticədə ümumiləşdirilmiş xətti modellərin qeyri-həyat sığortasında elmi əsaslı qiymətdəyişmə üçün mühüm alət olduğu göstərilmişdir.*

**Açar sözlər:** *qeyri-həyat sığortası, sığorta haqqı, tarifqoyma, risk faktoru, ümumiləşdirilmiş xətti modellər, zərər tezliyi.*

Qeyri-həyat sığortasında əsas məsələlərdən biri sığorta haqlarının düzgün və əsaslandırılmış şəkildə hesablanmasıdır. Sığorta şirkəti bağladığı müqavilə



vilələr üzrə gələcəkdə baş verə biləcək sığorta hadisələrini və həmin hadisələr nəticəsində yaranacaq zərərləri nəzərə almalıdır. Əgər tarif düzgün hesablanmazsa, bu həm sığorta şirkətinin maliyyə dayanıqlığına, həm də sığortalılar arasında qiymət ədalətinə mənfi təsir göstərə bilər. Buna görə də qeyri-həyat sığortasında tarifiqoyma prosesində statistik üsulların tətbiqi mühüm əhəmiyyət kəsb edir [1].

Qeyri-həyat sığortasına avtomobil, əmlak, məsuliyyət, yük və digər sığorta növləri daxildir. Bu sahələrdə risklər eyni xarakter daşımır. Məsələn, avtomobil sığortasında sürücünün yaşı, avtomobilin gücü, istifadə müddəti, yaşayış yeri və əvvəlki qəza tarixçəsi risk səviyyəsinə təsir göstərir. Əmlak sığortasında isə əmlakın yerləşdiyi ərazi, tikilinin növü, istismar müddəti və təhlükəsizlik səviyyəsi mühüm amillər kimi çıxış edir. Deməli, müxtəlif müştərilər üçün eyni sığorta haqqının tətbiqi düzgün yanaşma hesab edilə bilməz [2].

Sığorta haqlarının hesablanmasında məqsəd risk səviyyəsinə uyğun qiymət müəyyən etməkdir. Bu zaman sığorta hadisələrinin gözlənilən sayı və orta zərər məbləği nəzərə alınır. Praktiki baxımdan netto sığorta haqqı gələcək ödənişlərin gözlənilən məbləğini əks etdirir. Ümumi şəkildə bu yanaşma aşağıdakı kimi ifadə oluna bilər:

$$\text{Netto sığorta haqqı} = \text{Hadisələrin gözlənilən sayı} \times \text{Orta zərər məbləği}$$

Brutto sığorta haqqı isə netto sığorta haqqına inzibati xərclər, ehtiyat yükləri və mənfəət əlavələri daxil edilməklə müəyyən olunur. Buna görə də tarifiqoyma prosesində əvvəlcə riskin statistik cəhətdən düzgün qiymətləndirilməsi vacibdir.

Məhz bu mərhələdə ümumiləşdirilmiş xətti modellər mühüm rol oynayır. Bu modellər müxtəlif tip məlumatların təhlilinə imkan verdiyindən sığorta sahəsi üçün əlverişli hesab olunur. Qeyri-həyat sığortasında bəzən sığorta hadisələrinin sayı modelləşdirilir, bəzən zərərin baş verib-verməməsi araşdırılır, bəzən də zərər məbləği təhlil edilir. Belə hallarda klassik xətti modelin imkanları kifayət etmir. Ümumiləşdirilmiş xətti modellər isə bu məlumatların təbiətinə uyğun paylanma seçməyə imkan verir [1], [3].

Sığorta hadisələrinin tezliyinin modelləşdirilməsində çox vaxt Puasson paylanmasından istifadə olunur. Çünki müəyyən dövr ərzində baş verən hadisələrin sayı adətən say dəyişəni kimi götürülür. Əgər məqsəd hadisənin baş verib-verməməsini qiymətləndirməkdirsə, binom paylanması tətbiq oluna bilər. Zərər məbləği isə adətən yalnız müsbət qiymətlər aldığından qamma paylanması bu göstəricinin modelləşdirilməsində daha münasib hesab edilir. Beləliklə, ümumiləşdirilmiş xətti modellər riskin müxtəlif tərəflərini ayrıca təhlil etməyə imkan verir [2], [4].

Bu modellərin qeyri-həyat sığortasında əsas üstünlüklərindən biri risk faktorlarının təsirini ayrıca qiymətləndirməsidir. Məsələn, müəyyən edilə bilər ki, gənc sürücülərdə qəza ehtimalı daha yüksəkdir və ya böyük şəhərlərdə nəqliyyat sıxlığı səbəbindən zərər tezliyi daha çox olur. Belə nəticələr əsasında sığorta portfeli müxtəlif risk qruplarına bölünür. Nəticədə aşağı riskli və yüksək riskli müştərilər üçün fərqli tariflər tətbiq olunur. Bu isə həm sığorta şirkəti, həm də sığortalılar üçün daha ədalətli qiymətdə qoyma yaradır.

Ümumiləşdirilmiş xətti modellərin digər mühüm üstünlüyü ondan ibarətdir ki, onlar real sığorta məlumatlarının xüsusiyyətlərini daha yaxşı nəzərə alır. Sığorta məlumatlarında çox vaxt dəyişkənlik yüksək olur, müşahidələr asimmetrik xarakter daşıyır və nəticələr normal paylanmadan kənara çıxır. Bu səbəbdən klassik yanaşmalar bəzən risk səviyyəsini düzgün əks etdirmir. Ümumiləşdirilmiş xətti modellər isə paylanma və əlaqə funksiyasının düzgün seçilməsi vasitəsilə daha etibarlı nəticələr əldə etməyə imkan verir [3].

Qeyri-həyat sığortasında tarifqoyma yalnız cari qiymətin müəyyən edilməsi ilə məhdudlaşmır. Bu proses eyni zamanda sığorta portfelinin idarə olunması, riskli segmentlərin müəyyən edilməsi və gələcək məhsul siyasətinin formalaşdırılması üçün də əhəmiyyətlidir. Əgər model nəticəsində müəyyən risk qrupu üzrə zərər tezliyi yüksək çıxırsa, həmin qrup üzrə tarif artırılaraq, sığorta şərtləri sərtləşdirilə və ya əlavə məhdudiyyətlər tətbiq oluna bilər. Əksinə, aşağı riskli müştərilər üçün daha münasib tariflər təklif edilə bilər. Belə yanaşma rəqabət mühitində sığorta şirkətinin mövqeyini gücləndirir [4].

Beləliklə, ümumiləşdirilmiş xətti modellər qeyri-həyat sığortasında sığorta haqlarının hesablanması mühüm əhəmiyyətə malikdir. Bu modellər sığorta hadisələrinin tezliyi və zərər məbləğini ayrıca qiymətləndirməyə, risk faktorlarının təsirini müəyyən etməyə və daha əsaslandırılmış tariflər qurmağa imkan verir. Nəticədə sığorta haqları təsadüfi deyil, statistik və analitik əsaslarla hesablanır. Bu da müasir qeyri-həyat sığortasında ümumiləşdirilmiş xətti modellərin praktik əhəmiyyətini daha da artırır.

### **Ədəbiyyat**

1. McCullagh P., Nelder J.A. Generalized Linear Models. London: Chapman and Hall, 1989, 511 p.
2. Dobson A.J., Barnett A.G. An Introduction to Generalized Linear Models. 4th ed. Chapman & Hall/CRC, 2018, 392 p.
3. Agresti A. Foundations of Linear and Generalized Linear Models. Wiley, 2015, 480 p.
4. Ohlsson E., Johansson B. Non-Life Insurance Pricing with Generalized Linear Models. Springer Berlin Heidelberg, 2010, 174 p.

## **AZƏRBAYCANDA AĞIR XƏSTƏLİKLƏRƏ TUTULMALARIN STATİSTİKASINA DAİR ARAŞDIRMA**

**Quliyeva Nərmin Əbdüləli qızı, İsmayilzadə Ləman Etibar qızı**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*lemanismayilzade045@gmail.com*

**Xülasə:** *Bu məqalədə Azərbaycanda ağır və xroniki xəstəliklərə tutulma hallarının statistik göstəriciləri araşdırılmışdır. Ürək-damar xəstəlikləri, onkoloji xəstəliklər, şəkərli diabet və tənəffüs sistemi xəstəliklərinin yayılma səviyyəsi təhlil edilmişdir. Məqalədə ağır xəstəliklərin yaş və cins üzrə fərqləri, ölüm göstəricilərinə təsiri və sosial-iqtisadi nəticələri göstərilmişdir. Həmçinin səhiyyə sisteminin inkişafı və profilaktik tədbirlərin əhəmiyyəti qeyd olunmuşdur.*

**Açar sözlər:** *ağır xəstəliklər, statistika, səhiyyə, demoqrafiya, ölüm göstəriciləri, əhali sağlamlığı.*

Müasir dövrdə ağır və xroniki xəstəliklər dünya ölkələrinin əsas səhiyyə problemlərindən biri hesab olunur [4]. Bu xəstəliklər insanların həyat keyfiyyətini aşağı salmaqla yanaşı, ölüm səviyyəsinin artmasına və sosial-iqtisadi problemlərin yaranmasına səbəb olur. Azərbaycanda da son illərdə ağır xəstəliklərə tutulma hallarının artması müşahidə edilir [5].

Ən çox yayılan ağır xəstəliklər sırasında ürək-damar xəstəlikləri, onkoloji xəstəliklər, şəkərli diabet və xroniki tənəffüs sistemi xəstəlikləri xüsusi yer tutur. Həmin xəstəliklər əhəlinin sağlamlıq vəziyyətinə və demoqrafik göstəricilərinə ciddi təsir göstərir [2].

Statistik məlumatların təhlili göstərir ki, xəstəliklərin yayılması həm yaş, həm də cins faktorundan asılı olaraq dəyişir. Bu səbəbdən problemin araşdırılması və profilaktik tədbirlərin həyata keçirilməsi mühüm əhəmiyyət daşıyır.

### **Ağır xəstəliklərin əsas növləri və yayılması**

Azərbaycanda ölüm hallarının böyük hissəsi ürək-damar xəstəliklərinin payına düşür [5]. Hipertoniya, infarkt və insult kimi problemlər xüsusilə orta və yaşlı insanlar arasında geniş yayılmışdır. Qeyri-sağlam qidalanma, stress və fiziki passivlik bu xəstəliklərin əsas səbəblərindən hesab olunur.

Onkoloji xəstəliklər də son illərdə artan problemlər sırasındadır [4]. Ağciyər, mədə, qaraciyər və süd vəzi xərçəngi daha çox rast gəlinən xəstəliklərdəndir. Xəstəliyin gec aşkar olunması ölüm riskini artırır və müalicə prosesini çətinləşdirir.

Şəkərli diabet Azərbaycanda geniş yayılmış xroniki xəstəliklərdən biridir [1]. Bu xəstəlik xüsusilə yaşlı əhali arasında daha çox müşahidə olunur və ürək-

damar problemlərinin yaranmasına səbəb olur.

Tənəffüs sistemi xəstəlikləri, xüsusilə bronxial astma və xroniki bronxit də əhali arasında geniş yayılmışdır. Ekoloji problemlər və siqaret istifadəsi bu xəstəliklərin artmasına təsir göstərir [2].

### **Yaş və cins üzrə statistik göstəricilər**

Statistik göstəricilər göstərir ki, ağır xəstəliklər əsasən yaşlı əhali arasında daha çox yayılmışdır [5]. Yaş artdıqca immun sisteminin zəifləməsi müxtəlif xəstəliklərin yaranma riskini yüksəldir.

Kişilər arasında ürək-damar və ağciyər xəstəlikləri daha çox müşahidə edilir. Bunun əsas səbəbləri siqaret istifadəsi, ağır iş şəraiti və sağlamlığa diqqətsiz yanaşmadır. Kişilər arasında ölüm göstəricilərinin yüksək olması demografik vəziyyətə təsir göstərir [2].

Qadınlar arasında isə hormonal və onkoloji xəstəliklər daha geniş yayılmışdır. Süd vəzi xərçəngi qadınlar arasında ən çox rast gəlinən xəstəliklərdən biridir [4]. Bununla yanaşı qadınların orta ömür uzunluğu kişilərlə müqayisədə daha yüksəkdir.

Uşaqlar arasında bəzi genetik və irsi xəstəliklər müşahidə olunur. Bu xəstəliklərin erkən diaqnostikası gələcəkdə ağır nəticələrin qarşısını almaqda mühüm rol oynayır.

### **Ağır xəstəliklərin sosial-iqtisadi təsiri**

Ağır xəstəliklər cəmiyyətin sosial və iqtisadi inkişafına mənfi təsir göstərir [2]. Uzunmüddətli müalicə və reabilitasiya böyük maliyyə vəsaiti tələb edir. Dövlət büdcəsindən səhiyyə sahəsinə ayrılan xərclər artır [3].

Əmək qabiliyyətli insanların xəstəlik səbəbindən iş fəaliyyətindən uzaqlaşması iqtisadi məhsuldarlığın azalmasına gətirib çıxarır. Bu vəziyyət ailələrin maddi rifahına da mənfi təsir edir.

Bəzi hallarda insanlar müalicə məqsədilə xarici ölkələrə müraciət edirlər. Bu isə əlavə maliyyə xərclərinə və sosial problemlərə səbəb olur.

Xəstəliklərin psixoloji təsiri də mühüm problemlərdəndir. Uzunmüddətli xəstəliklər insanlarda stress və depressiya yarada bilər.

### **Profilaktik tədbirlər və həlli yolları**

Ağır xəstəliklərin yayılmasının qarşısını almaq üçün profilaktik tədbirlərin həyata keçirilməsi vacibdir. Sağlam həyat tərzinin təbliği, düzgün qidalanma və fiziki aktivliyin artırılması mühüm əhəmiyyət daşıyır.

Mütəmadi tibbi müayinələrin keçirilməsi xəstəliklərin erkən mərhələdə aşkar olunmasına kömək edir [4]. Erkən diaqnostika müalicənin effektivliyini artırır və ölüm hallarını azaldır.

Səhiyyə sisteminin inkişafı, müasir tibbi avadanlıqların tətbiqi və ixtisaslı

həkimlərin hazırlanması da mühüm rol oynayır [3]. Əhalinin maarifləndirilməsi xəstəliklərin qarşısının alınmasında vacib amillərdəndir.

### **Nəticə**

Beləliklə, Azərbaycanda ağır xəstəliklərə tutulma halları əhalinin sağlamlığı və demoqrafik vəziyyəti üçün ciddi problemlər yaradır. Ürək-damar, onkoloji və şəkərli diabet xəstəlikləri ölüm göstəricilərinə və sosial rifaha mənfi təsir göstərir [5].

Problemin həlli üçün səhiyyə xidmətlərinin keyfiyyətinin artırılması, profilaktik tədbirlərin gücləndirilməsi və insanların sağlam həyat tərzinə təşviq olunması vacibdir. Erkən diaqnostika və tibbi xidmətlərin inkişafı ağır xəstəliklərin mənfi nəticələrinin azalmasına kömək edə bilər [4].

### **Ədəbiyyat**

1. Ələkbərov Ə.Ə. *Tibbi statistikanın əsasları*. – Bakı: Elm, 2019, 312 s.
2. Məmmədov A.M. *Əhali sağlamlığı və sosial problemlər*. – Bakı: Təhsil, 2021, 280 s.
3. Həsənov R.H. *Azərbaycanda səhiyyə sisteminin inkişafı*. – Bakı: Universitet nəşriyyatı, 2020, 264 s.
4. Dünya Səhiyyə Təşkilatı. *Qeyri-infeksiyon xəstəliklər üzrə illik hesabat*. – Cenevrə, 2023.
5. Azərbaycan Respublikası Dövlət Statistika Komitəsi. *Səhiyyə statistikasına məcmuəsi*. – Bakı, 2024.

## **YAŞ VƏ CİNS ÜZRƏ SAĞALMAZ XƏSTƏLİKLƏRİN AZƏRBAYCAN ƏHALİSİNİN DEMOQRAFİK GÖSTƏRİCİLƏRİNƏ TƏSİRİ**

**Quliyeva Nərmin Əbdüləli qızı, İsmayilzadə Ləman Etibar qızı**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*lemanismayilzade45@gmail.com*

**Xülasə:** Bu məqalədə yaş və cins üzrə sağalmaz xəstəliklərin Azərbaycan əhalisinin demoqrafik göstəricilərinə təsiri araşdırılmışdır. Sağalmaz xəstəliklərin yayılmasının ölüm səviyyəsinə, orta ömür uzunluğuna, əmək qabiliyyətli əhalinin sayına və sosial rifaha təsiri təhlil edilmişdir. Məqalədə həmçinin xəstəliklərin kişilər və qadınlar arasında fərqli xüsusiyyətləri, eləcə də yaş qrupları üzrə təsirləri göstərilmişdir. Problemin həlli istiqamətində profilaktik tədbirlərin, səhiyyə xidmətlərinin inkişafının və sağlam həyat tərzinin əhəmiyyəti qeyd olunmuşdur.

**Açar sözlər:** demoqrafiya, sağalmaz xəstəliklər, əhali, yaş amili, cins fərqləri, səhiyyə.

Demoqrafik göstəricilər hər bir ölkənin sosial və iqtisadi inkişaf səviyyəsini müəyyən edən əsas amillərdən biridir [1]. Əhalinin sayı, yaş tərkibi, doğum və ölüm səviyyəsi, orta ömür uzunluğu kimi göstəricilər cəmiyyətin inkişaf dinamikasını xarakterizə edir. Bu göstəricilərə təsir edən mühüm amillərdən biri də sağalmaz və xroniki xəstəliklərdir [2].

Müasir dövrdə ürək-damar xəstəlikləri, şəkərli diabet, onkoloji xəstəliklər və tənəffüs sistemi xəstəlikləri bütün dünyada olduğu kimi Azərbaycanda da geniş yayılmışdır [4]. Həmin xəstəliklər insanların həyat keyfiyyətini aşağı salmaqla yanaşı, ölüm hallarının artmasına və əmək qabiliyyətli əhalinin azalmasına səbəb olur. Xüsusilə yaş və cins amili xəstəliklərin yayılma səviyyəsinə və nəticələrinə ciddi təsir göstərir [5].

### **Sağalmaz xəstəliklərin yaş üzrə təsiri**

Yaş artdıqca insan orqanizmində fizioloji dəyişikliklər baş verir və immun sisteminin zəifləməsi nəticəsində müxtəlif xəstəliklərin yaranma riski artır [3]. Azərbaycanda yaşlı əhali arasında ürək-damar və şəkərli diabet xəstəlikləri daha geniş yayılmışdır [5]. Bu xəstəliklər ölüm göstəricilərinin yüksəlməsinə və orta ömür uzunluğunun dəyişməsinə səbəb olur.

Əmək qabiliyyətli yaşda olan insanların sağalmaz xəstəliklərə tutulması iqtisadi baxımdan da mənfi nəticələr yaradır. Uzunmüddətli müalicə və əmək qabiliyyətinin azalması ailələrin sosial rifahına təsir edir [2]. Bununla yanaşı dövlətin səhiyyə və sosial müdafiə xərcləri artır.

Uşaqlar arasında müşahidə olunan bəzi genetik və xroniki xəstəliklər də demoqrafik vəziyyətə təsir göstərir. Erkən yaşlarda yaranan sağlamlıq problemləri gələcəkdə əmək resurslarının azalmasına səbəb ola bilər.

### **Cins faktorunun təsiri**

Sağalmaz xəstəliklərin kişilər və qadınlar arasında yayılmasında müəyyən fərqlər mövcuddur. Kişilər arasında ürək-damar və ağciyər xəstəlikləri daha çox müşahidə edilir. Bunun əsas səbəbləri siqaret istifadəsi, stress, ağır iş şəraiti və qeyri-sağlam həyat tərzidir [3]. Kişilər arasında ölüm göstəricilərinin yüksək olması gender balansına mənfi təsir göstərir.

Qadınlar arasında isə hormonal və onkoloji xəstəliklər daha geniş yayılmışdır. Xüsusilə süd vəzi xərçəngi və şəkərli diabet qadın sağlamlığı üçün ciddi problemlər yaradır [4]. Bununla yanaşı qadınların orta ömür uzunluğu kişilərlə müqayisədə daha yüksəkdir.

Sağlamlıq problemləri qadınların reproduktiv sağlamlığına da təsir edir. Xroniki xəstəliklər bəzi hallarda doğum səviyyəsinin azalmasına və riskli hamiləlik hallarının artmasına səbəb olur. Bu isə əhalinin təbii artım tempinə təsir edən mühüm amillərdəndir [1].

### **Sosial və iqtisadi nəticələr**

Sağalmaz xəstəliklərin artması cəmiyyət üçün sosial və iqtisadi problemlər yaradır [2]. Müalicə xərclərinin yüksək olması ailələrin maddi vəziyyətinə təsir edir. Uzunmüddətli xəstəliklər psixoloji gərginlik yaradır və insanların həyat keyfiyyətini aşağı salır.

Əmək qabiliyyətli insanların xəstəlik səbəbindən iş fəaliyyətindən uzaqlaşması ölkənin iqtisadi inkişafına mənfi təsir göstərir. Dövlət büdcəsindən səhiyyə sahəsinə ayrılan vəsait artır və sosial müdafiə proqramlarına ehtiyac çoxalır [5].

Müalicə məqsədilə xarici ölkələrə müraciət edən insanların sayının artması da müəyyən iqtisadi problemlər yaradır. Bu proses həm maliyyə axınına, həm də sosial vəziyyətə təsir edir.

### **Nəticə**

Beləliklə, yaş və cins üzrə sağalmaz xəstəliklər Azərbaycanın demoqrafik göstəricilərinə ciddi təsir göstərən əsas amillərdən biridir. Bu xəstəliklər ölüm səviyyəsinin yüksəlməsinə, orta ömür uzunluğunun dəyişməsinə və əmək qabiliyyətli əhəlinin azalmasına səbəb olur [5].

Problemin qarşısının alınması üçün profilaktik tədbirlərin gücləndirilməsi, səhiyyə xidmətlərinin keyfiyyətinin artırılması və əhəlinin sağlam həyat tərzinə təşviq olunması vacibdir. Erkən diaqnostika və müasir tibbi xidmətlərin inkişafı xəstəliklərin mənfi təsirlərini azaltmağa kömək edə bilər [4].

### **Ədəbiyyat**

1. Ələkbərov Ə.Ə. Demoqrafiyanın əsasları. – Bakı: Elm, 2018, 320 s.
2. Həsənov R.H. Azərbaycan əhəlisinin sosial-demoqrafik inkişafı. – Bakı: Təhsil, 2020, 284 s.
3. Məmmədov A.M. Tibbi statistika və əhəli sağlamlığı. – Bakı: Universitet nəşriyyatı, 2019, 256 s.
4. Dünya Səhiyyə Təşkilatı. Qeyri-infeksion xəstəliklər üzrə hesabat. – Cenevrə, 2023.
5. Azərbaycan Respublikası Dövlət Statistika Komitəsi. Əhəlinin sağlamlıq göstəriciləri üzrə statistik məcmuə. – Bakı, 2024.

## HİBRİD ÜSULU İLƏ RUNQE-KUTTA ÜSULLARININ BİR MÜQAYİSƏSİ

**Quliyeva Arzu Murad qızı, Ocaqverdiyeva Aybəniz Məhəbbət qızı**

(BDU, Mexanika-riyaziyyat fakültəsi)

arzuquliyeva579@gmail.com, aybeniz0721@gmail.com

**Xülasə:** Məlumdur ki, adi diferensial tənliklər üçün Koşi məsələsinin ədədi həlli Eylər üsulunun köməyi ilə yerinə yetirilir. Bu üsulların müxtəlif modifikasiyaları tərtib edilmişdir. Ən çox istifadə olunan modifikasiyası Eylər üsulunun qeyri-aşkar formasıdır. Adətən bu üsul proqnoz-korreksiya formasında tərtib edilir.

**Açar sözlər:** hibrid üsul, çoxaddımlı üsul, ədədi üsul, Simpson üsulu, Runqe-Kutta üsulu.

Eylər üsulunun dəqiqliyini yüksəltmək məqsədi ilə hibrid üsullardan istifadə edirlər. Bu üsulların tanınmış nümayəndəsi aşağıdakı kimi yazıla bilər:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i + h/2, y_{i+1/2}). \quad (1)$$

Adətən bu üsul irəliyə qaçma üsulu kimi adlandırılır. Asanlıqla göstərmək olar ki, (1) düsturunda  $h$  kəmiyyətini  $2h$ -la əvəz etdikdə aşağıdakı üsulu almaq olar :

$$y_{i+2} = y_i + 2hf(x_{i+1}, y_{i+1}). \quad (2)$$

(2) üsulu Adams və ya çoxaddımlı üsulun xüsusi halı kimi qəbul oluna bilər. Qeyd edək ki, (2) üsulunun dəqiqliyi adətən  $O(h^2)$  ilə ölçülür. Beləliklə, alırıq ki, (1) və (2) üsullarının dəqiqliyi eynidir, lakin bu üsulların təqdimatları müxtəlifdir. Bu üsulun aşağıdakı müqayisəsinə baxaq:

$$y_{i+2} = y_i + h(f(x_{i+2}, y_{i+2}) + 4f(x_{i+1}, y_{i+1}) + f(x_i, y_i))/3. \quad (3)$$

Bu üsul tanınmış Simpson üsuludur. Yuxarıda qeyd olunmuş sxemə uyğun olaraq (3) üsulunu aşağıdakı kimi yazmaq olar :

$$y_{i+1} = y_i + h(f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 4f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) + f(x_i, y_i))/6. \quad (4)$$

(4) üsulu ilə (3) üsulunu müqayisə edərək, göstərmək olar ki, (1) və (4) üsulları arasında müəyyən əlaqə vardır. Belə ki, (1) və (4) üsullarında kəsir addımlı üsullardan istifadə olunmuşdur. Yuxarıda qeyd olunmuş üsullardan biri, yəni (3) üsulu çoxaddımlı üsuldur. (4) üsulu isə Simpson üsulunun modifikasiyasıdır. Beləliklə, aldığımız ki, (4) üsulu çoxaddımlı üsullar sinfinə aid olmadığı üçün yeni üsuldur.

Yuxarıda qeyd olunduğu kimi, hibrid üsullar adətən daha dəqiq olurlar (bax: [1]-[5]). Məsələn, aşağıdakı üsul

$$y_{n+1} = y_n + h(f_n + 3f_{n+2/3})$$

hibrid üsullar sinfinə aiddir.

Lakin



$$y_{n+1} = y_n + h(f_{n+1/2-\sqrt{3}/6} + f_{n+1/2+\sqrt{3}/6})$$

hibrid üsulu daha dəqiqdir. Belə ki, bu üsulun dəqiqliyi  $P = 4$ -dür. Qeyd edək ki, bu üsulda hibrid nöqtələrdən istifadə olunmuşdur. Bu hibrid nöqtələr aşağıdakı kimi yazıla bilər:

$$x_{n+1/2-\sqrt{3}/6}, x_{n+1/2+\sqrt{3}/6}$$

### **Ədəbiyyat**

1. G.Mehdiyeva, V.Ibrahimov, M.Imanova, On a calculation of definite integrals by using of the calculation of indefinite integrals, SN Applied Sciences 1 (11), 1489, 2019.
2. S.Deepa, A.Ganesh, V.Ibrahimov, S.S.Santra, V.Govindan, K.M.Khedher, Fractional fourier transform to stability analysis of fractional differential equations with prabhakar derivatives, Azerbaijan Journal of Mathematics 12 (2), 131-153, 2022.
3. M.Galina, I.Vagif, I.Mehriban, On the construction of the advanced Hybrid Methods and application to solving Volterra Integral Equation, WSEAS Transactions on Systems and Control 14, 183-189, 2019.
4. V.R.Ibrahimov, Convergence of predictor-corrector method, Godishnik na visshite uchebni zavendeniya, Prilozhno math, Sofiya, Bulgariya, 1984.
5. V.R.Ibrahimov, M.N.Imanova, Finite difference methods with improved properties and their application to solving some model problems, 2022 International Conference on Computational Science and Computational, 2023.

## **SÜNİ İNTELLEKTİN BİZNESDƏ TƏTBİQİ VƏ EFFEKTİVLİYİ**

**Quliyeva Nərmin Əbdüləli qızı, Rəhimzadə Şəms Mehman qızı**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*guliyeva.an@gmail.com, shamsragimzada@gmail.com*

**Xülasə:** Təqdim olunmuş tezisdə süni intellekt texnologiyalarının biznes proseslərinin optimallaşdırılmasında rolu və effektivliyə təsiri qısa şəkildə araşdırılmışdır. Müəyyən edilmişdir ki, süni intellektin tətbiqi proseslərin avtomatlaşdırılmasına, xərclərin azaldılmasına və qərar qəbuletmənin təkmilləşdirilməsinə imkan yaradır. Nəticə olaraq, bu texnologiyalar müəssisələrin ümumi effektivliyini artırır və onlara rəqəbat üstünlüyü qazandırır.

**Açar sözlər:** Süni intellekt, biznes prosesləri, optimallaşdırma, effektivlik.

Müasir dövrdə texnologiyanın sürətli inkişafı biznes mühitinə də ciddi təsir göstərmişdir. Xüsusilə süni intellekt (SI) texnologiyaları müəssisələrin fəaliyyətində mühüm rol oynamağa başlamışdır[1]. Süni intellekt məlumatların emalı, analiz edilməsi və qərar qəbuletmə proseslərinin avtomatlaşdırılması

baxımından geniş imkanlar yaradır [4].

Bu səbəbdən bir çox şirkətlər rəqabət qabiliyyətini artırmaq və bazarda mövqelərini möhkəmləndirmək üçün süni intellekt texnologiyalarından istifadə etməyə üstünlük verirlər [2]. Bu tezis məqsədi süni intellektin biznesdə tətbiq sahələrini və onun effektivliyə təsirini araşdırmaqdır.

Süni intellekt texnologiyaları biznesin müxtəlif sahələrində tətbiq olunur [1]. Ən geniş istifadə olunan sahələrdən biri müştəri xidmətləridir. Chatbotlar və virtual assistentlər vasitəsilə şirkətlər müştərilərə 24/7 xidmət göstərə bilər [4]. Bu isə həm müştəri məmnuniyyətini artırır, həm də işçi qüvvəsinə olan ehtiyacı azaldır.

Digər mühüm tətbiq sahəsi isə data analitikadır. Süni intellekt böyük həcmli məlumatları qısa müddətdə analiz edərək müəssisələrə daha düzgün qərarlar qəbul etməyə kömək edir [1]. Məsələn, satış proqnozlarının hazırlanması, bazar trendlərinin müəyyən edilməsi və risklərin qiymətləndirilməsi SI vasitəsilə daha dəqiq həyata keçirilir.

Bundan əlavə, süni intellekt logistika və istehsal sahəsində də geniş tətbiq olunur [3]. Avtomatlaşdırılmış sistemlər məhsul istehsalını sürətləndirir, səhvləri minimuma endirir və xərclərin azalmasına səbəb olur. Bu isə ümumi effektivliyin artmasına gətirib çıxarır [2].

Süni intellektin tətbiqi müəssisələrə rəqabət üstünlüyü qazandırır. Texnologiyadan istifadə edən şirkətlər bazar dəyişikliklərinə daha tez uyğunlaşır və innovativ həllər təqdim edə bilirlər [4]. Bununla yanaşı, SI tətbiqi müəyyən çətinliklər də yaradır. Bunlara yüksək maliyyə, texniki biliklərin çatışmazlığı və məlumat təhlükəsizliyi problemləri daxildir [2].

Aparılan araşdırmalar göstərir ki, süni intellekt texnologiyaları biznes fəaliyyətinin effektivliyinin artırılmasında mühüm rol oynayır [1]. O, proseslərin avtomatlaşdırılması, qərar qəbuletmənin təkmilləşdirilməsi və xərclərin azaldılması baxımından böyük üstünlüklər təqdim edir [4].

Nəticə olaraq demək olar ki, gələcəkdə süni intellekt texnologiyalarının biznesdə tətbiqi daha da genişlənəcək və bu sahədə uğur qazanmaq istəyən müəssisələr üçün vacib alətə çevriləcəkdir [3].

### **Ədəbiyyat**

1. Russell S., Norvig P. *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. Pearson Education, 2021.
2. Davenport T. H., Ronanki R. *Artificial Intelligence for the Real World* // Harvard Business Review, 2018.
3. Brynjolfsson E., McAfee A. *The Second Machine Age: Work, Progress, and Prosperity in a Time of Brilliant Technologies*. W. W. Norton & Company, 2014.
4. Marr B. *Artificial Intelligence in Practice*. Wiley, 2019.

## **EPİDEMIOLOJİ PROSESLƏRİN STOXAŞTİK MODELƏR ƏSASINDA STATİSTİK ANALİZİ VƏ EHTİMAL PROQNOZLAŞDIRILMASI**

**Qurbanov İsabab Əli oğlu, Abbasova Fəridə Alim qızı**

*(BDU, Mexanika-riyaziyyat fakültəsi)*

*abbasovaferide02@gmail.com*

**Xülasə:** *bu işdə yoluxucu xəstəliklərin yayılma dinamikası stoxastik modellər və-sitəsilə tədqiq edilmişdir. Deterministik modellərdən fərqli olaraq, burada yoluxma və sağalma prosesləri binomial paylanma qanunları ilə təsvir olunur. Ebola və Viç modelləri əsasında təsadüfi faktorların yayılma dinamikasına təsiri analiz olunmuşdur.*

**Açar sözlər:** *stoxastik model, binomial paylanma, Monte-Karlo metodu, epidemioloji proqnoz.*

Müasir epidemiologiyada xəstəliklərin yayılma dinamikasının tədqiqi zamanı determinist modellərlə yanaşı, real həyatdakı qeyri-müəyyənlikləri və təsadüfi faktorları nəzərə alan stoxastik (ehtimala əsaslanan) yanaşmalar xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. Klassik SIR modelləri prosesi kəsilməz və dəqiq müəyyən olunmuş tənliliklərlə təsvir etsə də, real populyasiyalarda fərdlər arasındakı təmaslar və infeksiyaların ötürülməsi stoxastik xarakter daşıyır.

Stoxastik populyasiya SIR-modellərinin və onların ümumiləşmələrinin qurulmasının ümumi ideyası onların determinist analoqları ilə eynidir: populyasiya qrupların məcmusu kimi nəzərdən keçirilir, hər bir qrupun daxilindəki fərdlər bir-birindən fərqlənməyən hesab olunur. Fərq fərdlərin qruplar arasındakı keçid qanunlarının təsvirində özünü biruzə verir. Riyazi aparat kimi stoxastik fərq tənlilikləri sistemləri, Markov zəncirləri, diskret və kəsilməz zamanlı təsadüfi proseslər (Qalton-Vatson prosesləri, doğum və ölüm prosesləri və s.) tətbiq olunur.

Determinist SIR-modellərindən fərqli olaraq, stoxastik imitasiya modellərində təsadüfi faktor düzgün nəzərə alınır. Eyni zamanda, stoxastik populyasiya modelləri analitik tədqiqat üçün analoji determinist modellərlə müqayisədə daha mürəkkəbdir. Tam analitik tədqiqat yalnız bəzi sadə model tipləri üçün mümkündür; ümumi halda qrupların say dinamikasını qiymətləndirmək üçün adətən Monte-Karlo metodlarından istifadə etməklə imitasiya modelləşdirilməsinə müraciət edirlər. SIR-modelləri bazasındakı imitasiya modelləri yüksək məhsuldarlığa malikdir, nəticədə onlar indiyə qədər proqram komplekslərində geniş tətbiq olunur.

Stoxastik populyasiya modellərində fərdlərin bir qrupdan digərinə

keçidi (məsələn, sağlamdan yoluxmuş) determinist modellərdə olduğu kimi sabit sürətdə deyil, müəyyən ehtimal qanunları ilə baş verir. Diskret zamanlı stoxastik modellərə ən xarakterik nümunə kimi Ebola qızdırmasının yayılma dinamikasını aşağıdakı formada SEIR-modeli verilir:

- $S(t+h) = S(t) - B(t),$
- $E(t+h) = E(t) + B(t) - C(t),$
- $I(t+h) = I(t) + C(t) - D(t),$
- $S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = N.$

Burada  $h$ -zaman addımıdır (modeldə bir gün kimi götürülür),  $B(t) \sim \text{Bin}(S(t), P(t)) - (t; t+h)$  zaman kəsiyində yoluxmuş həssas fərdlərin sayı,  $C(t) \sim \text{Bin}(I(t), p_R)$ - populyasiyadan kənarlaşdırılmış (sağalma və ya ölüm nəticəsində) fərdlərin sayıdır. Qeyd olunan üç təsadüfi kəmiyyətin paylanma parametrləri olan ehtimallar aşağıdakı düsturlarla təyin olunur:

$$P(t) = 1 - \exp\left(-\frac{\beta(t)}{N} I(t)h\right), \quad p_C = 1 - \exp(-gh), \quad p_R = 1 - \exp(-\gamma h)$$

Burada  $B(t)$  infeksiyaların ötürülmə intensivliyi əmsalı,  $1/g$  inkubasiya dövrünün orta müddəti və  $1/\gamma$  isə infeksiyon dövrün orta davamiyyətidir [1].

Qeyd olunan stoxastik SEIR modeli infeksiyanın yayılmasını ümumi populyasiya daxilində təsadüfi proses kimi xarakterizə etsə də, real həyatda yoluxma riskləri əhəlinin müxtəlif təbəqələri arasında qeyri-bərabər paylanır. Xüsusilə uzunmüddətli və sosial faktorlardan asılı olan xəstəliklərin dinamikasını araşdırmaq üçün populyasiyanın daxili strukturunu nəzərə alan daha mürəkkəb, çoxkomponentli modellərdən istifadə olunur.

Buna nümunə kimi VİÇ (AİDS) infeksiyasının yayılma modelini göstərmək olar. Bu modeldə əhali sosial adaptasiya dərəcəsinə və riskli davranış faktorlarına görə səkkiz fərqli qrupa bölünür:

- $A_1$  — sosial adaptasiya olunmuş, VİÇ-ə həssas olanlar;
- $A_2$  — patologiyanın inkişafı üzrə yüksək riskli olan həssas fərdlər;
- $A_3$  — xroniki alkoqolizmdən əziyyət çəkən həssas fərdlər;
- $A_4$  — müəyyən edilmiş narkotik asılılığı olan həssas fərdlər;
- $A_5$  — sosial adaptasiya olunmuş, VİÇ-ə yoluxmuşlar;
- $A_6$  — yüksək patologiya riskli olan VİÇ-ə yoluxmuşlar;
- $A_7$  — xroniki alkoqolizmi olan VİÇ-ə yoluxmuşlar;
- $A_8$  — narkotik asılılığı olan VİÇ-ə yoluxmuşlar.

Zaman vahidi bir sutka olaraq qəbul edilir [2].

Bu qruplar arasındakı dinamika aşağıdakı stoxastik fərq tənlikləri sistemi ilə təsvir edilir:

$$x_j(t) = \hat{x}_j(t) - \sum_k u_{jk}(t) + \sum_k u_{kj}(t) + f_j(t).$$

Burada  $u_{jk}(t)$  kəmiyyətləri  $(t-1; t]$  zaman kəsiyində qruplararası keçidləri ifadə edir və binomial/multinomial paylanma qanunlarına tabedir. Məsələn, sosial adaptasiya olunmuş fərdlərin yoluxma ehtimalı

$$\mu_{15}(t) = 1 - \prod_{j=5}^8 (1 - r_{ij})^{\hat{x}_j(t)}$$

düsturu ilə hesablanır [2].

Aparılan tədqiqat göstərir ki, deterministik SIR modellərindən fərqli olaraq, stoxastik yanaşma epidemioloji proseslərin ilkin mərhələlərindəki qeyri-müəyyənlikləri daha dəqiq əks etdirir. Monte-Karlo metodu ilə aparılan 100 reallaşma nəticəsində müəyyən edilmişdir ki, təsadüfi faktorlar epidemiyanın pik həddinə və sönmə müddətinə əhəmiyyətli dərəcədə təsir göstərir. Bu modellər praktiki olaraq risk qrupları üzrə daha etibarlı proqnozlar verməyə imkan verir.

#### Ədəbiyyat

1. Lekone P. E., Finkenstädt B. F. Statistical Inference in a Stochastic Epidemic SEIR Model with Control Intervention: Ebola as a Case Study // Biometrics. 2006. Vol. 62. P. 1170–1177.
2. Pertsev N. V., Leonenko V. N. Discrete stochastic model of HIV infection spread within a heterogeneous population // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling, 27:5 (2012), 459–477.

### YOLUXUCU XƏSTƏLİKLƏRİN YAYILMA DİNAMİKASININ SIR MODELİ ƏSASINDA ƏDƏDİ ANALİZİ VƏ PROQNOZLAŞDIRILMASI

**Qurbanov İsabab Əli oğlu, Abbasova Fəridə Alim qızı**

(BDU, Mexanika-riyaziyyat fakültəsi)

abbasovaferide02@gmail.com

**Xülasə:** bu işdə yoluxucu xəstəliklərin yayılma dinamikası SIR modeli vasitəsilə tədqiq edilir. Diferensial tənliklər əsasında infeksiyanın yayınma qanunauyğunluqları analiz olunur, əsas epidemioloji göstəricilər və proqnozlaşdırma imkanları müəyyən edilir.

**Açar sözlər:** SIR modeli, epidemiologiya, diferensial tənliklər, proqnozlaşdırma.

Hazırda elmi ədəbiyyatda yoluxucu xəstəliklərin epidemioloji modelləşdirmə məsələlərinə olan maraq xeyli artmaqdadır. Bu, populyasiyalara birbaşa

təsir göstərən yeni virus infeksiyaların ortaya çıxması və əsasən ölümlə nəticələnən təhlükəli vəba, qarayara və Ebola qızdırması kimi təhlükəli "köhnə" virus infeksiyalarının yenidən canlanması ilə əlaqədardır. SİR modeli – yoluxucu xəstəliklərin yayılma dinamikasını əks etdirən modeldir. Bu modelin əsas xüsusiyyəti əhalini qruplara bölməsidir. Hər bir qrupun eyni xüsusiyyətlərə malik olacağı gözlənilir və belə çıxır ki, SİR modeli modelə əsasən seqmentlərə ayrılmış üç qolu təmsil edir:

- Susceptible (Qavrayıcılar) – risk qrubunda olan və infeksiyaya yoluxa biləcək sağlam fərdlər;
- Infectious (Yoluxdurucular) – infeksiyaya yoluxmuş və xəstəlik daşıyıcısı olan fərdlər;
- Recovered (Sağalmışlar/ sıradan çıxmışlar)- xəstəliyə qarşı immunitet qazanaraq sağalmış, eləcə də vəfat etmiş " sıradan çıxmış" fərdlər.

"Qavrayıcılar" infeksiyaya yoluxmuş insanlarla qarşılıqlı təmasdan sonra yoluxucu xəstəliklərə qarşı ən həssas olan insan qrupuna aiddir. "Qavrayıcılar" infeksiyaya yoluxma anında artıq xəstə ola bilərlər və ya hər hansı xroniki xəstəliyə sahib ola bilərlər. "Yoluxmuşlar" qrubu isə xəstəliyə yoluxmuş insan qrubunu təmsil edir hansı ki, onlar infeksiyanı qavrayıcı insan qrubuna ötürə bilərlər və zaman keçdikcə sağala bilərlər. Sağalan xəstələr bu xəstəliyə qarşı immunitet qazanırlar və nəticədə bu xəstəliyə qarşı həssas olurlar [1].

SIR modeli hər qrupdakı insanların sayının zamanla necə dəyişdiyini təyin edən struktur model olub sayını adi diferensial tənliklərin köməyi ilə təsvir edir. SIR modelini təsvir edən model aşağıdakı kimidir:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta IS, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta IS - \gamma I, \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I.\end{aligned}\tag{1}$$

Burada təmas zamanı xəstəliyin ötürülmə sürətinə nəzarət edən parametr  $-\beta$ -dir. Bu parametr təmas ehtimalından və xəstəliyin ötürülmə ehtimalından asılıdır. Müəyyən dövr ərzində xəstəlikdən sağalma səviyyəsini ifadə edən parametr isə  $\gamma$  -dir. (1) tənliklər sisteminin başlanğıc şərtləri haqqında onu da qeyd etmək lazımdır ki, çox zaman populyasiyada başlanğıcda xəstəliyə qarşı immuniteti olan fərdlər olmur, yəni  $R(0)=0$ . (1) tənliklər sistemi eyni zamanda Kermak-Makkendrik tənliklər sistemi adlanır [2].

İnsanlar sağalan kimi həmin yoluxucu xəstəliyə qarşı immunitet qazanırlar. Buda o deməkdir ki, onlar yenidən xəstəliyə həssas olanlar kateqoriyasına daxil ola bilməzlər. SIR modeli xəstəliyin dövr müddətinin insan ömründən qısa

olduğunu fərz edir məhz buna görə də təbii ölüm və doğumun təsirini nəzərə almır Buradan  $\beta$  və  $\gamma$  kəmiyyətlərinin əhəmiyyətlərini anlamaq imkanı yaranır.

Əgər  $\gamma$  sağalma sürətini təsvi edən parametrdirsə hansı ki, xəstəliyin ilk simptomlarının görünməsindən tam sağalana qədər olan vaxtı ifadə edir, onda:

$$D = \frac{1}{\gamma}.$$

Əlavə olaraq qeyd edə bilərik ki, infeksiyanın yoluxma gücünü nəzərə alaraq xəstəliyin xarakterini qiymətləndirmək mümkündür. Bunu  $U_0 = \frac{\beta}{\gamma}$  kəmiyyəti ilə həyata keçirmək mümkündür. Bu kəmiyyət elmi ədəbiyyatda reproduksiya indeksi adlanır [1].  $U_0$  reproduksiya indeksi bir nəfərin yoluxdurduğu insanların orta sayıdır və onun artması bir başa pandemiyanın səviyyəsinə təsir göstərir. Həmçinin bu rəqəm ümumi immunitet həddinin (HIT) qiymətləndirilməsi üçün istifadə olunur. Əgər, ilkin yayılma dərəcəsi həssas (yoluxa bilən) insanların faizinə vurulduqda 1-ə bərabərdirsə, bu, sistemin balanslaşdırılmış vəziyyətdə olduğunu göstərir. Bu da müvafiq olaraq onu göstərir ki,  $U_0$  nə qədər böyükdürsə, epidemiyanın yayılmasında bir o qədər böyük disbalans yaranır. Əhalinin sayı sabit götürülür. Tutaq ki, artıq xəstələnmiş insanların sayı  $p$ -ə bərabərdir, o zaman sabit vəziyyət aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$U_0(1 - p) = 1 \rightarrow 1 - p = \frac{1}{U_0} \rightarrow p_c = 1 - \frac{1}{U_0}.$$

Burada  $p_c$  infeksiyon xəstəliklərinin dayandırılması üçün lazım olan ümumi immunitet həddi (HIT) deməkdir. İmmunitet həddinin artırılması və epidemiyanın qarşısının alınması, əhalinin peyvənd olunması ilə ümumi immunitet səviyyəsinin yüksəldilməsi ilə mümkündür [2].

SIR modeli ən sadə epidemiya modellərindən olduğu üçün çox sayda təkmilləşdirmə və modifikasiyalara malikdir. Məsələn, SIR-D tipli SIR modelinə nəzər salaq burada  $D$  parametri ayrıca qeyd olunur. SIR modelinin SIR-D-yə qədər mürəkkəbləşməsi o deməkdir ki, "Recovered" (sağalanlar) və "Death" (Ölənlər) dəyişənləri, yəni epidemiya sonrası sağalan resipientlər və ölənlər ayrıca nəzərdən keçirilir.

Epidemioloji modelləşdirmədə klassik SIR modeli fundamental hesab olunur. Digər modellərin əksəriyyəti isə ondan törəyərək daha mürəkkəb prosesləri əhatə edir:

- SIRS: Müvəqqəti immuniteti olan xəstəliklərin dinamikasını təsvir edən model (sağalan fərdlər zaman keçdikcə yenidən həssas olurlar);
- SEIR: İnkubasiya dövrü olan xəstəliklərin yayılmasını təsvir edən model;
- SIS: İmmunitet qazanılmayan xəstəliklərin yayılmasını təsvir edən model;

- MSEIR: Uşaqların ana bətnində qazandıqları immuniteti nəzərə alan model.

### Ədəbiyyat

1. Ризниченко Г.Ю. Математические модели в биофизике и экологии. М.–Ижевск, ИКИ, 2003.
2. Мищенко Е.Л, Петровская О.В., Мищенко А.М. и др. Интегрированные математические модели, описывающие сложные биологические процессы. Биофизика, 2017, т. 62, № 5, с. 949–968.

## BƏZİ İQTİSADİ MODELƏRDƏ İNTEQRALIN TƏTBİQİ

**Mahmudov Ziyabəddin Orucəli oğlu**

(LDU, Təbiyyat fakültəsi)

mahmudziya20@gmail.com

**Xülasə:** *Tədqiqat işində iqtisadi proseslərin kəsilməzlik xüsusiyyətləri fonunda integral hesabının tətbiq sahələri analiz edilir. Məqalədə marjinal göstəricilərdən aqreqat kəmiyyətlərə keçid, bazar rifahının ölçülməsi və gəlir bərabərsizliyinin riyazi modelləşdirilməsi məsələlərinə toxunulur. Tədqiqatın nəticəsi olaraq müəyyən edilmişdir ki, integrallama vasitəsilə əldə edilən kəmiyyət göstəriciləri iqtisadi qərarların qəbulunda yüksək dəqiqlik təmin edir.*

**Açar sözlər:** *Integral hesabı, Riyazi iqtisadiyyat, Marjinal analiz, İstehlakçı artığı, Lorens əyrisi.*

Müasir iqtisadi nəzəriyyədə dinamik proseslərin və kəsilməz dəyişənlərin analizi riyazi aparatın, xüsusilə də integral hesabının tətbiqini qaçılmaz edir. Diferensial hesabı dəyişənlərin anlıq dəyişmə sürətini (marjinal göstəriciləri) öyrəndiyi halda, integral hesabı bu dəyişikliklərin müəyyən zaman kəsiyində və ya istehsal həcmində yaratdığı ümumi effekti kəmiyyətcə ifadə etməyə imkan verir [1]. İqtisadi nəzəriyyədə hər hansı bir resursun və ya məhsulun marjinal dəyəri məlum olduqda, onun ümumi funksiyasını bərpa etmək üçün integrallama metodundan istifadə olunur. Bu yanaşma müəssisə daxilində xərclərin optimallaşdırılması üçün fundamental əhəmiyyət kəsb edir. Marjinal xərc (MC) funksiyası məlumdursa, ümumi xərc (TC) integrallama yolu ilə tapılır:  $TC = \int MC \, dQ$ .

Misal 1: Müəssisənin marjinal xərc funksiyası  $MC(Q)=20+2Q$  və sabit xərcləri (FC) 100 vahid olarsa, onda ümumi xərc funksiyası (TC) aşağıdakı kimi təyin olunacaq:



$$TC(Q) = \int (20 + 2Q) dQ = 20Q + Q^2 + C.$$

İqtisadi interpretasiyaya görə  $Q=0$  olduqda  $TC=FC$  şərti ödənildiyi üçün  $C=100$  olur. Beləliklə, ümumi xərc modelinin strukturu  $TC(Q)=Q^2+20Q+100$  kimi olacaq.

İqtisadi nəticə: bu model menecerlərə istehsalın müəyyən səviyyəsində ümumi xərcləri və mənfəəti proqnozlaşdırmağa imkan verir.

İnteqralın ən geniş tətbiqi bazar iştirakçılarının faydasını sahə hesabı ilə rəqəmsallaşdırmaqdır. Bazar tarazlığı şəraitində istehlakçı və istehsalçı mənfəətinin (artığının) hesablanması inteqralın həndəsi mənasına söykənir. Tələb əyrisi altındakı sahə istehlakçının ümumi faydalılığını, tarazlıq qiyməti ilə təklif əyrisi arasındakı sahə isə istehsalçının əlavə mənfəətini ifadə edir.

Misal 2. Bazarın tələb funksiyası  $P(Q)=120-Q^2$  və tarazlıq nöqtəsi  $Q_0=9$ ,  $P_0=39$  olarsa, istehlakçı artığı (CS) belə hesablanır:

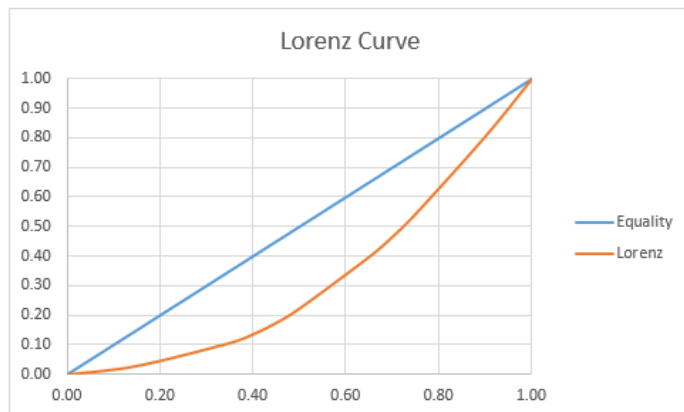
$$CS = \int_0^9 (120 - Q^2) dQ - 39 * 9$$

Həlli:

$$CS = [120Q - \frac{Q^3}{3}]_0^9 - 200 = (1080 - \frac{729}{3}) - 351 = (1080 - 243) - 351 = 837 - 351 = 486.$$

İqtisadi nəticə: istehlakçı artığının 486 manat olması o deməkdir ki, bu bazarda istehlakçılar malları özlərinin ödəməyə hazır olduqları maksimum qiymətdən daha ucuz aldıkları üçün bu qədər dəqiq gəlir (pul qənaəti) əld edəblər.

İnteqral hesabı həmçinin makroiqtisadi səviyyədə gəlirlərin paylanma bərabərsizliyini kəmiyyətcə ifadə etməyə imkan verir. Lorens əyrisi üzrə qurulmuş inteqral modelləri Cini əmsalının hesablanması üçün əsasdır.



Cini əmsalı gəlir bərabərsizliyinin ölçülməsində inteqralın ən geniş tətbiq sahələrindən biridir [2]. Cini əmsalının inteqral ifadəsi aşağıdakı kimidir:

Əgər  $L(x)$  gəlir paylanması Lorens funksiyasıdırsa, bərabərsizlik indeksi aşağıdakı düsturla müəyyən edilir [1]:

$$G = 1 - 2 \int_0^1 L(x) dx.$$

Bu model dövlətin vergi-büdcə siyasətinin cəmiyyətdəki gəlir bölgüsünə təsirini ölçmək üçün mühüm analitik alətdir.

Nəticə: Tədqiqat zamanı aydın olmuşdur ki, integral hesabı həm mikro, həm də makroiqtisadi səviyyədə strateji analizlərin aparılmasına imkan yaradır. Xüsusilə kəsilməz zaman və istehsal modellərində integrallama vasitəsilə əldə olunan nəticələr iqtisadi agentlərin davranışlarını və bazar səmərəliliyini dəyərləndirmək üçün zəruri elmi bazanı formalaşdırır.

### **Ədəbiyyat**

1. Alpha C. Chiang, Kevin Wainwright. "Fundamental Methods of Mathematical Economics", 4<sup>th</sup> Edition, McGraw-Hill Education, 2005. -444-460 c.
2. Knut Sydsaeter, Peter Hammond. "Essential Mathematics for Economic Analysis", 5<sup>th</sup> Edition, Pearson, 2016. -337-355 c.

## **ÜST QATI MÜXTƏLİF ELASTİK MATERIALDAN İBARƏT YARIMMÜSTƏVİDƏ NÖQTƏVİ İMPULS TƏSİRİNİN TƏDQIQI**

**Mahmudzadə Təhminə Mahmudağa qızı**

*(BDU, Mexanika-riyaziyyat fakültəsi)*

*tehminemahmudzade1996@gmail.com*

**Xülasə:** Müxtəlif elastik materialdan ibarət olan üst qata malik yarımüstəvi mühitə nöqtəvi impuls zərbəsinin təsiri məsələsi həll edilmişdir. Bu məsələ, məşhur Lemb məsələsinin daha mürəkkəb variantı olmaqla, zəlzələlərin daha dəqiq modelləşdirilməsi məqsədilə qoyulmuşdur. Məsələ analitik üsullarla tədqiq edilmiş və prosesin bütün dalğa və hərəkət formalarının yarandığı başlanğıc mərhələni təsvir edən həll alınmışdır. Əldə olunan nəticələr zəlzələləri müşayiət edən hadisələrin demək olar ki, hamısını yüksək dəqiqliklə xarakterizə edir.

**Açar sözlər:** qeyri-bircins yarımüstəvi, dalğa, zəlzələ, nöqtəvi zərbə, Lemb məsələsi.

Fərqli elastik materialdan hazırlanmış yarımüstəvinin səthində yerləşən elastik layın sərhədinə  $t = 0$  anında cəmlənmiş impuls qüvvəsinin təsir etdiyini fərz edək:

$$\sigma_{yy}(t, x, y) = -I\delta(x)\delta(t), \quad \sigma_{xy}^{(1)} = 0, \quad y = 0, \quad I = \text{const} \quad (1)$$

burada  $I$  – impuls qüvvəsidir.

Mühitin hərəkət tənlikləri, sərhəd və başlanğıc şərtləri  $\Phi$  və  $\Psi$  potensialları vasitəsilə aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu) \text{grad} \text{div} \vec{u} + \mu \Delta \vec{u} \\ \vec{u} &= \text{grad} \Phi + \text{rot}(\Psi \vec{e}_3) \\ \vec{u} &= \vec{u}(u_1, u_2) \end{aligned} \quad (2)$$

Hər bir mühit üçün potensial funksiyalar aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi^{(i)}}{\partial t^2} &= c_1^{(i)^2} \Delta \Phi^{(i)} \\ \frac{\partial^2 \Psi^{(i)}}{\partial t^2} &= c_2^{(i)^2} \Delta \Psi^{(i)} \end{aligned} \quad (3)$$

Uyğun olaraq sərhəd şərtləri aşağıdakı kimi götürülür:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 ; \quad \sigma_{yy}^{(1)} = \sigma_{yy}^{(2)}, \quad y = -b \\ v_1 &= v_2 ; \quad \sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)} \end{aligned} \quad (4)$$

Burada  $b$  – üst elastik layın qalınlığıdır.  $\Phi$  və  $\Psi$  potensial funksiyaları vasitəsilə yerdəyişmə vektorunun komponentləri üçün ifadələri qeyd edək:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (5)$$

Daha sonra bu tənliklər hər bir mühit üçün ayrıca yazılmış və onlara Furiye və Laplas integral çevirmələri tətbiq edilmişdir. Sonrakı mərhələdə sərhəd və başlanğıc şərtlərindən istifadə olunaraq altı məchullu xətti cəbri tənliklər sistemi əldə edilmiş, həmin sistemə uyğun altı rəngli determinant qurulmuşdur:

$$\|a_{ik}\| \times \begin{Bmatrix} A_1 \\ D_1 \\ B_1 \\ E_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Bu əmsalların daha sadə formada müəyyən edilməsi məqsədilə

$D(k)$ , ( $k=0, \dots, 6$ ) determinantlarına ilk dəfə [1] – də tətbiq edilmiş üsuldən istifadə etmək məqsədəuyğundur. Bu üsul ümumi həldən prosesin başlanğıc mərhələsinə uyğun hissənin daha dəqiq ayrılmasına imkan yaradır. Təsadüfi deyildir ki, həmin işdə alınmış həll zəlzələlər zamanı təbiətdə müşahidə olunan məlum eksperimental nəticələrlə tam uyğunluq təşkil etmişdir. Əmsallar müəyyən edildikdən sonra hər bir mühit üçün uyğun yerdəyişmə və sürət funksiyaları əldə edilmişdir. Bu ifadələrin alınması zamanı [2] – də təqdim olunan cədvəllərdə verilmiş Laplas çevirməsinin məlum tərs çevirmə üsullarından istifadə olunmuşdur. Sonrakı mərhələdə həmin kəmiyyətlər üçün zamanın müxtəlif anlarına uyğun olaraq prosesi tam xarakterizə edən qrafiklər qurulmuşdur.

### Ədəbiyyat

1. N. B. Rassoulova, M. B. Rassoulov. Investigation of Dynamic Processes in an Elastic Layer on the Surface of Compressible Fluid, Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vol 65(1), p.102-108, 2025
2. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. Integral transforms and operational calculus, Pergamon Press (International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics), 1965. 529 p.

## BİR DÖRDTƏRTİBLİ XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ TƏNLİK ÜÇÜN QEYRİ- LOKAL SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

**Mehdiyev Abbas Əli oğlu, Mustafayeva Günel Nizami qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

abbasmehdiyev@mail.ru, mustafayevaagunel@gmail.com

**Xülasə:** İşdə bir dördtərtibli xüsusi törəməli diferensial tənlik üçün qeyri-lokal sərhəd məsələsi tədqiq edilmişdir. Burada verilənlər üzərinə müəyyən şərtlər qoyulmaqla məsələnin həllinin varlığı və yeganəliyi haqqında teoremlər isbat olunmuşdur.

**Açar sözlər:** xüsusi törəməli diferensial tənliklər, Neyman şərti, integral şərti, qeyri-lokal sərhəd məsələsi.

Tutaq ki,  $Q_T = \{(x, t): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$  düzbucaqlısı verilmişdir. Bu düzbucaqlıya uyğun

$$\varepsilon^2 u_{tttt}(x, t) - u_{ttxx}(x, t) + u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = f(x, t) \quad (1)$$

tənliyi verilmişdir[1].

Fərz edək ki, bu tənliyin həlli

$$\begin{aligned} u(x, 0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_{tt}(x, 0) = \varphi_2(x), \\ u_{ttt}(x, 0) = \varphi_3(x) \quad (0 \leq x \leq 1) \end{aligned} \quad (2)$$

başlangıç şərtlərini,

$$u_x(0, t) = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (3)$$

Neyman sərhəd şərtini və

$$\int_0^1 u(x, t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T) \quad (4)$$

birinci növ integral şərtini ödəyir, burada  $0 < \varepsilon \leq 1$  - qeyd olunmuş ədəd,  $f(x, t)$ ,  $\varphi_i(x)$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) verilmiş funksiyalar,  $u(x, t)$  isə axtarılan funksiyadır.

**Tərif.** (1) tənliyinə daxil olan törəmələri ilə birlikdə kəsilməz olan (1) tənliyini, (2)-(4) şərtlərini adi mənada ödəyən  $u(x, t)$  funksiyasına (1)-(4) məsələsinin klassik həlli deyilir.

**Teorem.** Tutaq ki, (1)-(4) məsələsinin verilənləri aşağıdakı şərtləri ödəyirlər:

1.  $\varphi_i(x) \in C^2[0, 1]$ ,  $\varphi_i'''(x) \in L_2(0, 1)$ ,  $\varphi_i'(0) = \varphi_i'(1) = 0$ ,  
 $\int_0^1 \varphi_i(x) dx = 0 \quad (i = 0, 1, 2).$
2.  $\varphi_3(x) \in C^1[0, 1]$ ,  $\varphi_3''(2) \in L_2(0, 1)$ ,  $\varphi_3'(0) = \varphi_3'(1) = 0$ ,  
 $\int_0^1 \varphi_3(x) dx = 0$
3.  $f(x, t)$ ,  $f_x(x, t) \in C(D_T)$ ,  $f_{xx}(x, t) \in L_2(Q_T)$ ,  
 $f_x(0, t) = f_x(1, t) = 0$ ,  $\int_0^1 f(x, t) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T),$

onda (1)-(4) məsələsinin yeganə klassik həlli var.

#### Ədəbiyyat

1. Габов С.А., Оразов Б.Б., Свешников А.Т. Об одном эволюционном уравнении четвёртого порядка, возникающем в гидроакустике стратифицированной жидкости. Дифференциальные уравнения. 1986 г. 22, N1. С. 19-25.

## BANK SİSTEMİNDƏ API TƏHLÜKƏSİZLİYİN TƏMİN OLUNMASI

**Mehdiyev Hicran Bahadır oğlu, Həsənova Zivər İlham qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

hicranmehdiyev61@gmail.com, ziver.hesenova.2020@gmail.com

**Xülasə:** Müasir dövrdə API-lər servislərarası kommunikasiyanın qurulmasında mühüm rol oynayan əsas texnologiyalardan biridir. Bununla yanaşı, bu interfeyslər vasitəsilə həssas məlumatların ötürülməsi müxtəlif təhlükəsizlik risklərinin artmasına səbəb ola bilər. Bu səbəbdən API-lərin tətbiqi zamanı təhlükəsizlik tələbləri nəzərə alınmalı,

*autentifikasiya və avtorizasiya mexanizmləri tətbiq edilməli, həmçinin məlumatların qorunması üçün uyğun yanaşmalar seçilməlidir.*

**Açar sözlər:** *API, təhlükəsizlik, mikroservis, autentifikasiya, avtorizasiya.*

Müasir bank sistemlərində API-lər müxtəlif xidmətlər və mikroservislər arasında məlumat mübadiləsinin təmin olunmasında əsas rol oynayır. Bu interfeyslər vasitəsilə maliyyə əməliyyatlarının icrası və istifadəçi sorğularının emalı kimi bir sıra əməliyyatlar həyata keçirildiyi üçün onların təhlükəsizliyi xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. API-lərin düzgün qorunmaması məlumat sızması, icazəsiz giriş və sistemin normal fəaliyyətinin pozulması kimi ciddi risklərə səbəb ola bilər. Bu səbəbdən bank sistemlərində API-lərin istifadəsi zamanı təhlükəsizlik məsələlərinə xüsusi diqqət yetirilməlidir.

Adətən, API təhlükəsizliyinin təmin olunması məqsədilə istifadəçinin sistemə daxil olub-olmadığını müəyyən etmək üçün autentifikasiya mexanizmi tətbiq olunur. Bu proses istifadəçinin login məlumatlarını daxil etməsi ilə başlayır və uğurlu autentifikasiyadan sonra istifadəçiyə token verilir. Token əsaslı yanaşmalardan ən çox istifadə olunanı JWT (JSON Web Token)-dir. Bu yanaşmada istifadəçi hər sorğu göndərərkən həmin token də əlavə edilir. Sistem bu token vasitəsilə istifadəçinin kimliyini yoxlayır və ona uyğun icazə verir [2].

Təhlükəsizliyin təmin edilməsinin digər bir mexanizm isə avtorizasiya-dır. Autentifikasiyadan fərqli olaraq avtorizasiya mexanizmi istifadəçinin sistem daxilində hansı əməliyyatları yerinə yetirə biləcəyini müəyyən edir. Yəni bu mərhələdə "istifadəçi nə edə bilər?" sualına cavab verilir. Bank sistemlərində bu məqsədlə adətən rol əsaslı giriş nəzarəti (RBAC) yanaşmasından istifadə olunur. Bu yanaşmada istifadəçilərə müxtəlif rollar təyin edilir və hər rol üçün fərqli icazələr müəyyən olunur. Nəticədə bəzi API endpoint-ləri bütün istifadəçilər üçün açıq ola bildiyi halda, bəzilərinə isə yalnız müəyyən rola malik istifadəçilər daxil ola bilər [1].

Mikroservis arxitekturasına əsaslanan bank sistemlərində hər bir servise ayrı-ayrılıqda müraciət edilməsi sistemin idarə olunmasını və təhlükəsizliyini çətinləşdirə bilər. Bu səbəbdən API Gateway komponentindən istifadə olunur. API Gateway müştəri tərəfindən göndərilən bütün sorğular üçün vahid giriş nöqtəsi rolunu oynayır və həmin sorğuları uyğun mikroservislərə yönləndirir. Eyni zamanda autentifikasiya və avtorizasiya yoxlamaları, sorğuların yönləndirilməsi, limitlərin tətbiqi və loglamanın aparılması kimi funksiyaları da öz üzərində cəmləşdirir. Bu yanaşma sistemin həm təhlükəsizliyini, həm də idarəolunma rahatlığını artırır. Nəticədə həm sistemin təhlükəsizliyi artır, həm də arxitektura daha sadə və idarəolunan olur [2].

Bank sistemlərində API-lərə qısa zaman intervalında həddindən artıq sayda sorğu göndərilməsi sistem resurslarının tükənməsinə və xidmət keyfiyyətinin aşağı düşməsinə səbəb ola bilər. Bu problemin qarşısını almaq məqsədilə rate limiting mexanizmi tətbiq olunur. Bu mexanizm istifadəçi və ya IP ünvanı üzrə müəyyən zaman ərzində icazə verilən sorğu sayını məhdudlaşdırır. Təyin olunmuş limitin aşılması hallarında sorğular ya rədd edilir, ya da müəyyən müddət gecikdirilərək emal olunur. Bu yanaşma sistemin stabil fəaliyyət göstərməsini və DDoS kimi hücumlara qarşı əlavə müdafiəni təmin edir [1].

API vasitəsilə ötürülən məlumatların qorunması ən vacib təhlükəsizlik tələblərindən biridir. Bu məqsədlə məlumatların ötürülməsi zamanı HTTPS (SSL/TLS) protokolundan istifadə olunur ki, bu da məlumatların şifrələnmiş formada ötürülməsini təmin edir. Beləliklə, məlumatların üçüncü şəxslər tərəfindən ələ keçirilməsi və ya dəyişdirilməsi riskinin qarşısı alınır.

Nəticə olaraq, bank sistemlərində API təhlükəsizliyi kritik əhəmiyyət daşıyan əsas komponentlərdən biridir. Bu məqsədlə autentifikasiya və avtorizasiya mexanizmləri, həmçinin API Gateway, rate limiting və məlumatların qorunması kimi təhlükəsizlik yanaşmaları birgə şəkildə tətbiq edilməlidir. Yalnız bu mexanizmlərin kompleks şəkildə işləməsi nəticəsində bank sistemlərində təhlükəsiz, stabil və etibarlı API infrastrukturunu təmin oluna bilər.

### **Ədəbiyyat**

1. Madden, N. (2020). *API Security in Action*.
2. Siriwardena, P. & Dias, N. (2020). *Microservice security in Action*.

## **BANK SİSTEMİNDƏ TƏTBİQ OLUNAN SİSTEM ARXİTEKTURASI**

**Mehdiyev Hicran Bahadır oğlu, Həsənova Zivər İlham qızı**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*hicranmehdiyev61@gmail.com, ziver.hesenova.2020@gmail.com*

**Xülasə:** Müasir dünyamızda bank sistemlərində demək olar ki, ənənəvi şəkildə həyata keçirilən bütün əməliyyatları artıq rəqəmsal formada, onlayn bank sistemləri vasitəsilə yerinə yetirmək mümkündür. Bu isə öz növbəsində yüksək təhlükəsizlik, böyük həcmli məlumat axını və real vaxtda emal olunan əməliyyatlar deməkdir. Ona görə də bu cür mürəkkəb infrastrukturun idarə olunması üçün dayanıqlı bir arxitektura tələb olunur. Təqdim olunan işdə bank sistemlərində tətbiq olunan sistem arxitekturası və onun əsas komponentləri araşdırılmışdır.

**Açar sözlər:** arxitektura, mikroservis, verilənlər bazası, sistem dizaynı, balanslaşdırma.

Müasir dövrdə bank xidmətlərinin geniş müştəri kütləsi üçün əltaçan olmasında onlayn bank sistemlərinin müstəsna rolu var. Onlayn bank sisteminin əsas məqsədi istifadəçilərə hesabların idarəsi, əməliyyatların müntəzəm və operativ həyata keçirilməsi, tranzaksiya tarixçəsinin izlənməsi və başqa bir çox imkanları təmin etməkdir. Bu funksional tələblər sistemin dizayn zamanı əsas istiqamətləri müəyyən edir və sistem arxitekturasının qurulmasına kömək edir.

Bank sistemlərində əsasən mikroservis arxitekturasından istifadə olunur. Bu yanaşmada mürəkkəb bir sistemi kiçik, müstəqil işləyə bilən servislərə bölünür. Hər mikroservis müəyyən biznes məntiqini icra edir və digər servislərdən asılı olmayaraq inkişaf etdirilə bilər. Servislərin müstəqilliyi sayəsində sistemə yeni tələblər əlavə olunduqda və ya mövcud funksionallıq dəyişdirilməsinə ehtiyac yarandıqda, həmin servisdə edilən dəyişikliklər digər servislərin işinə təsir etmir[1].

Servislərin hər biri müəyyən bir funksionallığı icra etdiyinə görə, bəzi hallarda bir servis hər hansı bir əməliyyat üçün digər servisdən məlumat əldə etməlidir. Bu proses servislər arasında standart interfeyslər vasitəsilə həyata keçirilir. Servislər bir-biri ilə API-lar (Application Programming Interface) və mesaj broker-lər vasitəsilə əlaqə qurur.

Onlayn bank sisteminə verilənlər bazasının strukturunun düzgünlüyü çox vacibdir. Bank əməliyyatları real vaxtda emal olunduğu və maliyyə məlumatları əhəmiyyətli olduğu üçün verilənlər bazasının düzgün dizayn olunması sistemin ümumi işinə birbaşa təsir edir. Bu səbəbdən bank sistemlərində adətən güclü, genişlənə bilən və ACID prinsiplərinə uyğun işləyən verilənlər bazaları istifadə olunur [2].

Bank sistemlərində ən çox tətbiq olunan yanaşmalardan biri əlaqəli verilənlər bazası modelidir. Bu model verilənlərin cədvəl strukturu şəklində saxlanılmasını və cədvəllər arasında müəyyən açar sahələr vasitəsilə əlaqələrin qurulmasını təmin edir. Məlumatların daha sürətli əldə olunmasını təmin etmək üçün indekslərdən istifadə edilir. Xüsusilə tez-tez sorğu göndərilən sahələrdə indekslərin düzgün qurulması sistemin cavabvermə sürətini artırır [2].

İstifadəçi sorğularının və əməliyyatlarının səmərəli şəkildə idarə olunmasında miqyaslanmanın rolu böyükdür. Sistemə daxil olan sorğuların sayı artdıqda, tək bir serverin bütün iş yükünü qarşılaması çətinləşir və nəticədə performansın aşağı düşməsi müşahidə oluna bilər. Bu kimi halların qarşısını almaq və sistemin fasiləsiz fəaliyyətini təmin etmək üçün bank sistemlərində əsasən horizontal miqyaslandırmadan istifadə olunur. Bu yanaşma əlavə serverlərin sistemə qoşulması ilə yükün bir neçə server arasında bölünməsinə imkan yaradır və beləliklə, sistemin ümumi sabitliyini təmin edir[1].



Sistemin dayanıqlı və fasiləsiz işləməsini təmin edən vacib yanaşmalardan biri də iş yükünün balanslaşdırılması (load balancing) mexanizmidir. Balanslaşdırmanın əsas məqsədi sistemə daxil olan sorğuların bir serverdə toplanaraq həddindən artıq yüklənməsinin qarşısını almaqdır. Balanslaşdırma mexanizmi həmin sorğuları avtomatik olaraq digər serverlər arasında bölüşdürür və iş yükü bərabər şəkildə paylaşdırılır. Balanslaşdırma mexanizmi müxtəlif amillərə, serverlərin resurs göstəricilərinə, qəbul etdikləri sorğuların sayına və digər parametrlərə əsasən qurulur. Bu amillərin seçimi sistemin axtekturasını quran şəxsin müəyyən etdiyi strategiyadan asılıdır. Bununla yanaşı serverlərdən biri hər hansı nasazlığa görə sıradan çıxarsa, sorğular avtomatik olaraq işlək vəziyyətdə olan digər serverlərə yönləndirir.[1].

Nəticə etibarilə, müasir bank sistemlərində arxitekturanın qurulması real vaxtda əməliyyatların icrası, sistemin miqyaslanma bilməsi və verilənlər bazasının səmərəli idarə olunması kimi əsas amillər nəzərə alınaraq həyata keçirilir. Bu sistemlərin effektiv işləməsi üçün mikroservis yanaşması, düzgün verilənlər bazası dizaynı, miqyaslanma bilən infrastruktur və yükün balanslaşdırılması kimi əsas prinsiplər mühüm rol oynayır.

### **Ədəbiyyat**

1. Richardson, C. (2018). *Microservices Patterns: With examples in Java*,
2. Silberschatz, A., Korth, H. F., & Sudarshan, S. (2019). *Database System Concepts* (7th ed.). McGraw-Hill.

## **MÜASİR TEXNOLOGİYALARIN TƏTBİQİ İLƏ LAYİHƏLƏRDƏ RİSK İDARƏETMƏSİNİN EFFEKTİVLİYİNİN ARTIRILMASI**

**Məmmədov İsmayıl Nəsrullah oğlu**

*(Azərbaycan Memarlıq və İnşaat Universiteti)*

*ismayilm648@gmail.com*

**Xülasə:** Aparılan təhlil sübut edir ki, layihələrin risk idarəetməsi uğur göstəricilərini əhəmiyyətli dərəcədə təsir edir və ənənəvi yanaşmalar təkbəşinə bu problemi həll etmir. PMI-nin statistik hesabatlarına əsasən, layihələrin cəmi təxminən 48%-i tam uğurlu hesab olunur; bu isə risklərin effektiv idarə olunmasının hələ də zəif olduğunu göstərir. Texnologiya əsaslı risk idarəetmə vasitələri: bulud platformaları, AI-proqnozlaşdırma sistemləri və real-time monitoring layihə performansını yüksəltmək üçün real nəticələr verir. Dinamik risk prioritetləşdirmə yanaşması risklərin layihə müddətində davamlı olaraq yenidən qiymətləndirilməsinə əsaslanaraq daha çevik və real vəziyyətə uyğun idarə-

*etmə imkanı yaradır.*

**Açar sözlər:** *Layihə idarəetməsi, risk idarəetməsi, texnologiya tətbiqi, süni intellekt, bulud əsaslı sistemlər, real-time monitoring, hibrid model, layihə performans, statistik analiz, beynəlxalq standartlar, uğurlu layihələr, büdcə və vaxt idarəetməsi.*

Müasir müəssisələrdə layihələrin uğurla tamamlanması yalnız planlaşdırma və resursların bölünməsindən asılı deyil; eyni zamanda risklərin vaxtında aşkarlanması və idarə olunması əsas rol oynayır. Ən son qlobal tədqiqatlar göstərir ki, layihələr uğur baxımından hələ də ciddi problemlərlə üzləşir.

Tədqiqatlar göstərir ki, strukturlaşdırılmış layihə idarəetməsi tətbiq edən təşkilatlarda layihələr ən azı 28% daha yüksək faizlə vaxtında və büdcədə tamamlanır. Bu təşkilatlarda layihələrin biznes nəticələrinə nail olma göstəricisi 90%-ə qədər yüksəlir, halbuki aşağı idarəetmə səviyyəsində bu göstərici təxminən 34% təşkil edir [1].

Digər statistik məlumatlara əsasən layihələrin əhəmiyyətli hissəsi məqsədlərinə çatmır və uğursuzluğun əsas səbəblərindən biri qeyri-müəyyən planlaşdırma (~37%). Bu isə strukturlaşdırılmış yanaşmanın real və ölçülə bilən üstünlüklər yaratdığını göstərir.

Layihə idarəetmə sahəsində risklərin düzgün müəyyənləşdirilməsi və idarə olunması, xüsusilə texnologiyanın tətbiqi ilə həyata keçirilən yanaşmalar nəticələrə birbaşa təsir edir. Müasir texnoloji alətlər — bulud əsaslı sistemlər, süni intellekt və real-time monitoring — risklərin daha operativ və dəqiq idarə olunmasına imkan verir. Ənənəvi risk idarəetmə metodları (SWOT analizi, risk qeydiyyatı və manual monitoring) bəzi hallarda kifayət etmir və təhlil müddətini uzadır. Bu texnoloji alətlərin tətbiqi layihə performansına müsbət təsir göstərdiyi müxtəlif araşdırmalarda qeyd olunur. Məsələn, strukturlu layihə idarəetmə yanaşmalarından istifadə edən təşkilatlar layihələrini **2.5 dəfə daha uğurla tamamlaya bilirlər**. [2].

Project Management Institute-nin hesabatlarına görə layihələrin yalnız 48%-i tam uğurlu, 40%-i qismən uğurlu, 12%-i isə uğursuz olur. Bu göstəricilər risklərin hələ də effektiv idarə olunmadığını və daha müasir yanaşmalara ehtiyac olduğunu sübut edir [3].

Bu baxımdan tədqiqatda "dinamik risk prioritetləşdirmə yanaşması" təklif olunur. Bu yanaşma risklərin yalnız ilkin mərhələdə deyil, layihənin bütün mərhələləri üzrə real vaxt rejimində yenidən qiymətləndirilməsini nəzərdə tutur.

Ənənəvi metodlardan fərqli olaraq .

- risklərin prioriteti layihə göstəricilərinə əsasən dəyişir
- real vaxt məlumatlarına əsasən yenilənir

- risk reaksiyaları adaptiv şəkildə formalaşdırılır

Bu yanaşmanın tətbiqi nəticəsində risklərin erkən aşkarlanması, resursların daha səmərəli bölüşdürülməsi və layihənin ümumi uğur ehtimalının artırılması mümkün olur.

Risk idarəetməsi və texnologiya tətbiqi layihə komandalarına riskləri daha tez aşkarlamaq və real vaxt şəraitində qərar qəbul etmək imkanı verir. Məsələn:

- **PMI** hesabatlarında göstərilir ki, layihələrdə qabaqcıl risk idarəetmə vasitələri istifadə edən təşkilatlarda **layihələrin vaxtında və büdcədə tamamlanma səviyyəsi daha yüksəkdir**.
- Ənənəvi risk idarəetmə modellərinə nisbətən bu texnologiyalar **risk reaksiyalarının vaxtını xeyli azaldır**, çünki onlar real məlumatlardan proqnozlar çıxara bilir.

Təklif olunan dinamik risk prioritetləşdirmə yanaşması risklərin layihə müddətində davamlı olaraq yenidən qiymətləndirilməsinə əsaslanaraq daha çevik və real vəziyyətə uyğun idarəetmə imkanı yaradır. Bu yanaşma risklərin vaxtında aşkarlanmasını, resursların daha səmərəli bölüşdürülməsini və qərarvermə prosesinin operativliyini təmin edir. Nəticə etibarilə, bu model layihələrin uğur ehtimalını artırmaqla yanaşı, risk idarəetməsində daha effektiv və praktik mexanizm kimi çıxış edir.

#### **Ədəbiyyat**

1. Project Management Institute PMI Pulse of the Profession In-Depth Report Project Management Institute June 13, 2024
2. Top 50 Project Management Statistics For 2026
3. Project Management Institute Project Success Step Up: Redefining the Path to Project Success With M.O.R.E. December 14, 2025

### **BEYNƏLXALQ STANDARTLAR ƏSASINDA LAYİHƏ İDARƏETMƏ SİSTEMLƏRİNİN STRUKTURUNUN TƏHLİLİ**

**Məmmədov İsmayıl Nəsrullah oğlu**

*(Azərbaycan Memarlıq və İnşaat Universiteti)*

*ismayilm648@gmail.com*

**Xülasə:** Bu işdə beynəlxalq layihə idarəetmə standartlarının (PMBOK Guide, PRINCE2 və ISO 21500) müəssisələrdə tətbiqi təhlil edilmiş və onların effektivliyinin müqayisəli qiymətləndirilməsi aparılmışdır. Tədqiqat nəticəsində müəyyən edilmişdir ki, standartların ayrı-ayrılıqda tətbiqi bütün layihələr üçün optimal nəticə vermir. Bu

səbəbdən müxtəlif yanaşmaların əsas elementlərini birləşdirən hibrid model təklif edilmiş və onun layihələrin vaxt, xərc və keyfiyyət göstəricilərinə müsbət təsiri əsaslandırılmışdır

**Açar sözlər:** layihə idarəetməsi, beynəlxalq standartlar, PMBOK Guide, PRINCE2, ISO 21500, layihə uğuru, risklərin idarə olunması, resursların idarə olunması, integrasiya.

Müasir müəssisələrdə layihələrin uğurla həyata keçirilməsi yalnız texniki resurslardan deyil, həm də effektiv idarəetmə yanaşmalarından asılıdır. Qlobal təcrübədə layihə idarəetmə sistemlərinin formalaşdırılması üçün müxtəlif beynəlxalq standartlar tətbiq olunur. Bu standartlar arasında PMBOK Guide, PRINCE2 və ISO 21500 xüsusi yer tutur və layihələrin planlaşdırılması, icrası və nəzarəti üçün sistemli yanaşma təqdim edir. Bununla belə, praktikada layihələrin əhəmiyyətli hissəsi planlaşdırılan nəticələrə tam şəkildə nail ola bilmir. Bu səbəbdən beynəlxalq standartların tətbiqinin effektivliyinin təhlili və onların integrasiyası məsələsi aktualdır.

### **Beynəlxalq standartların müqayisəli təhlili**

| <b>Kriteriya</b> | <b>PMBOK</b>                           | <b>PRINCE2</b>               | <b>ISO 21500</b>                  |
|------------------|----------------------------------------|------------------------------|-----------------------------------|
| Yanaşma          | Proses əsaslı                          | Mərhələ əsaslı               | Prinsip və çərçivə əsaslı         |
| Elastiklik       | Yüksək                                 | Orta                         | Yüksək                            |
| İdarəetmə        | Detallı                                | Strukturlaşdırılmış          | Ümumi                             |
| Tətbiq sahəsi    | Universal                              | Böyük layihələr              | Standartlaşdırma                  |
| Struktur         | 5 proses qrupu, 10 bilik sahəsi        | 7 prinsip, 7 mövzu, 7 proses | Ümumi idarəetmə çərçivəsi         |
| Tətbiq sahəsi    | Universal                              | Böyük və kompleks layihələr  | Universal tətbiq və uyğunlaşdırma |
| Üstünlüklər      | Dərin metodologiya və risk idarəetməsi | Aydın mərhələli nəzarət      | Universal uyğunlaşma              |
| Zəif tərəflər    | Tətbiqi mürəkkəb ola bilər             | Çeviklik nisbətən azdır      | Detallaşma zəifdir                |

Aparılan müqayisə göstərir ki, PMBOK Guide proseslərin detallı idarə olunmasını təmin edir və risklərin təhlilində effektivdir. PRINCE2 metodologiyası layihələrin mərhələlər üzrə strukturlaşdırılmasına imkan yaradır və nəzarət mexanizmlərini gücləndirir. ISO 21500 isə bu yanaşmalar üçün ümumi çərçivə rolunu oynayaraq onların uyğunlaşdırılmasını asanlaşdırır. Bu fərqlər onların integrasiya olunaraq tətbiq edilməsini məqsədəuyğun edir.

Beynəlxalq tədqiqatlar göstərir ki, layihə idarəetmə metodlarının düzgün tətbiqi layihələrin uğur göstəricilərinə birbaşa təsir edir. Project Management Institute tərəfindən aparılan araşdırmalara əsasən layihələrin yalnız təxminən

48%-i tam uğurlu hesab olunur [1].

Wellingtone təşkilatının hesabatına görə layihələrin 35%-i büdcə aşımı, 39%-i isə vaxt gecikməsi ilə tamamlanır. Bu göstəricilər layihə idarəetmə sistemlərinin təkmilləşdirilməsinin vacibliyini sübut edir [2].

PMBOK Guide layihə idarəetməsini əsas məhdudiyyətlər balansı üzərində quraraq sistemli yanaşma təqdim edir. Lakin tədqiqatlar göstərir ki, bu standart praktik tətbiqdə əlavə uyğunlaşdırma tələb edir.

PRINCE2 metodologiyası layihələri mərhələlərə bölərək idarəetmə nəzarətini gücləndirir, lakin sərt strukturu səbəbindən çevikliyi məhduddur. ISO 21500 isə ümumi konseptual çərçivə təqdim edir, lakin praktik tətbiq üçün kifayət qədər detallı mexanizmlər təqdim etmir.

Statistik araşdırmalar göstərir ki, strukturlaşdırılmış yanaşma layihələrin nəticələrinə birbaşa təsir edir. Məsələn, Project Management Institute tərəfindən aparılan araşdırmaya görə layihələrin yalnız düzgün icra və nəticə verdiyi hallarda yüksək uğur göstəricisinə çatdığı müəyyən edilmişdir (təxminən 64–74%) [3].

Digər tədqiqatlara əsasən isə yaxşı idarə olunan layihələr orta hesabla 18% daha az xərclə yekunlaşır və 8–10% daha sürətli icra olunur [4].

Müqayisəli təhlil göstərir ki, mövcud beynəlxalq standartların hər biri müəyyən üstünlüklərə malik olsa da, onların heç biri bütün uğur faktorlarını tam əhatə etmir.

- PMBOK Guide → geniş metodologiya, lakin elastiklik zəif
- PRINCE2 → güclü idarəetmə nəzarəti, lakin çeviklik aşağı
- ISO 21500 → universal çərçivə, lakin dərinlik az

Bu səbəbdən standartların ayrı-ayrılıqda tətbiqi maksimal effektivlik təmin etmir.

Bu işdə inteqrasiya olunmuş hibrid layihə idarəetmə modeli təklif olunur. Modeldə PMBOK əsasında planlaşdırma və risklərin idarə olunması, PRINCE2 üzrə mərhələli idarəetmə və nəzarət, ISO 21500 çərçivəsində isə ümumi koordinasiya təmin edilir. Beləliklə, təklif olunan hibrid model layihənin planlaşdırılması, icrası və nəzarətini vahid sistemdə birləşdirərək risklərin azaldılmasına, resurslardan səmərəli istifadəyə və nəticələrin proqnozlaşdırılmasına imkan yaradır.

#### **Ədəbiyyat**

1. Project Management Institute. *Pulse of the Profession Report*, 2021.
2. Wellington. *The State of Project Management Report*, 2020.
3. Project Management Institute- Maximizing November 8, 2025
4. Project Management Institute - Success vs. Failure – Improving Project Performance October 12, 2010

## AVTONOM SÜNİ İNTELLEKT AGENTLƏRİNİN PAYLANAN SİSTEMLƏRDƏ PARALEL KOORDİNASİYASI: MULTİ-AGENT YANAŞMA

**Məmmədov İsgəndər Nazim oğlu, Həsənova Nazlı Əli qızı**

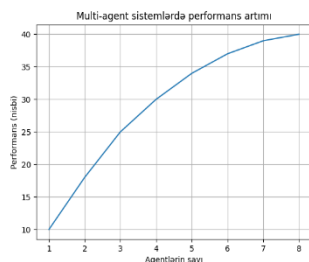
(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi, SBAH)

isgender.memmedov.5339@gmail.com, ictnazli@gmail.com

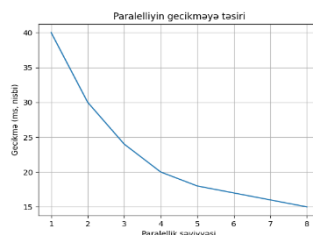
**Xülasə:** Müasir süni intellekt sistemləri tək modellərdən çox, bir-biri ilə qarşılıqlı əlaqədə olan agentlərdən ibarət kompleks strukturlara doğru inkişaf edir. Bu tezisdə multi-agent sistemlərdə paralel və paylanan hesablama prinsipləri, agentlər arasında koordinasiya mexanizmləri və onların performansına təsiri araşdırılır. Tədqiqat göstərir ki, düzgün təşkil olunmuş paralel agent sistemləri həm hesablama sürətini artırır, həm də mürəkkəb problemlərin daha effektiv həllinə imkan yaradır.

**Açar sözlər:** multi-agent sistemlər, paralel hesablama, süni intellekt, agent koordinasiyası, paylanmış arxitektura.

Klassik süni intellekt modelləri mərkəzləşdirilmiş struktura malikdir və bütün qərarlar tək bir sistem daxilində qəbul olunur. Lakin real dünyada problemlər (məsələn, nəqliyyat, robototexnika, böyük verilənlər elmi) çox mürəkkəbdir və onların həlli üçün paralel işləyən çoxsaylı sistemlər tələb olunur. Buna görə də multi-agent sistemlər anlayışı ortaya çıxmışdır. Bu sistemlərin əsas üstün cəhətləri onların eyni anda işləməsi, lokal qərar verməsi və nəticə etibarilə global məqsəd əldə etməsidir [1]. Multi-Agent sistemlərin arxitekturasının komponentləri agentlər hansı ki, onlar müstəqil qərar verən vahidlər, mühit agentlərin fəaliyyət göstərdiyi sistem, kommunikasiya mexanizmi- agentlərarası məlumat mübadilə mexanizmi, və koordinasiya strategiyası konfliktlərin qarşısını alan mexanizm kimi formalaşdırılır. Multi- agent sistemlərin paralel və paylanan hesablamalarda rolu onun əsas iki prinsiplə tətbiq olunmasıdır. Agentlər eyni anda işləyir və vaxt qazanılır, bu paralelliyi, eyni zamanda tapşırıqlar müxtəlif cihazlara bölünərək icra edilir, bu işə paylanmanı özündə əks etdirir [2].



Qrafik 1.



Qrafik 2.

Qrafik 1 dən göründüyü kimi başlanğıcda agent sayı artdıqca performans sürətlə yüksəlir. Daha sonra müəyyən nöqtədən sonra artım zəifləyir. Bu, vacib anlayışdır. Qrafik 2 də isə paralelliyin gecikməyə təsiri analiz edilmişdir, burada paralellik artdıqca gecikmə azalır, amma minimum hədd vardır, yəni sifıra yaxınlaşır, lakin sıfır olmur. Bu da sistem dizaynında kritik faktordur.

Multi-agent sistemlərində koordinasiya strategiyalarına nəzər salaq. Aydındır ki, multi-agent sistemləri çoxsaylı paralel və paylanan sistemlərdən ibarətdir. Yaxşı bəs, necə olur ki, bu sistemlər qarışmır və ya itmir? Bunun müxtəlif koordinasiya strategiyaları mövcuddur. Birinci yanaşma mərkəzləşdirilmiş koordinasiyaadır. Bu üsulda bir agent bütün sistemi idarə edir və hər şeyə o qərar verir. Sadədir, amma zəif nöqtə var. İkinci paylanmış koordinasiyaadır. Bu yanaşmada agentlər hər biri özləri qərar verir. Və daha stabilliyi, çevikliyi ilə birinci yanaşmadan fərqlənir. Növbəti üsul isə hibrid yəni, qarışıq yanaşmadır. Bu üsul digərlərindən daha effektiv və etibarlıdır. Lakin, bu sistemlər ideal deyil, ciddi çətinliklər var. Kommunikasiya gecikməsi, resurs bölgüsü problemləri, agent konfliktləri problemləri əsas problemlərdir [3], [4].

İndi isə multi-agent sistemlərin real həyatda tətbiq nümunələrinə nəzər salaq. Avtonom dronlar- burada bir neçə dron paralel işləyərək xəritəni qurmağa çalışır. Robot komandaları- anbarlarda məhsul daşıyan robot sistemləri, istehsalatda çalışan robotlar buna bariz nümunədir. Ağillı nəqliyyat- işıqforların və maşınların koordinasiyalı işləməsi və s. Oyun sənayesi - AI personajların davranışlarının öyrədilməsi və bəzi funksiyaları artırılması mümkündür [5].

Multi-agent sistemlər paralel və paylanan hesablama sahəsində yeni mərhələni təmsil edir. Bu yanaşma süni intellektin daha çevik, sürətli və real dünya problemlərinə uyğun olmasına imkan yaradır. Gələcəkdə bu sistemlər avtonom texnologiyaların əsasını təşkil edəcəkdir.

### **Ədəbiyyat**

1. Russell S., Norvig P. *Artificial Intelligence: A Modern Approach* – 4th ed. – Boston: Pearson, 2021. – 1152 p.
2. Wooldridge M. *An Introduction to MultiAgent Systems* – 2nd ed. – Chichester: Wiley, 2009. – 484 p.
3. Tanenbaum A.S., van Steen M. *Distributed Systems: Principles and Paradigms* – 3rd ed. – New Jersey: Pearson, 2017. – 686 p.
4. Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. *Deep Learning* – Cambridge: MIT Press, 2016. – 775 p.
5. Hennessy J.L., Patterson D.A. *Computer Architecture: A Quantitative Approach* – 6th ed. – Cambridge: Morgan Kaufmann, 2019. – 856 p.

## **AZƏRBAYCANDA AVTOMOBİL SİĞORTASI SİSTEMİNİN HÜQUQİ ƏSASLARI VƏ İNKİŞAF XÜSUSİYYƏTLƏRİ**

**Məmmədova Aynur Qürbət qızı**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi )*

*aynurbabazad9@gmail.com*

**Xülasə:** *Məqalədə Azərbaycanda avtomobil sığortası sisteminin hüquqi əsasları və praktiki xüsusiyyətləri təhlil olunur. Avtosığortanın risklərin idarə olunmasında rolu, icbari və könüllü formalarının mahiyyəti, eləcə də normativ-hüquqi tənzimləmə mexanizmləri izah edilir. Sığorta münasibətlərində maliyyə elementləri, zərərin qiymətləndirilməsi və subroqasiya kimi hüquqi alətlər ayrıca nəzərdən keçirilir. Nəticədə göstərilir ki, avtosığorta sistemi həm fərdi, həm də ictimai səviyyədə maliyyə təhlükəsizliyinin təmin edilməsində mühüm rol oynayır.*

**Açar sözlər:** *avtosığorta, normativ-hüquqi baza, icbari sığorta, KASKO, risklərin idarə olunması, sığorta ödənişi, subroqasiya, maliyyə mexanizmləri*

Sığorta müasir iqtisadi sistemdə sadəcə maliyyə xidməti deyil, risklərin idarə olunmasının əsas mexanizmlərindən biridir. İnsanlar və müəssisələr gündəlik fəaliyyətlərində müxtəlif qeyri-müəyyənliklərlə üzləşirlər və bu qeyri-müəyyənliklər bəzən ciddi maliyyə itkilərinə səbəb olur. Sığorta məhz bu risklərin təsirini zəiflətmək üçün yaranmış praktik bir vasitədir. Onun köməyi ilə gözlənilməz hadisələrin maliyyə yükü bir nəfərin üzərində qalmır, daha geniş iştirakçı kütləsi arasında bölüşdürülür. Bu yanaşma iqtisadi sabitliyin qorunmasına real töhfə verir.

Sığortanın əsas prinsipi kollektiv məsuliyyət üzərində qurulub. Yəni çox sayda insan müəyyən məbləğ ödəyir və həmin vəsaitlərdən ehtiyat fondu formalaşdırılır. Zərər baş verəndə isə bu fond vasitəsilə kompensasiya edilir. Bu sistem fərdi riskləri idarəolunan səviyyəyə endirir. Praktik olaraq bu, o deməkdir ki, hər kəs tək-tək böyük risk daşımır, risk paylaşılır və nəticədə daha az hiss olunur [1].

Avtomobil nəqliyyat vasitələrinin sığortası isə bu ümumi sistemin ən geniş yayılmış sahələrindən biridir. Bunun səbəbi aydındır: avtomobil artıq sadəcə nəqliyyat vasitəsi deyil, həm şəxsi həyatın, həm də iqtisadi fəaliyyətin ayrılmaz hissəsidir. Yol hərəkəti isə daim risklərlə müşayiət olunur. Qəza, oğurluq, texniki nasazlıq, üçüncü şəxslərə zərər kimi hallar çox realdır. Buna görə də avtosığorta bu risklərin idarə olunması üçün xüsusi əhəmiyyət daşıyır.

Azərbaycanda avtomobil sığortası həm iqtisadi, həm də hüquqi baxımdan formalaşmış bir sistemdir. Bu sistemin əsasını ölkənin ümumi qanunvericiliyi



təşkil edir. Buraya ilk növbədə Mülki Məcəllə və "Sığorta fəaliyyəti haqqında" qanun daxildir. Bu sənədlər sığorta münasibətlərinin ümumi çərçivəsini müəyyən edir: tərəflərin hüquq və vəzifələri, müqavilə şərtləri, ödəniş mexanizmi və s.

Avtosığorta sahəsində xüsusi rolu olan digər mühüm sənəd isə "İcbari sığortalar haqqında" qanundur. Bu qanuna əsasən avtomobil sahiblərinin üçüncü şəxslər qarşısında mülki məsuliyyəti icbari qaydada sığortalanmalıdır. Bu çox vacib məqamdır, çünki burada məqsəd təkcə avtomobil sahibini qorumaq deyil, eyni zamanda zərərçəkən şəxslərin hüquqlarını təmin etməkdir. Yəni qəza zamanı zərər görən şəxs kompensasiyasız qalmır.

Azərbaycanda avtosığorta iki əsas istiqamətdə formalaşır [2]:

- **Könüllü sığorta (KASKO)** – avtomobilin özünü qoruyur
- **İcbari məsuliyyət sığortası** – üçüncü şəxslərə dəyən zərəri əhatə edir

Bundan əlavə, bəzi hallarda sürücü və sərnişinlərin həyat və sağlamlığı ilə bağlı risklər də sığortaya daxil edilir. Bu isə avtosığortanın kompleks xarakter daşdığını göstərir.

Normativ qaydalarda sığorta riskləri dəqiq şəkildə göstərilir. Məsələn [3]:

- yol-nəqliyyat hadisələri
- oğurluq və ya qaçırılma
- yanğın və partlayış
- təbii fəlakətlər
- üçüncü şəxslərin qanunsuz hərəkətləri

Bununla yanaşı, avtosığorta müqavilələrində təminatə daxil edilməyən hallar da xüsusi yer tutur. Bu istisnaların göstərilməsi təsadüfi deyil. Çünki sığorta sistemi yalnız gözlənilməz və sığortalının iradəsindən asılı olmayan riskləri kompensasiya etməlidir. Əgər sürücü nəqliyyat vasitəsini sərxoş vəziyyətdə idarə edərsə, sürücülük hüququ olmadan yola çıxırsa və ya hadisə qəsdən törədilsə, belə halların sığorta təminatına daxil edilməsi düzgün hesab olunmur. Bu, həm sığortaçının, həm də digər sığortalıların maraqlarına zidd olardı. Ona görə də qanunvericilikdə və sığorta qaydalarında bu kimi hallar təminatdan kənarda saxlanılır. Belə yanaşma sığorta münasibətlərində məsuliyyət hissini gücləndirir və sistemin sui-istifadələrdən qorunmasına xidmət edir.

Avtomobil sığortasında maliyyə şərtləri də mühüm əhəmiyyət daşıyır. Sığorta haqqı, sığorta tarifi, sığorta məbləği və azadolma məbləği müqavilənin əsas iqtisadi göstəriciləridir. Sığorta haqqı sığortalının aldığı təminat müqabilində ödədiyi vəsaitdir. Sığorta məbləği isə hadisə baş verdikdə ödənilə biləcək maksimum kompensasiyanı göstərir. Azadolma məbləği zərərin müəyyən hissəsinin sığortalının öz üzərində qalması deməkdir. Bu mexanizm həm sığortalını daha diqqətli olmağa sövq edir, həm də xırda və əsassız müraciətlərin qar-

şısını alır. Tariflərin müəyyənləşdirilməsi isə sadə qiymət qoyma prosesi deyil. Burada avtomobilin markası, buraxılış ili, texniki vəziyyəti, istifadə məqsədi, sürücünün təcrübəsi, əvvəlki qəza tarixçəsi və digər risk amilləri nəzərə alınmalıdır. Deməli, avtosığortada maliyyə mexanizmləri hüquqi qaydalarla yanaşı, real risk hesablamalarına da əsaslanır.

Sığorta hadisəsi baş verdikdə zərərin qiymətləndirilməsi prosesi xüsusi həssaslıq tələb edir. Çünki sığortalı üçün ən vacib mərhələ məhz ödəniş mərhələsidir. Hadisə haqqında vaxtında məlumat verilməsi, lazımi sənədlərin toplanması, avtomobilə dəymiş zərərin düzgün müəyyənləşdirilməsi və ödənişin gecikdirilmədən həyata keçirilməsi sığorta münasibətlərində etimadın əsas şərtidir. Əgər zərər obyektiv qiymətləndirilmirsə və ya sığortaçı ödənişi əsassız şəkildə gecikdirsə, bu, sığortalının narazılığına səbəb olur. Digər tərəfdən, şişirdilmiş və ya saxta zərər tələbləri də sığorta şirkətlərinin maliyyə sabitliyinə mənfi təsir göstərir. Buna görə də zərərin qiymətləndirilməsi həm sığortalının hüquqlarını qoruyan, həm də sığortaçının qanuni maraqlarını müdafiə edən balanslı mexanizm kimi qurulmalıdır [1].

Avtosığorta münasibətlərində subroqasiya institutu da mühüm hüquqi vasitə kimi çıxış edir. Subroqasiya o deməkdir ki, sığortaçı zərərin əvəzini ödədikdən sonra həmin zərəre görə məsuliyyət daşıyan şəxsə qarşı tələb irəli sürmək hüququ əldə edir. Məsələn, avtomobilə üçüncü şəxs tərəfindən zərər vurulubsa və sığorta şirkəti həmin zərəri sığortalıya ödəyibsə, sonradan ödənilmiş məbləği təqsirli şəxsdən tələb edə bilər. Bu mexanizm zərərin son nəticədə təqsirli şəxsin üzərində qalmasını təmin edir. Eyni zamanda sığorta fondlarının əsassız şəkildə azalmasının qarşısını alır. Subroqasiya həm hüquqi ədalətin, həm də maliyyə intizamının qorunmasına xidmət edən vacib alətdir.

Beləliklə, Azərbaycanda avtomobil nəqliyyat vasitələrinin sığortası yalnız avtomobilə dəyən zərərin ödənilməsi ilə məhdudlaşmır. Bu sistem daha geniş məzmun daşıyır və yol hərəkəti iştirakçıları arasında məsuliyyətin düzgün bölüşdürülməsinə, zərərçəkən şəxslərin müdafiəsinə, avtomobil sahiblərinin maliyyə təhlükəsizliyinə və ümumilikdə sığorta bazarının sabitliyinə xidmət edir. Normativ-hüquqi baza isə bu münasibətlərin aydın, şəffaf və hüquqi əsaslarla tənzimlənməsini təmin edir. Avtosığortanın səmərəli işləməsi üçün qanunvericilik, sığorta şirkətlərinin fəaliyyəti, sürücülərin məsuliyyəti və zərərin qiymətləndirilməsi mexanizmləri bir-biri ilə əlaqəli şəkildə fəaliyyət göstərməlidir. Bu baxımdan avtomobil sığortası Azərbaycanın sığorta sistemində həm praktik əhəmiyyətinə, həm də sosial-iqtisadi təsirinə görə mühüm sahələrdən biri hesab olunur.

### **Ədəbiyyat**

1. Hacıadə G.İ. (2020). Azərbaycan sığorta bazarının etimad problemləri və onların aradan qaldırılması yolları. Magistr dissertasiyası. Azərbaycan Dövlət İqtisad Universiteti. Bakı, 85 s.
2. İbrahimov E.R., Hüseynov M.C. və b. (2017). Sığorta işi, Bakı, 496 s.
3. Xudiyev N.N. (2015) "Sığorta işi:müasir kurs(dərslik)" Bakı, "İqtisad Universiteti nəşriyyatı", 461 s.

## **AVTOMOBİL SİĞORTASINDA RİSK ƏSASLI TARİF STRATEGİYASININ EFFEKTİVLİYİNİN AKTUAR-STATİSTİK QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ**

**Məmmədova Aynur Qürbət qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)  
aynurbabazad9@gmail.com

**Xülasə:** Məqalədə avtomobil sığortasında risk əsaslı tarif strategiyasının effektivliyi aktuar-statistik göstəricilər əsasında qiymətləndirilir. Zərər tezliyi, zərər ağırlığı, Loss Ratio, Combined Ratio, Poisson və Negative Binomial modelləri vasitəsilə tariflərin maliyyə dayanıqlığına təsiri təhlil olunur.

**Açar sözlər:** avtomobil sığortası, risk əsaslı tarif, aktuar qiymətləndirmə, zərər tezliyi, Bonus-Malus sistemi.

Avtomobil sığortası bazarında effektiv strategiyanın formalaşdırılması yalnız sığorta haqlarının artırılması və ya bazar payının genişləndirilməsi ilə məhdudlaşmır. Bu sahədə əsas məsələ qəbul edilən risklərin düzgün qiymətləndirilməsi, zərər ehtimalının real göstəricilər əsasında hesablanması və tariflərin həmin risk səviyyəsinə uyğun müəyyən edilməsidir. Avtosığorta strategiyasının əsas məqsədi sığorta portfelində risklərin idarəolunan səviyyədə saxlanması və eyni zamanda şirkətin mənfəətliliyinin təmin edilməsidir. Bu məqsədə nail olmaq üçün aktuar-statistik metodlardan istifadə xüsusi əhəmiyyət daşıyır [3]. Aktuar yanaşma sığorta hadisələrinin başvermə tezliyini və həmin hadisələrin maliyyə nəticəsini ayrıca təhlil etməyə imkan verir. Belə yanaşmada ümumi zərər iki əsas komponent əsasında formalaşır: zərər tezliyi və zərər ağırlığı. Bu əlaqə aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$E(Z) = E(N) \times E(X)$$

Burada  $Z$  ümumi zərəri,  $N$  zərər hadisələrinin sayını,  $X$  isə bir hadisə üzrə zərərin orta məbləğini göstərir. Bu düstur avtomobil sığortasında riskin ümumi səviyyəsini müəyyənləşdirmək üçün baza model kimi qəbul edilə bilər.

Zərər tezliyi portfeldə müəyyən dövr ərzində neçə sığorta hadisəsinin baş verdiyini göstərir. Əgər zərər hadisələrinin sayı ekspozisiya ilə müqayisədə yüksəkdirsə, bu, portfeldə riskli müştərilərin üstünlük təşkil etdiyini göstərir. Zərər tezliyi aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n e_i}$$

Burada  $Y_i$  zərər hadisələrinin sayını,  $e_i$  isə ekspozisiya göstəricisini ifadə edir. Bu göstəricinin yüksək olması tarif siyasətinin yenidən nəzərdən keçirilməsini və risk seçimi mexanizmlərinin gücləndirilməsini tələb edir.

Zərər ağırlığı isə baş vermiş hadisələrin sığorta şirkəti üçün yaratdığı orta maliyyə yükünü göstərir. Bu göstərici aşağıdakı kimi hesablanır [2]:

$$S = \frac{\sum_{i=1}^n Z_i}{\sum_{i=1}^n Y_i}$$

Burada  $Z_i$  ödənilmiş zərər məbləğini,  $Y_i$  isə zərər hadisələrinin sayını göstərir. Zərər ağırlığının yüksək olması onu göstərir ki, portfeldə baş verən hadisələr az olsa belə, onların maliyyə nəticəsi ağırdır. Bu səbəbdən sığorta şirkəti yalnız hadisə sayını deyil, həm də hər hadisənin dəyərini idarə etməlidir.

Avtomobil sığortasında ümumi gözlənilən zərər zərər tezliyi və zərər ağırlığının hasilinə əsasən müəyyən edilir:

$$E(L) = \lambda \times S$$

Bu göstərici bir sığorta müqaviləsi üzrə gözlənilən orta zərəri ifadə edir. Tarif hesablanarkən bu məbləğə risk yüklənməsi, inzibati xərclər və mənfəət marjası əlavə olunur:

$$Premium = \lambda \times S \times (1 + \theta)$$

Burada  $\theta$  risk yüklənməsi əmsalıdır. Əgər bu əmsal düzgün müəyyən edilməzsə, sığorta haqqı ya riskləri qarşılamaq üçün kifayət etməz, ya da bazarda rəqabət qabiliyyətini azaldar. Strategiyanın effektivliyini qiymətləndirmək üçün maliyyə göstəricilərindən də istifadə olunur. Bu göstəricilər arasında zərər əmsalı xüsusi yer tutur [1]:

$$LR = \frac{Total\ Claims}{Earned\ Premium}$$

Əgər  $LR < 1$  olarsa, sığorta şirkətinin topladığı mükafatlar zərər ödənişlərini qarşılaya bilər. Əgər  $LR > 1$  olarsa, bu, strategiyanın zərərli olduğunu göstərir. Lakin yalnız zərər əmsalına baxmaq kifayət etmir, çünki sığorta şirkətinin əməliyyat xərcləri də nəzərə alınmalıdır. Bu məqsədlə birləşmiş əmsal hesablanır:

$$CR = LR + ER$$

Burada  $ER$  xərc əmsalıdır. Əgər  $CR < 1$  olarsa, şirkətin əsas sığorta fəaliyyəti mənfəətlidir. Əgər  $CR > 1$  olarsa, bu, sığorta fəaliyyətinin texniki baxımdan

zərərli olduğunu göstərir.

Nümunə olaraq avtomobil sığortası portfeli üzrə ekspozisiya 185 000, zərər hadisələrinin sayı 23 536, ümumi ödəniş məbləği isə 102.969 mln. AZN qəbul edilərsə, zərər tezliyi belə hesablanır:

$$\lambda = \frac{23536}{185000} = 0.1272$$

Bu nəticə göstərir ki, hər bir müqavilə üzrə orta hesabla 0.127 zərər hadisəsi baş verir. Başqa sözlə, hər 100 müqaviləyə təxminən 12.7 hadisə düşür. Zərər ağırlığı isə belə olar:

$$S = \frac{102969000}{23536} = 4374.96 \text{ AZN}$$

Deməli, bir zərər hadisəsinin orta dəyəri təxminən 4375 AZN-dir. Bu iki göstəriciyə əsasən bir müqavilə üzrə gözlənilən zərər aşağıdakı kimi hesablanır:

$$E(L) = 0.1272 \times 4374.96 = 556.49 \text{ AZN}$$

Əgər risk yüklənməsi 15% qəbul edilərsə, sığorta haqqı belə olacaq:

$$Premium = 556.49 \times 1.15 = 639.96 \text{ AZN}$$

Bu nəticə göstərir ki, risk əsaslı tarif strategiyasında sığorta haqqı təsadüfi deyil, zərər ehtimalı və zərərin orta dəyəri əsasında formalaşır. Avtomobil sığortasında risklər hər zaman homogen olmur. Müxtəlif yaş qrupları, fərqli avtomobil modelləri, regionlar, sürücülük təcrübəsi və istifadə intensivliyi zərər ehtimalına təsir göstərir. Buna görə də sadə Poisson modeli hər zaman real vəziyyəti tam izah etmir. Poisson modelində əsas fərziyyə belədir [1]:

$$E(Y) = Var(Y) = \lambda$$

Lakin praktikada çox vaxt aşağıdakı vəziyyət müşahidə olunur:

$$Var(Y) > E(Y)$$

Bu hal overdispersion adlanır. Belə şəraitdə Negative Binomial modelindən istifadə daha məqsədsə uyğundur:

$$Var(Y_i) = \lambda_i + \alpha \lambda_i^2$$

Burada  $\alpha$  əlavə dispersiya parametridir. Əgər  $\alpha > 0$  olarsa, portfeldə risklərin heterogen olduğu nəticəsinə gəlinir. Bu isə strategiyanın daha detallı seqmentləşdirmə və fərdiləşdirilmiş tarif yanaşması tələb etdiyini göstərir.

Model seçimi zamanı AIC və BIC kriteriyalarından istifadə oluna bilər:

$$AIC = -2LL + 2p$$

$$BIC = -2LL + p \ln(n)$$

Burada  $LL$  log-likelihood qiymətini,  $p$  parametr sayını,  $n$  isə müşahidə sayını ifadə edir. Daha aşağı AIC və BIC göstəricilərinə malik model daha uyğun hesab olunur. Avtomobil sığortasında bu kriteriyalar Poisson, Negative Binomial və digər modellərin müqayisəsi üçün istifadə edilir.

Bonus-Malus sistemi də avtomobil sığortasında strategiyanın effektivliyini artıran mühüm mexanizmdir. Bu sistem sığortalının əvvəlki zərər tarixçəsinə əsasən tarifi artırılmasına və ya azaldılmasına imkan verir:

$$BMF = \frac{A \text{ posteriori premium}}{A \text{ priori premium}}$$

Əgər müştəri uzun müddət zərər hadisəsi yaratmayıbsa, ona endirim tətbiq edilir. Əksinə, tez-tez zərər yaradan müştəri daha yüksək tarif ödəyir. Məsələn, baza premium 640 AZN olduqda, risksiz sürücü üçün  $BMF = 0.90$  qəbul edilərsə:

$$640 \times 0.90 = 576 \text{ AZN}$$

Yüksək riskli sürücü üçün  $BMF = 1.25$  olduqda isə:

$$640 \times 1.25 = 800 \text{ AZN}$$

Bu yanaşma həm ədalətli tarif siyasətini təmin edir, həm də müştəriləri daha ehtiyatlı davranmağa stimullaşdırır. Nəticə etibarilə, avtomobil sığortasında risk əsaslı tarif strategiyasının effektivliyi yalnız ödənişlərin həcmi ilə deyil, zərər tezliyi, zərər ağırlığı, gözlənilən zərər, Loss Ratio, Combined Ratio, dispersiya və model uyğunluğu kimi göstəricilərin kompleks təhlili ilə müəyyən edilməlidir. Effektiv strategiya o strategiyadır ki, həm riskləri düzgün qiymətləndirir, həm tarifləri real zərər ehtimalına uyğunlaşdırır, həm də şirkətin uzunmüddətli maliyyə dayanıqlığını qoruyur.

#### **Ədəbiyyat**

1. Hacızadə G.İ. (2020). Azərbaycan sığorta bazarının etimad problemləri və onların aradan qaldırılması yolları. Magistr dissertasiyası. Azərbaycan Dövlət İqtisad Universiteti. Bakı, 85 s.
2. Xudiyev N.N. (2015) "Sığorta işi:müasir kurs(dərslik)" Bakı, "İqtisad Universiteti nəşriyyatı", 461 s.
3. İbrahimov E.R., Hüseynov M.C. və b. (2017). Sığorta işi, Bakı, 496 s.

### **QEYRİ-LOKAL İNTEQRAL ŞƏRTLİ HİPERBOLİK TƏNLİYİN TƏQRİBİ HƏLLİNİN ƏDƏDİ EKSPERİMENTLƏRLƏ TƏDQIQI**

**Məmmədova Aynurə Eliyaz qızı**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*aynurmmmdova844@gmail.com*

**Xülasə:** Bu işdə qeyri-lokal integral şərtli hiperbolik tip tənliklərin təqribi həllinin qurulması və alınmış nəticələrin ədədi eksperimentlər vasitəsilə tədqiqi araşdırılmışdır.

*Qeyri-lokal şərtlə məsələlər son illərdə tətbiqi riyaziyyatın aktual istiqamətlərindən biri olmaqla, fizika, mexanika və mühəndislik sahələrində baş verən mürəkkəb proseslərin modelləşdirilməsində geniş istifadə olunur.*

**Açar sözlər:** *hiperbolik tənlik, qeyri-lokal şərt, inteqral şərt, fərq sxemi, sonlu fərqlər metodu, ədədi eksperiment, dayanıqlılıq, yaxınlaşma.*

Tədqiqat çərçivəsində aşağıdakı tip hiperbolik tənlik nəzərdən keçirilmişdir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T$$

Başlanğıc şərtlər:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x)$$

Qeyri-lokal inteqral şərt isə aşağıdakı kimi verilmişdir:

$$\int_0^l u(x, t) dx = g(t)$$

Burada  $a$  sabit əmsal,  $f(x, t)$  verilmiş funksiya,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  başlanğıc funksiyaları,  $g(t)$  isə inteqral şərti müəyyən edən funksiyadır.

Verilmiş məsələ üçün fəza və zaman dəyişənləri üzrə şəbəkə qurulmuş və diferensial tənlik sonlu fərqlər metodu ilə diskretləşdirilmişdir. Qeyri-lokal inteqral şərtin nəzərə alınması üçün uyğun diskret analoq qurulmuş və nəticədə xüsusi tip fərq sxemi əldə edilmişdir.

Qurulan sxemin dəqiqliyi və dayanıqlılığı tədqiq olunmuş, həmçinin sxemin yaxınlaşma xassələri öyrənilmişdir. Daha sonra konkret test funksiyalar üçün ədədi eksperimentlər aparılmış və alınmış nəticələr analitik həllərlə müqayisə edilmişdir.

Ədədi eksperimentlərin nəticələri göstərir ki, təklif olunan üsul qeyri-lokal şərtlə hiperbolik tənliklərin həlli üçün effektiv və etibarlıdır. Xəta qiymətləndirmələri sxemin yüksək dəqiqliklə işlədiyini təsdiq edir.

Qeyd edək ki, qeyri-lokal şərtlə hiperbolik tənliklər dalğa prosesləri, elastiklik nəzəriyyəsi və enerji ötürülməsi kimi sahələrdə tətbiq olunur. Bu tip məsələlərin ədədi üsullarla həlli müasir elmi-tədqiqat işlərində mühüm yer tutur.

Təzisdə [1,4]-də olan metodlardan istifadə edilmişdir.

### **Ədəbiyyat**

1. Самарский А.А. Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
2. Cannon J.R. The One-Dimensional Heat Equation. Addison-Wesley, 1984.
3. Ashyralyev A., Sobolevskii P.E. Well-posedness of parabolic difference equations.
4. Bitsadze A.V. Some Classes of Partial Differential Equations.

## DÜZGÜN ÜÇBUCAQLI OBLASTDA KOŞI-RİMAN TƏNLIYI ÜÇÜN SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİNİN ARAŞDIRILMASI

**Məmmədova Aysel Nazir qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakultəsi)

*aysel.besirli@gmail.com*

**Xülasə:** İşdə birinci düzgün üçbucaqda Koşi-Riman tənliyi üçün qeyri-lokal sərhəd şərti daxilində məsələyə baxılmışdır. Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllinin köməyi ilə əsas münasibət qurularaq zəruri şərtlər alınmışdır.

**Açar sözlər:** Koşi-Riman tənliyi, fundamental həll, sərhəd şərtləri, əsas münasibət, zəruri şərtlər.

Birinci tərtib elliptik tip tənlik olan Koşi-Riman tənliyi üçün, Laplas tənliyi üçün qoyulmuş Drixle-Neyman və Puankare tipli lokal şərtlər daxilində qoyulmuş sərhəd məsələsi korrekt deyil [1;2]. Göstərilmişdir ki, qabarıq oblastda sərhəd iki yerə bölünməklə verilmiş qeyri-lokal sərhəd şərti Koşi-Riman tənliyi üçün kifayətdir. Əgər sərhəd dörd yerə bölünmüşdürsə, onda Koşi-Riman tənliyi üçün iki sərhəd şərti vermək lazımdır [3;4].

Aşağıdakı kimi qoyulmuş məsələyə baxaq:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + i \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in D \subset \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

$$a_{k1} u\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t, -\frac{1}{2}\right) + a_{k2} u\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t, -\frac{1}{2}\right) + a_{k3} u\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t, -\frac{3}{2}t + 1\right) +$$

$$+ a_{k4} u\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t, -\frac{3}{2}t + 1\right) = a_k(t) \quad k = 1, 2, \quad t \in [0, 1] \quad (2)$$

$D$  mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən vahid çevrənin daxilində çəkilmiş düzgün üçbucaqlı oblastdır.  $A(0;1)$ ,  $B(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2})$ ,  $C(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2})$  üçbucağın təpə nöqtələridir.  $a_{kj}$   $k=1,2$   $j=\overline{1,4}$  verilmiş sabit ədədlər,  $a_k(t)$   $k=1,2$  verilmiş kəsilməz funksiyalardır. Sərhəd şərtləri xətti asılı deyil, Karleman şərti ödənilir. Koşi-Riman tənliyinin fundamental həlli [5]:

$$U(x - \xi) = \frac{1}{2\pi[(x_2 - \xi_2) + i(x_1 - \xi_1)]} \quad (3)$$

şəklindədir. (3) fundamental həllini (1) tənliyinə vurub,  $D$  oblastı boyunca integrallasaq və Ostroqadski-Qauss formülünü tətbiq etsək alarıq:

$$\int_{\Gamma} u(x) U(x - \xi) [\cos(v, x_2) + i\cos(v, x_1)] dx = \int_D u(x) \left[ \frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_2} + i \frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_1} \right] dx =$$



$$= \int_D u(x) \delta(x - \xi) dx = \begin{cases} u(\xi), & \xi \in D \\ \frac{1}{2}u(\xi), & \xi \in \Gamma. \end{cases} \quad (4)$$

Aldığımız (4) əsas münasibət iki hissədən ibarətdir: Birinci hissə ( $\xi \in D$ ) verilmiş (1) tənliyinin D-də təyin olunmuş ixtiyari həllini, ikinci hissi isə ( $\xi \in \Gamma$ ) zəruri şərtləri verir. İkinci hissədən istifadə edərək (1) - (2) məsələsi üçün zəruri şərtləri ala bilərik:

$$\begin{aligned} u(\xi_1; \sqrt{3}\xi_1 + 1) = & -\frac{i}{\pi} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 u(x_1; \sqrt{3}x_1 + 1) \cdot \frac{1}{(x_1 - \xi_1)} dx_1 + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} u(x_1; 1 - \sqrt{3}x_1) \cdot \frac{1 + i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}(x_1 + \xi_1) + i(x_1 - \xi_1)} dx_1 - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} u\left(x_1; -\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\left(-\frac{3}{2} - \sqrt{3}\xi_1\right) + i(x_1 - \xi_1)} dx_1 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} u(\xi_1; 1 - \sqrt{3}\xi_1) = & \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 u(x_1; \sqrt{3}x_1 + 1) \cdot \frac{[1 - i\sqrt{3}]}{\sqrt{3}(x_1 + \xi_1) + i(x_1 - \xi_1)} dx_1 + \\ & - \frac{i}{\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} u(x_1; 1 - \sqrt{3}x_1) \cdot \frac{1}{(x_1 - \xi_1)} dx_1 - \\ & - \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} u\left(x_1; -\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\left(-\frac{3}{2} + \sqrt{3}\xi_1\right) + i(x_1 - \xi_1)} dx_1 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} u\left(\xi_1; -\frac{1}{2}\right) = & \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 u(x_1; \sqrt{3}x_1 + 1) \cdot \frac{[1 - i\sqrt{3}]}{(\sqrt{3}x_1 + 1,5) + i(x_1 - \xi_1)} dx_1 + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} u(x_1; 1 - \sqrt{3}x_1) \cdot \frac{1 + \sqrt{3}i}{(1,5 - \sqrt{3}x_1) + i(x_1 - \xi_1)} dx_1 + \end{aligned}$$

$$+ \frac{i}{\pi} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} u\left(x_1; -\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{(x_1 - \xi_1)} dx_1 \quad (7)$$

**Teorem.** Əgər  $D$  oblastı  $x_2$  istiqamətində qabarıq, məhdud müstəvi oblast,  $\Gamma$  sərhəddi Lyapunov xəttidirsə, onda (1)-(2) tənliyinin ixtiyari həlli (4) əsas münasibətini və (5), (6), (7) zəruri şərtlərini ödəyir.

Zəruri şərtlər hər biri sərhəd boyu integrallardan ibarətdir və tərkibində sinqulyarlıqlar saxlayır. Bu sinqulyarlıqlar özünəməxsus üsullarla requlyarlaşdırılır.

### Ədəbiyyat

1. Əliyev N.Ə., Zeynalov R.M. Koşi-Riman tənliyi üçün Lavrentyev – Bitsadze şərtli Steklov məsələsinin fredholmluğu. ADPU-nun Xəbərləri, Təbiət elmləri, Təbiət elmləri bölməsi, Bakı- 2012, səh.16-19
2. Aliev N., Rezapour Sh., Jahanshahi M.A mixed problem for Navier – Stokes System, Mathematica Moravica Journal of University of Kragujevac, Serbia vol. 12-2(2008), pp.1-14
3. Aliev N.A., Samadova S., Boundary value problem in square for Cauchy-Riemann equation, Third international scientific conference of young researchers, Baku, Azerbaijan, 17-18 aprel, 2015, pp.141-142
4. Алиев Н.А., Касимов Ф.А., Решение смешанной задачи для ограниченной области, ученые записки, Азнефтехим, им. М.Азизбекова 1978, стр.30-36
5. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981

## BƏRABƏRTƏRƏFLİ ÜÇBUCAQLI OBLASTDA KOŞİ-RİMAN TƏNLIYI ÜÇÜN QEYRİ-LOKAL SƏRHƏD ŞƏRTLİ MƏSƏLƏNİN FREDHOLMLUĞU

**Məmmədova Aysel Nazir qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

aysel.besirli@gmail.com

**Xülasə:** İşdə bərabərtərəfli üçbucaqda Koşi-Riman tənliyi üçün qeyri-lokal sərhəd şərti daxilində məsələyə baxılmışdır. Tənliyin fundamental həllinin köməyi ilə əsas münasibət qurularaq zəruri şərtlər alınmış, zəruri şərtlərdəki sinqulyarlıqlar sərhəd şərtlərindən istifadə edilərək requlyarlaşdırılmış və məsələnin fredholmluğu üçün kifayət qədər şərt alınmışdır.

**Açar sözlər:** Koşi-Riman tənliyi, sərhəd şərtləri, zəruri şərtlər, sinqulyarlıq, fredholmluq.

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x_2} + i \frac{\partial U(x)}{\partial x_1} = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in D \subset \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

$$a_{k1} u\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t, -\frac{1}{2}\right) + a_{k2} u\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t, -\frac{1}{2}\right) + a_{k3} u\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t, -\frac{3}{2}t + 1\right) +$$

$$+ a_{k4} u\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t, -\frac{3}{2}t + 1\right) = a_k(t) \quad k = 1, 2, \quad t \in [0, 1] \quad (2)$$

$D$ - mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən vahid çevrənin daxilində çəkilmiş düzgün üçbucaqlı oblastdır.  $A(0; 1)$ ,  $B(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2})$ ,  $C(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2})$  üçbucağın təpə nöqtələridir.  $a_{kj}$   $k = 1, 2; j = \overline{1, 4}$  verilmiş sabit ədədlər,  $a_k(t)$   $k = 1, 2$  verilmiş kəsilməz funksiyalardır. Qabarıq oblastda sərhəd iki yerə bölünməklə verilmiş qeyri-lokal sərhəd şərti Koşi-Riman tənliyi üçün korrektdir. Əgər sərhəd dörd yerə bölünmüşdürsə, onda iki sərhəd şərti vermək lazım gələcəkdir [2;3]. (2) sərhəd şərtləri xətti asılı deyildir. Burada Karleman şərti ödənilir.

(1) tənliyinin fundamental həllindən [4] istifadə edərək əsas münasibət alınır

$$\int_{\Gamma} u(x) U(x - \xi) [\cos(\nu, x_2) + i \cos(\nu, x_1)] dx = \begin{cases} u(\xi), & \xi \in D \\ \frac{1}{2}u(\xi), & \xi \in \Gamma. \end{cases} \quad (3)$$

Burada  $U(x - \xi)$  tənliyin fundamental həlli,  $\nu$  oblastın sərhəddinə çəkilmiş xarici normaldır. (3) əsas münasibətinin birinci hissəsi ( $\xi \in D$ ) verilmiş (1) tənliyinin  $D$ -də təyin olunmuş ixtiyari həllini, ikinci hissəsi isə ( $\xi \in \Gamma$ ) zəruri şərtləri verir. Bu zəruri şərtlər sərhəd boyu integrallardan ibarətdir və tərkibində sinqulyarlıqlar saxlayır [1].

$$u(t, \sqrt{3}t + 1) = -\frac{i}{\pi} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 \frac{u(\tau, \sqrt{3}\tau + 1)}{\tau - t} d\tau + \dots \quad t \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right] \quad (4)$$

$$u(t, 1 - \sqrt{3}t) = -\frac{i}{\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u(\tau, 1 - \sqrt{3}\tau)}{\tau - t} d\tau + \dots \quad t \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad (5)$$

$$u\left(t, -\frac{1}{2}\right) = \frac{i}{\pi} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{u\left(\tau, -\frac{1}{2}\right)}{\tau - t} d\tau + \dots \quad t \in \left[0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right] \quad (6)$$

$$u\left(t, -\frac{1}{2}\right) = \frac{i}{\pi} \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 \frac{u\left(\tau, -\frac{1}{2}\right)}{\tau - t} d\tau + \dots \quad t \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right] \quad (7)$$

Nöqtələr ilə sinqulyar olmayan həddlər işarə olunmuşdur. (4)-(7)-də əvəzləmələr aparmaqla aşağıdakı ifadələri ala bilərik:

$$u\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\xi, -\frac{1}{2}\right)}{\xi - t} d\xi + \dots \quad t \in [0; 1] \quad (8)$$

$$u\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t, -\frac{1}{2}\right) = \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\xi; -\frac{1}{2}\right)}{\xi - t} d\xi + \dots \quad t \in [0; 1] \quad (9)$$

$$u\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t, -\frac{3}{2}t + 1\right) = -\frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\xi; 1 - \frac{3}{2}\xi\right)}{\xi - t} d\xi + \dots \quad t \in [0; 1] \quad (10)$$

$$u\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t, -\frac{3}{2}t + 1\right) = \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\xi; 1 - \frac{3}{2}\xi\right)}{\xi - t} d\xi + \dots \quad t \in [0; 1] \quad (11)$$

Aldığımız (8)-(11) ifadələri və (2) sərhəd şərtlərindən istifadə edərək alarıq:

$$\begin{aligned} & -a_{k1} u\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t, -\frac{1}{2}\right) + a_{k2} u\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t, -\frac{1}{2}\right) - a_{k3} u\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t, -\frac{3}{2}t + 1\right) + \\ & + a_{k4} u\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t, -\frac{3}{2}t + 1\right) = \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{a_k(t)}{\xi - t} d\xi + \dots \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (12)$$

Əgər  $a_k(t)$   $k=1,2$  funksiyaları  $[0;1]$ -də kəsilməz diferensiallandırsa və parçanın uc nöqtələrində sıfıra bərabər olarsa, yəni

$$a_k(0) = a_k(1) = 0 \quad \text{və} \quad a_k(t) \in C^{(1)}(0; 1) \quad k = 1, 2$$

şərtləri ödənərsə, onda (12) ifadəsi requlyardır.

(12) ifadələrini (2) sərhəd şərtlərinə qoşduqda aşağıdakı tənliklər sistemini alarıq:

$$\left\{ \begin{aligned} & a_{11} \cdot u\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t; -\frac{1}{2}\right) + a_{12} \cdot u\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t; -\frac{1}{2}\right) + a_{13} \cdot u\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t; -\frac{3}{2}t + 1\right) \\ & \quad + a_{14} \cdot u\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t; -\frac{3}{2}t + 1\right) = a_1(t) \\ & a_{21} \cdot u\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t; -\frac{1}{2}\right) + a_{22} \cdot u\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t; -\frac{1}{2}\right) + a_{23} \cdot u\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t; -\frac{3}{2}t + 1\right) + \\ & \quad + a_{24} \cdot u\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t; -\frac{3}{2}t + 1\right) = a_2(t) \\ & -a_{11} \cdot u\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t; -\frac{1}{2}\right) + a_{12} \cdot u\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t; -\frac{1}{2}\right) - a_{13} \cdot u\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t; -\frac{3}{2}t + 1\right) + \\ & \quad + a_{14} \cdot u\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t; -\frac{3}{2}t + 1\right) = \frac{i}{\pi} \cdot \int_0^1 \frac{a_1(\xi)}{\xi - t} d\xi + \dots \\ & -a_{21} \cdot u\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t; -\frac{1}{2}\right) + a_{22} \cdot u\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t; -\frac{1}{2}\right) - a_{23} \cdot u\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t; -\frac{3}{2}t + 1\right) + \\ & \quad + a_{24} \cdot u\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}t; -\frac{3}{2}t + 1\right) = \frac{i}{\pi} \cdot \int_0^1 \frac{a_2(\xi)}{\xi - t} d\xi + \dots \end{aligned} \right.$$

Bu sistemin baş determinantının sıfırdan fərqli olması, yəni

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ -a_{11} & a_{12} & -a_{13} & a_{14} \\ -a_{21} & a_{22} & -a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 2a_{12} & 0 & 2a_{14} \\ 0 & 2a_{22} & 0 & 2a_{24} \end{vmatrix} =$$
$$= 4 \cdot (a_{21}a_{13} - a_{11}a_{23}) \cdot (a_{12}a_{24} - a_{14}a_{22}) \neq 0$$

məsələnin fredholmluğu üçün kafi şərtidir.

### Ədəbiyyat

1. Əliyev N.Ə., Zeynalov R.M. Koşi-Riman tənliyi üçün Lavrentyev – Bitsadze şərtli Steklov məsələsinin fredholmluğu. ADPU-nun Xəbərləri, Təbiət elmləri, Təbiət elmləri bölməsi, Bakı- 2012, səh.16-19
2. Aliev N.A., Samadova S., Boundary value problem in square for Cauchy-Riemann equation, Third international scientific conference of young researchers, Baku, Azerbaijan, 17-18 aprel, 2015, pp.141-142
3. Алиев Н.А., Касимов Ф.А., Решение смешанной задачи для ограниченной области, ученые записки, Азнефтехим, им. М.Азизбекова 1978, стр.30-36
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981

## ELLIPTİK TƏNLİK ÜÇÜN PERİODİK ŞƏRTLİ SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN FƏRQ APROKSİMASIYASININ YIĞILMASI

**Məmmədova Aytac Kənan qızı, Səfərova Günay Şəmsi qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

amamedova0209@mail.ru, gunew.seferova96@mail.ru

**Xülasə:** Bu işdə periodik sərhəd şərtli elliptik tənlik üçün sərhəd məsələsinə baxılır. Sərhəd məsələsi ümumiləşmiş həllər sinfində baxılır və onun fərqlər aproksimasiyası qurulur. Fərqlər aproksimasiyasının yığılma sürəti üçün qiymətləndirmə alınır.

**Açar sözlər:** elliptik tənlik, periodik sərhəd şərtləri, ümumiləşmiş həll, fərq aproksimasiyası, yığılma sürəti üçün qiymətləndirmə.

Ümumiləşmiş həlləri olan elliptik tənliklər üçün klassik sərhəd şərtli məsələlərin fərq sxemlərinin yığılması ətraflı öyrənilmişdir [1]. Bu işdə periodik sərhəd şərtli elliptik tənlik üçün ümumiləşmiş həllər sinfində fərq sxeminin yığılma sürəti üçün qiymətləndirmə alınmışdır.

Periodik sərhəd şərtli elliptik tənliklər ilə izah olunan proseslər mühəndislik, fizika, tibb və s. sahələrdə rast gəlinir.

Aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxaq:

$$-\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + au = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$u|_{x_i=0} = u|_{x_i=l_i}, \quad i = 1, 2, \quad (2)$$

$$k(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big|_{x_i=0} = k(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \Big|_{x_i=l_i}, \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

Burada  $\Omega = \{x = (x_1, x_2): 0 < x_i < l_i, i = 1, 2\}$  -  $R^2$ -də düzbucaqlı,  $l_1, l_2 > 0$  - verilmiş ədədlər,  $k(x), a(x), f(x)$  aşağıdakı şərtləri ödəyən ölçülən funksiyalardır:

$$0 < v \leq k(x) \leq \mu, \left| \frac{\partial k}{\partial x_i} \right| \leq \mu_1, \quad i = 1, 2, \quad 0 < \mu_2 \leq a(x) \leq \mu_3, \quad x \in \Omega, \\ f(x) \in L_2(\Omega), \quad (4)$$

burada  $v, \mu, \mu_1, \mu_2, \mu_3$  - verilmiş ədədlərdir.

(1)-(3) sərhəd məsələsinin həlli  $W_2^1(\Omega)$  sinfindən olan ümumiləşmiş həll kimi təyin olunur [2].  $\widehat{W}_2^1(\Omega)$  ilə  $W_2^1(\Omega)$  fəzasından olan  $l$  - periodik elementlərindən, yəni  $u|_{x_i=0} = u|_{x_i=l_i}, i = 1, 2$  şərtini ödəyən  $u = u(x) \in W_2^1(\Omega)$  funksiyalarından ibarət altfəzanı işarə edək. (1)-(3) məsələsinin  $W_2^1(\Omega)$  fəzasında ümumiləşmiş həlli elə  $u = u(x) = u(x, v) \in \widehat{W}_2^1(\Omega)$  funksiyaasına deyilir ki,  $\forall \eta = \eta(x) \in \widehat{W}_2^1(\Omega)$  üçün aşağıdakı integral eyniliyi ödəsin:

$$\iint_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^2 k(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + a(x) u \eta \right) dx = \iint_{\Omega} f(x) \eta(x) dx.$$

İşdə isbat olunur ki, (1)-(3) sərhəd məsələsinin ümumiləşmiş həlli var və yeganədir. Bundan başqa,  $W_2^1(\Omega)$  sinfindən olan ümumiləşmiş həll həm də  $W_2^2(\Omega)$  fəzasına daxildir.

(1)-(3) məsələsini aproksimasiya etmək üçün  $\Omega$  düzbucaqlısında aşağıdakı şəbəkələri daxil edək:

$$\bar{\omega}_1 = \{x_{1i} = j_1 h_1: j_1 = 0, 1, \dots, N_1, h_1 = l_1/N_1, i = 1, 2\},$$

$$\bar{\omega}_2 = \{x_{2i} = j_2 h_2: j_2 = 0, 1, \dots, N_2, h_2 = l_2/N_2, i = 1, 2\},$$

$$\omega_1 = \bar{\omega}_1 \cap (0, l_1) = \{x_{1i} = j_1 h_1: j_1 = 1, 2, \dots, N_1 - 1, h_1 = l_1/N_1, i = 1, 2\},$$

$$\omega_2 = \bar{\omega}_2 \cap (0, l_2) = \{x_{2i} = j_2 h_2: j_2 = 1, 2, \dots, N_2 - 1, h_2 = l_2/N_2, i = 1, 2\},$$

$$\omega_1^+ = \bar{\omega}_1 \cap (0, l_1] = \{x_{1i} = j_1 h_1: j_1 = 1, 2, \dots, N_1\},$$

$$\omega_2^+ = \bar{\omega}_2 \cap (0, l_2] = \{x_{2i} = j_2 h_2: j_2 = 1, 2, \dots, N_2\},$$

$$\omega^+ = \omega_1^+ \times \omega_2^+, \quad \omega^{(+1)} = \omega_1^+ \times \omega_2, \quad \omega^{(+2)} = \omega_1 \times \omega_2^+.$$

Burada  $N_1, N_2 > 0$  - tam ədədlərdir,  $h = (h_1, h_2) > 0$  və  $|h| = (h_1^2 + h_2^2)^{1/2}$ .

Aşağıda şəbəkə funksiyaların normaları [1]-ə uyğun gəlir.

Fərz edək ki, elə  $C_1 > 0, C_2 > 0$  sabitləri vardır ki,  $h_1 \rightarrow 0, h_2 \rightarrow 0$  olduqda  $C_1 \leq h_1/h_2 \leq C_2$  bərabərsizliyi ödənilir.

İşdə (1)-(3) məsələsi aşağıdakı fərq sxemi ilə aproksimasiya olunur:

$$\Lambda_h y \equiv - \sum_{i=1}^2 (k^{(-0,5_i)}(x) y_{\bar{x}_i})_{x_i} + a_h(x) y = \varphi_h(x), \quad x \in \omega, \quad (5)$$

$$y|_{x_1=0} = y|_{x_1=l_1}, \quad x_2 \in \bar{\omega}_2, \quad y|_{x_2=0} = y|_{x_2=l_2}, \quad x_1 \in \bar{\omega}_1, \quad (6)$$

$$k^{(-0,5_1)} y_{\bar{x}_1}|_{x_1=h_1} = k^{(-0,5_1)} y_{\bar{x}_1}|_{x_1=l_1}, \quad x_2 \in \omega_2, \\ k^{(-0,5_2)} y_{\bar{x}_2}|_{x_2=h_2} = k^{(-0,5_2)} y_{\bar{x}_2}|_{x_2=l_2}, \quad x_1 \in \omega_1, \quad (7)$$

burada

$$k^{(-0,5_1)}(x) = k(x_1 - 0,5h_1, x_2), \quad x_1 \in \omega_1^+, \quad x_2 \in \omega_2,$$

$$k^{(-0,5_2)}(x) = k(x_1, x_2 - 0,5h_2), \quad x_1 \in \omega_1, \quad x_2 \in \omega_2^+,$$

$$\varphi_h(x) = S_1 S_2 f(x), \quad a_h(x) = S_1 S_2 a(x), \quad x \in \omega.$$

$S_1, S_2$  – uyğun olaraq  $x_1, x_2$  dəyişənlərinə nəzərən ortalama operatorlarıdır.

**Teorem 1.** Fərz edək ki, (1)-(3) və (5)-(7) sərhəd məsələləri üçün yuxarıdakı şərtlər ödənilir. Onda (5)-(7) məsələsinin yeganə həlli var və aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur:

$$\|y\|_{W_2^1(\omega)} \leq M \|\varphi_h\|_{0,\omega}.$$

Burada  $M \geq 0$  – müəyyən sabitdir.

Tutaq ki,  $z(x) = y(x) - u(x)$ ,  $x \in \bar{\omega}$  üsulun xətasıdır. (5)-(7) şərtlərindən istifadə edərək  $z = z(x)$  üçün aşağıdakı sərhəd məsələsini alırıq:

$$\Lambda_h z \equiv \Lambda_h y - \Lambda_h u = \psi_h(x), \quad x \in \omega, \quad (8)$$

$$z|_{x_1=0} = z|_{x_1=l_1}, \quad x_2 \in \bar{\omega}_2, \quad z|_{x_2=0} = z|_{x_2=l_2}, \quad x_1 \in \bar{\omega}_1, \quad (9)$$

$$k^{(-0,5_1)}(x) z_{\bar{x}_1}|_{x_1=h_1} = k^{(-0,5_1)}(x) z_{\bar{x}_1}|_{x_1=l_1} + \zeta^{(1)}(x_2), \quad x_2 \in \omega_2, \quad (10)$$

$$k^{(-0,5_2)}(x) z_{\bar{x}_2}|_{x_2=h_2} = k^{(-0,5_2)}(x) z_{\bar{x}_2}|_{x_2=l_2} + \zeta^{(2)}(x_1), \quad x_1 \in \omega_1, \quad (11)$$

burada

$$\zeta^{(1)}(x_2) = k^{(-0,5_1)}(x) u_{\bar{x}_1}|_{x_1=l_1} - k^{(-0,5_1)}(x) u_{\bar{x}_1}|_{x_1=h_1}, \quad x_2 \in \omega_2,$$

$$\zeta^{(2)}(x_1) = k^{(-0,5_2)}(x) u_{\bar{x}_2}|_{x_2=l_2} - k^{(-0,5_2)}(x) u_{\bar{x}_2}|_{x_2=h_2}, \quad x_1 \in \omega_1.$$

Əgər  $\psi_h(x)$  funksiyasını  $\psi_h(x) = \varphi_h(x) - S_1 S_2 f(x) + S_1 S_2 f(x) - \Lambda_h u$  kimi yazsaq və  $S_1, S_2, \Lambda_h$  operatorlarının ifadələrindən istifadə etsək, müəyyən çevrilmələrdən sonra aşağıdakı ifadə alırıq:

$$\psi_h(x) = \eta_{x_1}^{(1)}(x) + \eta_{x_2}^{(2)}(x) + \eta^{(3)}(x), \quad x \in \omega,$$

burada

$$\eta^{(1)}(x) = k^{(-0,5_1)}(x) u_{\bar{x}_1} - S_2 \left( k^{(-0,5_1)}(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right), \quad x \in \omega^{(+1)},$$

$$\eta^{(2)}(x) = k^{(-0,5_2)}(x) u_{\bar{x}_2} - S_1 \left( k^{(-0,5_2)}(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \quad x \in \omega^{(+2)},$$

$$\eta^{(3)}(x) = S_1 S_2 (a(x) u) - a_h(x) u, \quad x \in \omega.$$

(8) tənliyini  $z$ -ə skalyar vursaq, hissə-hissə cəmləmə düsturundan və (10)-(11) şərtlərindən istifadə etsək aşağıdakı bərabərliyi alırıq:

$$\begin{aligned} & \sum_{x \in \omega^{(+1)}} k^{(-0,5_1)}(x) z_{\bar{x}_1}^2 h_1 h_2 + \sum_{x \in \omega^{(+2)}} k^{(-0,5_2)}(x) z_{\bar{x}_2}^2 h_1 h_2 + \sum_{x \in \omega} a_h(x) z^2 h_1 h_2 = \\ & = - \sum_{x \in \omega^{(+1)}} \eta^{(1)} z_{\bar{x}_1} h_1 h_2 - \sum_{x \in \omega^{(+2)}} \eta^{(2)} z_{\bar{x}_2} h_1 h_2 + \sum_{x \in \omega} \eta^{(3)} z h_1 h_2 + \\ & + \sum_{x_2 \in \omega_2} \eta^{(4)}(x_2) z(0, x_2) h_2 + \sum_{x_1 \in \omega_1} \eta^{(5)}(x_1) z(x_1, 0) h_1, \end{aligned} \quad (12)$$

burada

$$\begin{aligned} \eta^{(4)}(x_2) &= S_2 \left( k^{(-0,5_1)}(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_1=h_1} - S_2 \left( k^{(-0,5_1)}(x) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_1=l_1}, \quad x_2 \in \omega_2, \\ \eta^{(5)}(x_1) &= S_1 \left( k^{(-0,5_2)}(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=h_2} - S_1 \left( k^{(-0,5_2)}(x) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=l_2}, \quad x_1 \in \omega_1. \end{aligned}$$

(12) bərabərliyinin sol və sağ tərəflərini qiymətləndirərək aşağıdakı teoremi isbat edirik:

**Teorem 2.** Tutaq ki, teorem 1-in şərtləri ödənilir. Onda (8)-(11) məsələsinin həlli üçün aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur:

$$\begin{aligned} (\|\nabla z\|_{0,\omega}^2 + \|z\|_{0,\omega}^2)^{\frac{1}{2}} &\leq M \left[ \|\eta^{(1)}\|_{0,\omega^{(+1)}} + \|\eta^{(2)}\|_{0,\omega^{(+2)}} + \|\eta^{(3)}\|_{0,\omega} + \right. \\ &\quad \left. + \|\eta^{(4)}\|_{0,\omega_2} + \|\eta^{(5)}\|_{0,\omega_1} \right]. \end{aligned}$$

Bu bərabərsizliyin sağ tərəfinə daxil olan normaları qiymətləndirərək aşağıdakı teoremi isbat edirik:

**Teorem 3.** Tutaq ki, teorem 1-in şərtləri ödənilir. Onda (5)-(7) fərq sxemi  $W_2^1(\omega)$  fəzasının normasına görə  $O(|h|)$  sürəti ilə yığılır və aşağıdakı qiymətləndirmə doğrudur:

$$\|y - u\|_{W_2^1(\omega)} \leq M|h| \|u\|_{W_2^2(\Omega)}.$$

### Ədəbiyyat

1. Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщёнными решениями. М.: Высшая школа, 1987, 296 с.
2. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 408 с.



## İQTİSADİYYATDA EHTİMAL HESABLAMA MODELLƏRİ HAQQINDA

**Məmmədova Elnarə Bayram qızı, İzzətova Aysel Faiq qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

[izzetovaqysel2000@gmail.com](mailto:izzetovaqysel2000@gmail.com)

**Xülasə:** *İqtisadiyyatda ehtimal hesablama modelləri qeyri-müəyyənlik şəraitində qərar qəbul etmənin əsasını təşkil edir. Bu modellər risk qiymətləndirməsi, portfel seçimi və iqtisadi proqnozlaşdırmada geniş tətbiq olunur. Əsas konsepsiyalar arasında gözlənilən dəyər, dispersiya, Bayes teoremi və stoxastik proseslər xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. Mövzunun təhlili göstərir ki, ehtimal modelləri iqtisadi agentlərin davranışını riyazi cəhətdən modelləşdirməyə imkan verir və empirik tədqiqatlarda etibarlı nəticələr verir. Bu tezis modellərin əsas düsturlarını və iqtisadi tətbiqlərini qısaca izah edir.*

**Açar sözlər:** *ehtimal modelləri, iqtisadi qərarlar, gözlənilən dəyər, Bayes teoremi, risk qiymətləndirməsi, stoxastik proseslər.*

İqtisadiyyatda ehtimal hesablama modelləri qeyri-müəyyən mühitdə qərarların qəbulu üçün fundamental alətlərdir. İqtisadi agentlər (fərdlər, firmalar və dövlət) gələcək hadisələrin ehtimalını nəzərə alaraq seçimlər edirlər. Bu modellərin əsasında ehtimal nəzəriyyəsinin əsas prinsipləri dayanır və onlar iqtisadiyyatın mikro və makro səviyyələrində tətbiq olunur [1].

Ən sadə və geniş istifadə olunan model gözlənilən dəyər modelidir. Bir diskret təsadüfi dəyişən  $X$  üçün gözlənilən dəyər aşağıdakı düsturla hesablanır:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i \quad (1)$$

burada  $x_i$  mümkün nəticələr,  $p_i$  isə onların ehtimalıdır. İqtisadiyyatda bu düstur investisiya qərarlarında, məsələn, portfel seçimi zamanı tətbiq edilir. Markowitzin portfel nəzəriyyəsində investorlar aktivlərin gözlənilən gəlirini və riskini nəzərə alırlar. Bu dispersiya adlanır. Dispersiya isə belə hesablanır:

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 \cdot p_i. \quad (2)$$

Bu göstərici risk səviyyəsini ölçür və investorların faydalılıq funksiyası ilə birləşdirilir [2].

Qərarların qəbulunda mühüm rol oynayan digər model Bayes teoremidir. Bu teorem yeni məlumat əsasında ehtimalların yenilənməsini təmin edir və düsturu belədir:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \quad (3)$$

İqtisadiyyatda Bayes modeli iqtisadi proqnozlaşdırmada, məsələn, bazar tendensiyaalarının dəyişməsi zamanı istifadə olunur. Agentlər prior ehtimalları (əvvəlki bilik) posterior ehtimallarla (yeni məlumat) əvəz edərək qərarlarını optimallaşdırırlar [3].

Stoxastik proseslər iqtisadiyyatda daha mürəkkəb modellər üçün əsasdır. Markov zəncirləri və Brownian hərəkəti kimi proseslər maliyyə bazarlarında qiymət dəyişikliklərini modelləşdirir. Məsələn, aktiv qiymətinin dəyişməsi üçün sadə stoxastik diferensial tənlik belə yazılır:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (4)$$

burada  $\mu$  drift parametri,  $\sigma$  volatillik,  $W_t$  isə Wiener prosesidir. Bu modellər option qiymətləndirməsi və risk idarəetməsində tətbiq olunur [1].

İqtisadi qərarların nəzəriyyəsində gözlənilən faydalılıq nəzəriyyəsi (expected utility theory) xüsusi yer tutur. Von Neumann və Morgensternə görə, agentlər faydalılıq funksiyası  $u(x)$  əsasında seçim edirlər:

$$EU = \sum p_i \cdot u(x_i) \quad (5)$$

Bu yanaşma riskə münasibəti (risk-averse, risk-neutral, risk-seeking) izah edir və oyun nəzəriyyəsində əsas rol oynayır [4].

Tətbiqlərə gəldikdə, ehtimal modelləri makroiqtisadiyyatda inflyasiya proqnozlarında, mikroiqtisadiyyatda isə təchizat və tələb modellərində istifadə olunur. Məsələn, firmalar istehsal həcmi ehtimal paylanmasına əsasən planlaşdırırlar. Empirik araşdırmalar göstərir ki, bu modellər real iqtisadi məlumatlara uyğunlaşdırıldıqda yüksək proqnoz dəqiqliyi verir [3].

Nəticə olaraq, iqtisadiyyatda ehtimal hesablama modelləri qeyri-müəyyənliyi riyazi cəhətdən idarə etməyə imkan verir. Onların düsturları sadədən mürəkkəbə qədər dəyişir və müasir iqtisadi təhlillərin əsasını təşkil edir. Gələcək tədqiqatlar bu modelləri böyük verilənlər ilə birləşdirərək daha dəqiq nəticələr əldə edə bilər.

### **Ədəbiyyat**

1. R.B.Myerson, E.Zambrano Probability Models for Economic Decisions. MIT Press, 2019.
2. E.A.Ok Probability Theory with Economic Applications. Princeton University Press, 2007.
3. Y.Hong Probability and Statistics for Economists. World Scientific Publishing, 2017.
4. J.V.Neumann, J.O.Morgenstern Theory of Games and Economic Behavior. Princeton University Press, 1944.

## **QEYRİ-MÜƏYYƏNLİK ŞƏRAİTİNDƏ MÜƏSSİSƏNİN İSTEHSAL HƏCMİNİN RİYAZİ PLANLAŞDIRILMASI**

**Məmmədova Elnarə Bayram qızı, Xəlilova Mənzər Teyyub qızı**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*elnaresultanova@mail.ru, menzerxelilova79@gmail.com*

**Xülasə:** *Bu işdə qeyri-müəyyən hava şəraitində tikiş müəssisəsinin istehsal həcmi-  
nin riyazi planlaşdırılması araşdırılmışdır. Oyunlar nəzəriyyəsi üsulları ilə optimal qarışıq  
strategiya müəyyən olunaraq müəssisənin sabit gəlir əldə etməsi təmin edilmişdir.*

**Açar sözlər:** *Qeyri-müəyyənlik, riyazi planlaşdırma, oyunlar nəzəriyyəsi, optimal  
qarışıq strategiya, istehsal planlaşdırılması.*

Qeyri-müəyyənlik şəraitində istehsal həcmi düzgün planlaşdırılması müəssisənin sabit gəlir əldə etməsi üçün vacibdir. Hava şəraitinin dəyişkənliyi satış həcmələrinə təsir göstərdiyindən, riyazi planlaşdırma və oyunlar nəzəriyyəsi üsulları optimal strategiyanın seçilməsinə imkan verir. Bu tədqiqatın məqsədi müəssisəyə müxtəlif şəraitlərdə ən səmərəli istehsal planını müəyyənləşdirməkdir [1].

Uşaq paltarları və kostyumları istehsal edən tikiş müəssisəsi öz məhsullarını firma mağazası vasitəsilə reallaşdırır. Məhsulun satışı hava şəraitindən asılıdır. Əvvəlki illərin statistik göstəricilərinə əsasən, müəssisə aprel-may aylarında isti hava şəraitində 600 kostyum və 1975 paltar, soyuq hava şəraitində isə 1000 kostyum və 625 paltar sata bilər. Məlumdur ki, qeyd olunan aylar ərzində vahid məhsulun maya dəyəri kostyumlar üçün 27 manat, paltar üçün 8 manat təşkil etmişdir. Satış qiyməti isə müvafiq olaraq 48 manat və 16 manatdır [3].

Məqsəd, nəzərdən keçirilən aylarda hava şəraitinin qeyri-müəyyənliyini nəzərə almaqla, məhsul satışından əldə olunan gözlənilən gəliri maksimallaşdırmaqdan ibarətdir. Beləliklə, müəssisənin marketinq xidməti bu şəraitdə hər hansı bir hava şəraitində müəyyən sabit gəliri təmin edən müəyyən etməlidir.

Bu məsələni oyunlar nəzəriyyəsinin üsulları ilə həll edək.

Bu vəziyyətdə oyun "təbiət ilə oyun" tipinə aid olacaqdır. Müəssisə iki strategiyaya malikdir: A strategiyası— isti hava proqnozuna əsaslanan istehsal planı, B strategiyası— soyuq hava proqnozuna əsaslanan istehsal planı. Təbiəti isə iki strategiyalı ikinci oyunçu kimi nəzərdən keçirəcəyik: isti hava (V strategiyası) və soyuq hava (G strategiyası)[2].

Əgər müəssisə A planını seçərsə, isti hava şəraitində (Təbiətin V strategiyası) gəlir:

$$600(48 - 27) + 1975(16 - 8) = 28400 \text{ manat}$$

Əgər müəssisə B planını seçərsə və hava soyuq olarsa, bu zaman gəlir:

$$1000(48 - 27) + 625(16 - 8) = 26000 \text{ manat}$$

İsti hava şəraitində isə gəlir:

$$600(48 - 27) + 625(16 - 8) - (1000 - 600)27 = 6800$$

Beləliklə, bu oyunun ödəniş matrisi aşağıdakı kimidir:

Matrisin birinci və ikinci sətirləri müvafiq olaraq müəssisənin A və B planlarına, birinci və ikinci sütunları isə təbiətin V və G vəziyyətlərinə uyğundur.

$$A = \begin{pmatrix} 6800 & 28400 \\ 26000 & 6800 \end{pmatrix}$$

X müəssisənin A planını tətbiq etmə tezliyini,

$(1 - x)$  isə B planını tətbiq etmə tezliyini bildirsin. Optimal qarışıq strategiya halında müəssisə həm soyuq, həm də isti hava şəraitində eyni gözlənilən gəliri əldə edəcəkdir:

$$6800x + 26000(1 - x) = 28400x + 6800(1 - x)$$

Buradan tapırıq ki,

$$x = 8/17; 1 - x = 9/17$$

Deməli, müəssisə xalis A və B planlarını 8:9 nisbətində tətbiq edərək, hər bir halda ona orta hesabla təxminən 16 965 manat gəlir təmin edən optimal qarışıq strategiyaya malik olacaqdır. Bu məbləğ oyunun qiyməti hesab olunur. Optimal strategiya zamanı istehsal olunmalı məhsul miqdarını hesablamaq asandır:

$$(600 \text{ kostyum} + 1975 \text{ paltar}) 8/17 + (1000 \text{ kostyum} + 625 \text{ paltar}) 9/17 = 812 \text{ kostyum} + 1260 \text{ paltar}$$

Beləliklə, müəssisənin ən səmərəli fəaliyyət planı 812 kostyum və 1260 geyim istehsalından ibarətdir ki, bu da ona istənilən hava şəraitində orta hesabla 16 965 manat gəlir təmin edəcəkdir.

### **Ədəbiyyat**

1. Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике. М.2002. 407с.
2. Həmidov R.H, Allahverdiyeva N.K, Sultanova E.B. Matris oyunları, Bakı, 2015, 58 səh.
3. Федосеев В.В., Гармаш А.Н., Дайитбеков Д.М. и др . Экономико-математические методы и прикладные модели. 2000. - 391 с.

## DÜZBUCAQLI MEMBRANIN RƏQSLƏRİ ÜÇÜN BİR QARIŞIQ MƏSƏLƏYƏ ÇIXIQLAR ÜSULUNUN TƏTBİQİ

**Məmmədova Nəzakət Qəzənfər qızı, Mehdiyeva Qərənfil Hacağa qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

nm-9194@hotmail.com, grnflmehdiyeva03@gmail.com

**Xülasə:** Bu işdə düzbucaqlı membranın rəqsləri üçün qeyri-lokal sərhəd şərtləri daxilində bir qarışıq məsələnin həlli tədqiq olunmuş, uyğun Koşi məsələsi, spektral məsələlər qurulmuş, öyrənilmiş və qarışıq məsələnin həllini verən çıxıqlar sırasının hədləri hesablanmışdır.

**Açar sözlər:** Spektral məsələ, polyus, çıxıq, düzbucaqlı membran.

Təqdim olunan tezis

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$t \in (0, T), \quad x \in (0, a), \quad y \in (0, b) \quad (1)$$

tənliyinin

$$u(0, y, t) - u(a, y, t) = 0$$

$$u'_x(0, y, t) = 0 \quad (2)$$

$$u(x, 0, t) - u(x, b, t) = 0$$

$$u'_y(x, 0, t) = 0 \quad (3)$$

sərhəd şərtlərini və

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right|_{t=0} = \Phi_k(x, y), \quad k=0,1 \quad (4)$$

başlanğıc şərtlərini ödəyən həllinin tapılması məsələsinə həsr olunmuşdur. (1)-(4) məsələsi dəyişənlərə ayırmanın çıxıqlar üsulu ilə həll edilmişdir. Bu məqsədlə uyğun Koşi və spektral məsələləri qurulmuş, tədqiq olunmuş və qarışıq məsələnin həllini verən çıxıqlar sırasının hədləri hesablanmışdır.

**Bu məqsədlə üç məsələ qurulmuşdur:**

1) Koşi məsələsi:

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} - (\lambda^2 + \mu^2)Z = 0 \quad (5)$$

$$Z_t^{(k)}(t, x, y, \lambda, \mu) = \Phi_k(x, y), \quad k = 0,1 \quad (6)$$

2) Spektral məsələ A:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda^2 X = h_1(x) \quad (7)$$

$$X(0) - X(a) = 0, \quad X'(0) = 0 \quad (8)$$

3) Spektral məsələ B:

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \mu^2 Y = h_2(y) \quad (9)$$

$$Y(0) - Y(b) = 0, \quad Y'(0) = 0 \quad (10)$$

Qeyd edək ki, hər üç məsələ həll olunmuş, (7)-(8), (9)-(10) məsələlərinin məxsusi ədədləri tapılmış, onların ikiqat tərtibə malik olduğu göstərilmişdir. Bu məsələlərin köməyiylə (1)-(4) məsələsinin həllini verən

$$u(x, y, t) = \left(\frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^2 \sum_k \int_{\check{C}_k} \mu d\mu \int_0^b G_2(y, \eta, \mu) d\eta \times \sum_v \int_{C_v} \lambda d\lambda \int_0^a G_1(x, \xi, \lambda) Z(t, \xi, \eta, \lambda, \mu) d\xi$$

ikiqat çıxıqlar sırasının hədləri hesablanmışdır.

Burada  $G_1(x, \xi, \lambda)$  və  $G_2(y, \eta, \mu)$  uyğun olaraq A və B məsələlərinin Qrin funksiyaları,  $C_v$ ,  $\check{C}_k$  isə bu funksiyaların  $\lambda_v$  və  $\mu_k$  polyuslarını əhatə edən sadə qapalı konturlardır.  $Z(t, \xi, \eta, \lambda, \mu)$  funksiyası (5)-(6) məsələsinin həlli olub aşağıdakı şəkllə malikdir:

$$Z(t, \xi, \eta, \lambda, \mu) = \Phi_0(x, y) ch\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} t + \frac{\Phi_1(x, y)}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} sh\sqrt{\lambda^2 + \mu^2} t$$

Tezisdə [1,2]-də olan metodlardan istifadə edilmişdir.

#### Ədəbiyyat

1. Расулов М.Л. Применение вычетного метода к решению задач дифференциальных уравнений. Баку: Элм, 1989. [II. Применение вычетного метода к краевым задачам].
2. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1977. [III. Волновое уравнение. Колебания прямоугольной мембраны].

### QAZMA BORU-KƏMƏRİ ÜÇÜN BİR QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN HƏLLİ

**Məmmədova Nəzakət Qəzənfər qızı, Mustafayeva Fatimə Rafiq qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

nm-9194@hotmail.com, fatimemustafayeva061@gmail.com

**Xülasə:** Təqdim olunan tezis endirilmə zamanı qazma boru-kəmərinin yuxarı hissəsinin ani dayandırılması zamanı onun hərəkəti tənliyi üçün bir qarışıq məsələyə Furiyinin dəyişənlərə ayırma üsulunun tətbiqinə həsr olunub.

**Açar sözlər:** Furiy üsulu, Koşi məsələsi, başlanğıc şərtlər, sərhəd şərtləri, məxsusi ədədlər, məxsusi funksiyalar.

Qazma boru-kəmərlerinin istismarı zamanı onların hərəkət rejiminin qəfil dəyişməsi mürəkkəb dinamik proseslərin yaranmasına səbəb olur. Xüsusilə, endirilmə zamanı borunun yuxarı hissəsinin ani dayandırılması elastik dalğaların yaranmasına və boru boyunca yayılmasına gətirib çıxarır.[3] Bu proseslər boruda əlavə gərginliklər yaradaraq onun dayanıqlığına mənfi təsir göstərə bilər. Buna görə də, belə halların riyazi modelləşdirilməsi və analizi mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Burada qazma boru-kəmərinin hərəkət tənliyi üçün qarışıq məsələ qurulmuş və onun həllinə Furye üsulu tətbiq olunmuşdur. [4]

Boru -kəmərin hərəkəti

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g \quad x \in (0, l) \quad t \in (0, l) \quad (1)$$

diferensial tənliyi ilə təsvir olunur. Kəmərin dayanmasından sonra onun aşağı ucuna qazma məhlulunun statik təzyiqinin təsir etdiyini nəzərə alaraq, sərhəd şərtləri

$$u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad E \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = -\gamma \ell \quad (2)$$

kimi, başlanğıc şərtləri isə

$$u(x, t)|_{t=0} = -\frac{\gamma \ell x}{E}, \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = v_0 \quad (3)$$

kimi verilir. Qeyd edək ki, burada  $\ell$  -boru kəmərin uzunluğu,  $\gamma$  -qazma məhlulunun xüsusi çəkisi,  $g$ - borunun təcili,  $v_0$ - sürəti,  $E$  -materialın gərginlik moduludur. [1]

Sərhəd şərtləri və tənliyin sağ tərəfindəki  $g$  funksiyası zaman dəyişənindən asılı olmadığı üçün məsələyə stasionar qeyri-bircins məsələ kimi baxa bilərik.

(1)-(3) məsələsinin həllini  $u_1(x)$  və  $u_2(x, t)$  funksiyalarının cəmi şəklində axtarsaq onlar üçün uyğun olaraq aşağıdakı məsələləri alırıq:

$$1) \quad a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + g = 0 \quad (4)$$

$$E \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=l} = -\gamma \ell \quad (5)$$

$$u_1(x) \Big|_{x=0} = 0 \quad (6)$$

$$2) \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad (7)$$

$$u_2(x, t) \Big|_{x=0} = 0 \quad \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0 \quad (8)$$

$$u_2(x, t) = -\frac{g}{2a^2}(2lx - x^2) \quad (9)$$

$$\left. \frac{u_2(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = v_0$$

Asanlıqla görmək olar ki, (4)-(5)-(6) məsələsinin həlli

$$u_1(x) = -\frac{gx^2}{2a^2} + \left(\frac{gl}{a^2} - \frac{\mathcal{N}}{E}\right)x$$

funksiyasıdır. [2]

(7)-(8)-(9) məsələsinin həllini qurmaq üçün Furiyenin dəyişənlərə ayırma üsulu tətbiq olunmuşdur. [3]

Nəticədə, uyğun Koşi məsələsi və spektral məsələ qurulmuş, məxsusi ədədlər və funksiyalar tapılmışdır. Başlangıç funksiyaların Furiye sırasına ayrılış əmsalları hesablanmış, Koşi məsələsi həll olunmuş və sonda məsələnin həllini verən sıranın hədləri dəqiq təyin olunmuşdur.

#### Ədəbiyyat

1. Мирзаджанзаде А.Х., Керимов Г., Копейкис М.Г., Теория колебаний в нефте-промышленном деле, Москва-Ижевск, 2005
2. Степанов В.В., Курс дифференциальных уравнений, Москва, Наука, 1989
3. Мамедова Н.Г., Аббасова А.Х., Решение одной смешанной задачи для вынужденных колебаний колонны бурильных труб при глубоководном бурении, Актуальная наука: Международный научный журнал. Волгоград: НИЦ «Абсолют», 2024. – № 3 (59)
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А., Уравнения математической физики, Москва, Наука, 2004

### İSTİLİKKEÇİRMƏ TƏNLİYİ ÜÇÜN FAZA MƏHDUDİYYƏTLİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİNƏ CƏRİMƏ FUNKSİYALARI ÜSULUNUN TƏTBİQİ

**Məmmədova Zərifə Rizvan qızı**

(BDU, Tətbiqi-riyaziyyat və kibernetika fakültəsi, SABAH qrupları)

zarifamammadova.sabah@gmail.com

**Xülasə:** Bu işdə istilikkeçirmə tənliyi ilə təsvir olunan sistemlər üçün optimal idarəetmə məsələsi araşdırılmışdır. Məsələdə sistemin vəziyyətinə qoyulan faza məhdudiyyətləri nəzərə alınaraq məsələni həll etmək üçün cərimə funksiyaları üsulundan istifadə edilmişdir.

**Açar sözlər:** istilikkeçirmə tənliyi, cərimə funksiyaları üsulu, diferensiallanma, qradient.



Praktikada bir sıra optimal idarəetmə məsələləri yaranır. Bunlardan biri də çubuğun qızdırılması prosesi üçün olan optimal idarəetmə məsələsidir.

Tutaq ki,  $l$  uzunluqlu  $0 \leq s \leq l$  çubuğunun sol ucu istilik axınına qarşı izolyasiya olunub, sağ ucunda ətraf mühitlə istilik mübadiləsi baş verir. Çubuğun daxili nöqtələrində istilik mənbələrinin sıxlığı  $f(s, t)$  ilə işarə olunur.  $t, 0 \leq t \leq T$  zaman anında ətraf mühitin temperaturunu  $p(t)$ , çubuğun  $s$  nöqtəsindəki temperaturunu isə  $x = x(s, t)$  ilə işarə edək.  $t = 0$  anında çubuğun istilik paylanması  $x(s, 0) = \varphi(s)$  olacaq. Məsələni qurmaqda məqsəd, istilik mənbələrini elə idarə etməkdir ki, çubuğun temperaturu  $T > 0$  anında verilmiş paylanmaya mümkün qədər yaxın olsun.

Bu məsələni riyazi şəkildə aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$J(u) = \int_0^l |x(s, T, u) - y(s)|^2 ds, \quad (1)$$

Burada,  $x = x(s, t, u)$  aşağıdakı sərhəd məsələsinin həllidir:

$$x_t = a^2 x_{ss} + f(s, t), \quad (s, t) \in Q = \{0 < s < l, 0 < t \leq T\}, \quad (2)$$

$$x_s|_{s=0} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (3)$$

$$x_s|_{s=l} = \nu[p(t) - x(l, t)], \quad 0 < t \leq T, \quad (4)$$

$$x|_{t=0} = \varphi(s), \quad 0 \leq s \leq l, \quad (5)$$

burada,  $a^2, l, \nu, T$  – verilmiş müsbət ədədlər,  $u = (p(t), f(s, t))$  isə aşağıdakı şərtləri ödəyən idarəedici vektor funksiyalardan ibarət  $U$  çoxluğuna daxildir:

$$p = p(t) \in L_2[0, T], \quad p_{\min} \leq p(t) \leq p_{\max}, \quad [0, T] - d\text{ə s.h.y.} \quad (6)$$

$$f = f(s, t) \in L_2(Q), \quad \iint_Q |f(s, t)|^2 ds dt \leq R^2, \quad (7)$$

burada,  $p_{\min} < p_{\max}, R > 0$  – verilmiş ədədlər,  $\varphi(s), y(s) \in L_2[0, l]$  – verilmiş funksiyalar və s.h.y. – sanki hər yerdə deməkdir.

(1) funksionalını (2)-(7) və

$$x(s, t, u) \leq \bar{x}, \quad (s, t) \in Q, \quad (8)$$

bərabərsizliyinin ödənilməsi şərti ilə minimallaşdırmaq tələb olunur.

Bu cür məsələlər bərk materialların qızdırılması zamanı ortaya çıxır və burada materialın temperaturu  $\bar{x}$  böhran temperaturundan çox olmamalıdır [1].

(1)-(8) məsələlərinin həlli üçün cərimə funksiyaları üsulundan istifadə edə bilərik[2]. (8) şərtinə uyğun cərimə funksiyasını götürək:

$$P_k(u) = A_k \iint_Q |\max\{x(s, t, u) - \bar{x}; 0\}|^2 ds dt.$$

Burada,  $\{A_k\}$  ardıcılığı müsbət ardıcılıqdır və  $k \rightarrow \infty$  olduqda,  $\{A_k\} \rightarrow \infty$ .

(1)-(8) məsələsini aşağıdakı optimal idarəetmə məsələlər ardıcılığı ilə əvəz edək: tutaq ki,

$$\Phi_k(u) = \int_0^l |x(s, T, u) - y(s)|^2 ds + P_k(u) \quad (9)$$

funksionalını (2)-(7) şərtləri ödənilməklə minimallaşdırmaq tələb olunur.

Göstərmək olar ki, (9) funksionalı  $H = L_2[0, T] \times L_2(Q)$  fəzasında Freşe mənada diferensiallanandır və onun qradiyenti üçün aşağıdakı bərabərlik doğrudur:

$$\Phi'_k(u) = (a^2 v \psi_k(l, t, u); \psi_k(s, t, u)) \in H, \quad (10)$$

burada,  $\psi_k(s, t, u)$  aşağıdakı məsələnin həllidir:

$$\psi_t = -a^2 \psi_{ss} - 2A_k \max\{x(s, t, u) - \bar{x}; 0\}, \quad (s, t) \in Q, \quad (11)$$

$$\psi_s|_{s=0} = 0, \quad \psi_s|_{s=l} = -v\psi(l, t) \quad 0 < t < T, \quad (12)$$

$$\psi|_{t=T} = 2(x(s, T, u) - y(s)), \quad 0 \leq s \leq l. \quad (13)$$

(10) düsturunu almaq üçün (9) funksionalının  $\Delta\Phi_k(u)$  artımını aşağıdakı kimi ifadə edirik:

$$\begin{aligned} \Delta\Phi_k(u) &= \int_0^l 2(x(s, T, u) - y(s))\Delta x(s, T)ds + \\ &+ \iint_Q 2A_k \max\{x(s, t, u) - \bar{x}; 0\}\Delta x(s, t)dsdt + R_k. \end{aligned} \quad (14)$$

burada,  $R_k$  qalıq həddir və onu aşağıdakı şəkildə qiymətləndirmək olar:

$$|R_k| \leq \int_0^l |\Delta x(s, t)|^2 dsdt + 2A_k \iint_Q |\Delta x(s, t)|^2 dsdt. \quad (15)$$

(14) və (15) düsturlarını almaq üçün  $g(z) = (\max\{z; 0\})^2$ ,  $g'(z) = 2\max\{z; 0\}$  və  $|\max\{z + \Delta z; 0\} - \max\{z; 0\}| \leq |\Delta z|$  münasibətlərindən istifadə edirik. Sonra aşağıdakı bərabərliyin doğruluğunu isbat edirik:

$$\begin{aligned} \int_0^l 2(x(s, T, u) - y(s))\Delta x(s, T)ds &= \int_0^T a^2 v \psi_k(l, t, u)\Delta p(t)dt + \\ &+ \iint_Q \psi_k(s, t, u)\Delta f(s, t)dsdt - \iint_Q 2A_k \max\{x(s, t, u) - \bar{x}; 0\}\Delta x(s, t)dsdt. \end{aligned}$$

Bu bərabərliyə əsasən (14) bərabərliyi aşağıdakı kimi olur:

$$\Delta\Phi_k(u) = \int_0^T a^2 v \psi_k(l, t, u) \Delta p(t) dt + \iint_Q \psi_k(s, t, u) \Delta f(s, t) ds dt + R_k.$$

Buradan isə (10) düsturunun doğruluğu alınır.

Cərimə funksiyasının qradiyenti üçün alınmış (10) düsturundan istifadə edərək (9) funksionalının (2)-(7) şərtləri daxilində minimallaşdırılması məsələsinin təqribi həlli üçün qradiyentin proyeksiyası və ya şərti qradiyent üsullarının birindən istifadə edirik.  $k$  parametrinin böyük qiymətlərində (9), (2)-(7) məsələsinin təqribi həlli (1)-(8) məsələsinin həlli kimi qəbul olunur.

### Ədəbiyyat

1. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981, 400 с.
2. Tağıyev R.Q., Həşimov S.A. Optimallaşdırma və idarəetmənin riyazi əsasları. Bakı: "Turxan" NPB, 2021, 184 s.

## BİRİNCİ TƏRTİB DİFFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN ÇOXNÖQTƏLİ SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN TƏDQIQI

**Mikayılova Gülay Mürşüd qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

*gulaymikayilova20@gmail.com*

**Xülasə:** Bu işdə birinci tərtib differensial tənlik üçün çoxnöqtəli sərhəd məsələsinin həlli ekvivalent çevrilmələrin köməyiylə inteqral tənliyə gətirilir və Banaxın sıxılmış inikas prinsipi ilə həllin varlığı və yeganəliyi üçün kafi şərtlər tapılır.

**Açar sözlər:** Çoxnöqtəli sərhəd məsələsi, Banaxın sıxılmış inikas prinsipi, həllin varlığı və yeganəliyi, inteqral tənlik

Tezisdə

$$\dot{x} = f(t, x(t)), \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

differensial tənliyinin

$$\sum_{i=0}^m l_i x(t_1) = c \quad (2)$$

şərtini ödəyən həllinin araşdırılması məsələsinə baxılır. Burada  $x(t)$  axtarılan  $n$ -ölçülü funksiyadır,  $f: [0, T] \times R^n \rightarrow R^n$  verilmiş funksiyadır.  $A_i \in R^{n \times n}$ ,  $i=1, 2, \dots, m$  verilmiş matrislərdir və

$$N = \sum_{i=0}^m l_i, \det \left( \sum_{i=1}^n l_i \right) \neq 0, \quad C \in R^n$$

verilmiş vektordur. Ekvivalent çevrilmələrin köməyiylə (1),(2) sərhəd məsələsi integral tənliyə gətirilir:

$$x(t) = N^{-1}\alpha + \int_0^T G(t, \tau)y(\tau) d\tau,$$

burada

$$G(t, \tau) = \begin{cases} G_1(t, \tau), & t \in [0, t_1], \\ G_2(t, \tau), & t \in (t_1, t_2], \\ \dots & \\ G_m(t, \tau), & t \in (t_{m-1}, T] \end{cases}$$

$$G_i(t, \tau) = \begin{cases} N^{-1}l_0, & t_0 \leq \tau \leq t_1, \\ N^{-1} \left( \sum_{k=0}^1 l_k \right), & t_1 < \tau \leq t_2, \\ \dots & \\ N^{-1} \left( \sum_{k=0}^i l_k \right), & t_{i-1} < \tau \leq t_i, \\ -N^{-1} \left( \sum_{k=i+1}^m l_k \right), & t_i < \tau \leq t_{i+1}, \\ -N^{-1} \left( \sum_{k=i+2}^m l_k \right), & t_{i+1} < \tau \leq t_{i+2}, \\ \dots & \\ -N^{-1}l_m, & t_{m-1} < \tau \leq T \end{cases}$$

Banaxın sıxılmış inikas prinsipinin köməyi ilə sərhəd məsələsinin həllinin varlığı və yeganəliyi üçün kafi şərtlər tapılmışdır. Oxşar məsələlər [1-4] işlərində tədqiq olunmuşdur.

### Ədəbiyyat

1. M. J. Mardanov, Y. A. Sharifov, H. N. Aliyev, R. A. Sardarova – Existence and uniqueness of solution for the first order non-linear differential equations with multi-point boundary conditions; European journal of pure and applied mathematics. Vol.13, No.3, 2020, 414-426
2. E. V. Gnyp, Continuity with respect to the parameter of the solutions of one-dimensional boundary value problem in Slobodetskii spaces, Ukrainian Math. J. 68 (2016), no. 6, 849-861.
3. T. Kiguradze, Some singular boundary-value problems for ordinary differential equations, Izdat. Tbilis. Univ., Tbilisi, 1975. (Russian)
4. I. T. Kiguradze, Boundary-value problems for systems of ordinary differential equations, J. Soviet Math. 43 (1988), 2259-2339.

## BİR DİSKRET PAYLANMIŞ VƏ TOPLANMIŞ PARAMETRLİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ŞƏRTİ

**Mikayılova Nəzrin Faiq qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

mikayilovanezrin02@gmail.com

**Xülasə:** İşdə diskret paylanmış və toplanmış parametrlə optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Məsələdə minimumu axtarılan funksional kəsilməz diferensiallanan və qabarıq funksiya olduğu halda optimallıq üçün kafi şərt alınır.

**Açar sözlər:** diskret paylanmış və toplanmış optimal idarəetmə məsələsi, mümkün idarə, Pontryaginın maksimum prinsipi, optimal idarə, kafi şərt.

Tutaq ki, idarə olunan proses

$$z(t+1, x) = A(t, x)z(t, x) + f(t, x, u(t)), \quad (1)$$

$$t \in T = \{t_0, t_0 + 1, \dots, t_1 - 1\}, \quad x \in X = [x_0, x_1],$$

$$z(t_0, x) = a(x), \quad x \in X \quad (2)$$

diskret kəsilməz məsələ və

$$a(x) = \int_{x_0}^x (B(x, s)a(s) + g(x, s, v(s)))ds, \quad x \in X \quad (3)$$

Volterra tip integral tənliklər sistemi ilə təsvir olunur.

Fərz olunur ki,  $A(t, x)$  verilmiş  $t$ -yə nəzərən diskret,  $x$ -ə nəzərən kəsilməz olan  $(n \times n)$  – ölçülü matris funksiya,  $B(x, s)$  verilmiş  $(n \times n)$  – ölçülü kəsilməz olan matris funksiya,  $g(x, s, v)$  verilmiş arqumentlərinin küllusünə nəzərən kəsilməz olan  $n$  – ölçülü vektor funksiya,  $f(t, x, u)$  verilmiş  $t$ -yə nəzərən diskret,  $x$  və  $u$ -yə nəzərən kəsilməz olan  $n$  – ölçülü vektor funksiya,  $u(t)$  –  $r$  ölçülü diskret idarəedici vektor funksiya,  $v(x)$  isə  $q$  – ölçülü hissə-hissə kəsilməz olan idarəedici vektor funksiyalar olub, öz qiymətlərini verilmiş boş olmayan,  $U \subset R^r, V \subset R^q$  çoxluqlarından alınırlar, yəni

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T, \quad (4)$$

$$v(x) \in V \subset R^q, \quad x \in X \quad (5)$$

Bu məhdudiyyət şərtlərini ödəyən  $(u(t), v(x))$  cütünə mümkün idarə deyilir.

Baxılan (1)-(2) Koşi məsələsinin və (4) interqal tənliklər sisteminin bütün mümkün idarələrə uyğun həlləri üzərində

$$S(u, v) = \varphi_1(a(x_1)) + \int_{x_0}^{x_1} \varphi_2(x, z(t_1, x)) dx + \\ + \int_{x_0}^{x_1} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} F(t, x, u(t)) dx + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \int_{x_0}^{x_1} G(t, x, v(x)) dx \quad (6)$$

funksionalı təyin edilir.

Burada  $\varphi_1(a)$  verilmiş, kəsilməz diferensiasillanan və qabarıq olan skalyar funksiya,  $\varphi_2(x, z)$  verilmiş kəsilməz olan,  $z$ -ə nəzərən diferensiasillanan qabarıq olan skalyar funksiya,  $F(t, x, u)$  və  $G(t, x, v)$  verilmiş skalyar funksiyalar olub  $t$ -yə görə diskret, digər arqumentlərinə görə isə kəsilməzdirlər.

Bu qoyulan məhdudiyyətlər daxilində (6) funksionalının minimumunun tapılması məsələsinə baxılır.

Əgər (1)-(2) başlanğıc məsələsinin və (3) tənliklər sisteminin  $(u(t), v(x))$  mümkün idarələri onlara uyğun  $(z(t, x), a(x))$  həlləri ilə birlikdə (6) funksionalına minimum verərsə, onda bu  $(u(t), v(x))$  mümkün idarəsinə optimal idarə deyəcəyik.

Məqsədimiz baxılan məsələdə Pontryaginın maksimum prinsipi tipli kafi şərt almaqdır (bax məsələ [1]).

Bunun üçün artım üsulundan istifadə edərək Hamilton-Pontryagin funksiyasının analoquunu

$$H(t, u(t), \psi(t, x)) = -F(t, u(t)) + \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) f(t, x, u(t, x)) dx, \\ M(x, v(x), p(x)) = -G(x, v(x)) - \int_{x_0}^{x_1} p'(s) g(s, x, v(x)) ds$$

şəklində təyin edək.

Fərz edək ki,  $p(x)$ ,  $\psi(t, x)$  vektor-funksiyaları aşağıdakı qoşma məsələnin həlləridirlər.

$$\psi(t-1, x) = A'(t, x) \psi(t, x), \\ \psi(t_1-1, x) = -\frac{\partial \varphi_2'(x, z(t_1, x))}{\partial z}, \\ p(x) = -\int_{x_0}^{x_1} B'(s, x) p(s) ds - B'(x_1, x) \frac{\partial \varphi_1'(a(x_1))}{\partial a}.$$

Funksionalın artım düsturu və qabarıq funksiyanın məlum xassəsindən istifadə edərək baxılan məsələ üçün qoyulmuş şərtlər daxilində Pontryaginın

maksimum prinsipinin optimallıq üçün kafi şərt olduğu (bax məsələn [2, 3]) aşağıdakı teorem vasitəsilə isbat edilir.

**Teorem 1.** Verilmiş (1)-(5) optimal idarəetmə məsələsində  $\varphi_1(a)$ ,  $\varphi_2(x, z)$  kəsilməz diferensiaslanan və qabarıq funksiyalar olarsa, onda  $(u(t), v(x))$  mümkün idarəsinin optimal idarə olması üçün kafi şərt

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left( H(t, x, \bar{u}(t), \psi(t, x)) - H(t, x, u^0(t), \psi(t, x)) \right) \leq 0$$

bərabərsizliyinin ixtiyari  $u(t) \in U, t \in T$  üçün,

$$\int_{x_0}^{x_1} [M(x, s, \bar{v}(x), p(x)) - M(x, s, v^0(x), p(x))] dx \leq 0$$

bərabərsizliyinin isə ixtiyari  $v(x) \in X, x \in X$  üçün ödənmələridir.

### Ədəbiyyat

1. Бутковский А.Г. Управление в системах с распределёнными параметрами.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Альсевич В. В. Методы оптимизации. Минск: Четыре четверти, 2011. 472 с.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Принцип максимума в теории оптимального управления. М.: URSS, 2011. 272 с.

## BİR DİSKRET PAYLANMIŞ VƏ TOPLANMIŞ PARAMETRLİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ I VƏ II TƏRTİB ZƏRURİ ŞƏRTLƏR

**Mikayılova Nəzrin Faiq qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

*mikayilovanezrin02@gmail.com*

**Xülasə:** İşdə diskret paylanmış və toplanmış parametrlə optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Məsələdə minimumu axtarılan funksional qeyri-xətti olduğu halda klassik mənada məxsusi idarələr tədqiq olunur. Məxsusi idarələrin optimallığı üçün zəruri şərt alınır.

**Açar sözlər:** diskret paylanmış və toplanmış optimal idarəetmə məsələsi, mümkün idarə, Pontryaginın maksimum prinsipi, optimal idarə, məxsusi idarə, zəruri şərt.

Fərz edək ki, zamana nəzərən diskret, fəza dəyişəninə görə isə kəsilməz olan proses

$$z(t+1, x) = A(t, x)z(t, x) + f(t, x, u(t)), \quad (1)$$
$$t \in T, x \in X$$

tənliklər sistemi

$$z(t_0, x) = a(x), \quad x \in X \quad (2)$$

başlangıç şərti ilə təsvir olunur.

Burada  $A(t, x)$  verilmiş  $t$ -yə nəzərən diskret,  $x$ -a nəzərən kəsilməz olan  $(n \times n)$  – ölçülü matris funksiya,  $f(t, x, u)$  verilmiş  $n$  – ölçülü vektor funksiya olub,  $t$ -yə nəzərən diskret,  $(x, u)$ -ya nəzərən ikinci tərtib törəmələri ilə birlikdə kəsilməz olan vektor funksiya,  $a(x)$  –  $n$ - ölçülü başlangıç vektor funksiya olub

$$a(x) = \int_{x_0}^x (B(x, s)a(s) + g(x, s, v(s)))ds, \quad x \in X \quad (3)$$

Volterra tip integral tənliyi vasitəsilə təyin olunur.

Burada  $B(x, s)$  verilmiş  $(n \times n)$  ölçülü kəsilməz olan matris funksiya,  $g(x, s, v)$  isə  $n$  ölçülü kəsilməz vektor funksiya olub  $v$ -ə nəzərən ikinci tərtib törəmələri ilə birlikdə kəsilməzdir,  $u(t)$  –  $r$  ölçülü diskret idarəedici vektor funksiya,  $v(x)$   $q$  ölçülü idarəedici vektor funksiyası hissə-hissə kəsilməz vektor funksiyalardır.

Fərz olunur ki,  $U \subset R^r$ ,  $V \subset R^q$  verilmiş  $r$  və  $q$  ölçülü, boş olmayan, məhdud və açıq çoxluqlardır. Əgər hər bir  $u(t)$  və  $v(x)$  uyğun olaraq

$$u(t) \in U \subset R^r, \quad t \in T, \quad (4)$$

$$v(x) \in V \subset R^q, \quad x \in X, \quad (5)$$

münasibətlərini ödəyərsə onda  $(u(t), v(x))$  cütünə mümkün idarələr deyəcəyik.

Baxılan optimal idarəetmə məsələsində keyfiyyət meyarını

$$\begin{aligned} S(u, v) = & \varphi_1(a(x_1)) + \int_{x_0}^{x_1} \varphi_2(x, (z(t_1, x)))dx \\ & + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \int_{x_0}^{x_1} F(t, x, u(t))dx + \int_{x_0}^{x_1} G(x, v(x))dx \end{aligned} \quad (6)$$

şəklində təyin edək.

Burada  $\varphi_1(a)$ ,  $\varphi_2(x, z)$ - verilmiş skalyar funksiyalar olub argumentlərinin küllusünə nəzərən uyğun olaraq  $u$  və  $v$  -yə nəzərən törəmələri ilə birlikdə kəsilməzdir,  $F(t, x, u)$   $u$ -ya görə ikinci tərtibdən kəsilməz törəmələrə malikdir,  $G(x, v)$  isə  $z$ -ə görə ikinci tərtibdən kəsilməz törəmələrə malikdir.

(6) funksionalının (1)-(5) məhdudiyyətləri daxilində minimumunun tapılması məsələsinə baxılır.

Baxılan (1)-(2) məsələsinin və (3) integral tənliklər sisteminin (6) funksionalına minimum qiymət verən  $(u(t), v(x))$  mümkün idarəsinə optimal idarə deyilir.



Məqsədimiz baxılan məsələdə Pontryaginın maksimum prinsipi tipli kafi şərt almaqdır (bax məsələ [1]).

Fərz edək ki,  $\psi(t, x)$  və  $p(x)$  vektor-funksiyası

$$\psi(t-1, x) = A'(t, x)\psi(t, x),$$

$$\psi(t_1-1, x) = -\frac{\partial \varphi'_2(x, z)}{\partial z},$$

$$p(x) = -\int_{x_0}^{x_1} B'(s, x) p(s) ds - B'(x_1, x) \frac{\partial \varphi'_1(a)}{\partial a}$$

münasibələrini ödəyirlər və Hamilton –Pontryagin funksiyalarını aşağıdakı şəkildə daxil edək.

$$H(t, x, u(t), \psi(t, x)) = -F(t, u(t)) - \int_{x_0}^{x_1} \psi'(t, x) f(t, x, u(t, x)) dx,$$

$$M(x, v(x), p(x)) = -G(x, v(x)) + \int_{x_0}^{x_1} p'(s) g(s, x, v(x)) ds -$$

$$- \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \varphi_1(a(x_1))}{\partial a} g(x_1, x, v(x)).$$

Funksionalın artım düsturundan funksionalın birinci və ikinci variationaları aşağıdakı şəkildə tapılmışdır.

$$\delta^1 S(u^0, v^0; \delta u, \delta v) = - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial H'(t, x, u^0(t), \psi(t, x))}{\partial u} \delta u(t) dx -$$

$$- \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial M'(x, v^0(x), p(x))}{\partial v} \delta v(x) dx,$$

$$\delta^2 S(u^0, v^0; \delta u, \delta v) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \int_{x_0}^{x_1} \delta u'(t) \frac{\partial^2 H(t, x, u^0(t), \psi(t, x))}{\partial u^2} \delta u(t) dx -$$

$$- \int_{x_0}^{x_1} \delta v'(x) \frac{\partial^2 M(x, v^0(x), p(x))}{\partial v^2} \delta v(x) dx -$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} \delta z'(t_1, x) \frac{\partial^2 \varphi_2(x, z(t_1, x))}{\partial z^2(t_1, x)} \delta z(t_1, x) +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} \delta a(x_1) \frac{\partial^2 \varphi'_1(a(x_1))}{\partial a^2} \delta a(x_1).$$

$U$  və  $V$  idarə oblastları açıq çoxluqlardır. Ona görə optimal bir proses

boyunca funksionalın birinci variasiyası sıfıra bərabər, ikinci variasiyası mənfi olmamalıdır. Beləliklə aşağıdakı hökmü isbat etmiş olduq [2, 3].

**Teorem.** Əgər  $U_1$  və  $U_2$  çoxluqları açıq çoxluqladırsa, onda  $(u(t), v(x))$  mümkün idarəsinin optimal idarə olması üçün ikinci tərtib zəruri şərt

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} u' \frac{\partial^2 H(\theta, x, u^0(\theta), \psi(\theta, x))}{\partial u^2} u dx + \\ & + \int_{x_0}^{x_1} v' f_u(\theta, x) \Phi'(t_1, \theta, x) \frac{\partial^2 \varphi_2(x, z(t_1, x))}{\partial z^2(t_1, x)} \Phi(t_1, \theta, x) f_u(\theta, x) u' dx \leq 0, \\ & v' \frac{\partial^2 M(x, v, p(x))}{\partial v^2} v + \\ & + v' g_v(x_1, \xi) F(x_1, \xi) \frac{\partial^2 \varphi'_1(a(x_1))}{\partial a^2} F(x_1, \xi) g_v(x_1, \xi) v \leq 0 \end{aligned}$$

bərabərsizliklərinin ixtiyari  $u \in U, \theta \in T, v \in V, \xi \in X$  üçün ödənmələridir.

#### Ədəbiyyat

1. Бутковский А.Г. Управление в системах с распределениями параметрами.
2. Мансимов К.Б. Особые управление в системах с распределенными параметрами // Современная математика и его приложения. 2016, т.42, с.39-83
3. Мансимов К. Б., Расулова Ш. М. Об оптимальности особых управлений в одной задаче оптимального управления, Вестник. Томск. гос. Унив. Мат. и мех., 2018, н. 54, 17–33.

### MALİYYƏ ƏMƏLİYYATLARINDA DƏLƏDUZLUĞUN AŞKAR EDİLMƏSİ ÜÇÜN ANOMALİYALARIN MÜƏYYƏNLƏŞDİRİLMƏSİ VƏ MƏLUMAT BALANSININ İDARƏ OLUNMASI

**Mirzai Səbinə Nobəri qızı, Əzizova Səbinə Rafail qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

sabinamirzaei@gmail.com, sabinaazizova2000@mail.ru

**Xülasə:** Maliyyə əməliyyatlarında dələduzluğun aşkarlanması bank və maliyyə sektorunda ən vacib problemlərdən biridir. Rəqəmsal əməliyyatların həcminin artması ilə dəqiq, sürətli və miqyaslı yanaşmalara tələbat artır. Bu tədqiqatda, ciddi məlumat balanssızlığını aradan qaldırmaq və real dünya şəraitində modelin performansını artırmaq üçün SMOTE texnikası ilə yanaşı, Isolation Forest və Autoencoder də daxil olmaqla anomaliya aşkarlama alqoritmlərindən istifadə edən dələduzluğun müəyyən edilməsi üçün hibrid bir

*çərçivə təklif edirik. Maliyyə sistemlərinin rəqəmsallaşması ilə dələduzluq halları daha mürəkkəb və çoxşaxəli xarakter almışdır. Bu işdə maliyyə əməliyyatlarında dələduzluğun aşkar edilməsi üçün anomaliya aşkarlanması yanaşmaları və məlumat balanssızlığı probleminin idarə olunması üsulları təhlil edilir. Müasir maşın öyrənməsi metodlarının tətbiqi və balanslaşdırma texnikalarının effektivliyi araşdırılır.*

**Açar sözlər:** SMOTE texnikası, Autoencoder, Isolation Forest, anomaliya aşkarlanması, maliyyə dələduzluğu, maşın öyrənməsi, məlumat balans, sinif balanssızlığı.

Son illərdə elektron ödəniş sistemlərinin və onlayn bankçılığın geniş yayılması maliyyə əməliyyatlarının həcmi əhəmiyyətli dərəcədə artırmışdır. Bununla yanaşı, dələduzluq fəaliyyətləri daha mürəkkəb hala gəlmişdir. Ənənəvi qayda əsaslı metodların effektivliyi məhdud olduğundan, daha inkişaf etmiş yanaşmalara ehtiyac yaranmışdır [1]. Bu kontekstdə, anomaliya aşkarlanması və məlumat balansının idarə olunması mühüm rol oynayır.

Anomaliya aşkarlanması metodları

Anomaliya aşkarlanması normal davranışdan kənara çıxan halların müəyyən edilməsinə yönəlmişdir. Bu metodlar aşağıdakı kimi təsnif olunur:

- Nəzarətli metodlar – etiketlenmiş məlumatlarla işləyir [2];
- Nəzarətsiz metodlar – struktur və nümunələri öz-özünə aşkar edir;
- Yarımnezarətli metodlar – əsasən normal məlumatlarla öyrədilir.

Bu metodlar maliyyə əməliyyatlarında şübhəli tranzaksiyaların müəyyən edilməsində geniş istifadə olunur [2].

Məlumat balanssızlığı problemi

Maliyyə dələduzluğunun aşkarlanmasında əsas çətinliklərdən biri məlumatların balanssız olmasıdır. Saxta əməliyyatlar ümumi məlumatın çox kiçik hissəsini təşkil edir və bu, modelin düzgün öyrənməsinə mane olur [3].

Bu vəziyyət aşağıdakı problemlərə səbəb olur:

Aşağı aşkar etmə qabiliyyəti,

Yüksək yanlış nəticələr,

Modelin qeyri-effektivliyi [3].

Məlumat balansının idarə olunması üsulları

Balanssızlıq problemini aradan qaldırmaq üçün aşağıdakı metodlardan istifadə olunur:

- Oversampling (SMOTE) – azlıqda olan sinfin artırılması [4];
- Undersampling – çoxluqda olan sinfin azaldılması;
- Hibrid yanaşmalar;
- Xərcə həssas öyrənmə.

Maşın öyrənməsində (ML) balanslaşdırma, əgər əlimizdəki məlumat dəs-

tində (dataset) bir sinif digərlərindən çoxdursa (məsələn, 90% "sağlam", 10% "xəstə"), bu üsullardan istifadə olunur.

Oversampling (SMOTE) Azlıq təşkil edən sinfin nümunələrini süni şəkildə çoxaltmaq nəzərdə tutulur. Undersampling (Azaltma): Çoxluq təşkil edən sinfin nümunələrini ixtisar edərək digər sinflə eyni səviyyəyə gətirmək. Bu metod böyük datasetlərdə vaxta qənaət edir, lakin vacib məlumatların itirilmə riski var. Cost-Sensitive Learning (Xərcə həssas öyrənmə): Alqoritmi elə tənzimləyirsiniz ki, azlıq təşkil edən sinifdə səhv etmək "daha baha" başa gəlsin. Bu, modelin həmin sinfə daha çox diqqət yetirməsinə səbəb olur.

Bu metodlar modelin daha düzgün və etibarlı nəticələr verməsinə kömək edir [4].

Müasir maliyyə sistemlərində anomaliya aşkarlanması alqoritmləri real vaxt rejimində işləyərək şübhəli əməliyyatları müəyyən edir. Balanslaşdırılmış məlumatlar üzərində qurulan modellər daha yüksək dəqiqlik göstərir və riskləri azaldır [5].

Anomaliya aşkarlanması maliyyə dələduzluğunun aşkar edilməsində effektiv vasitədir. Bununla yanaşı, məlumat balanssızlığı probleminin düzgün idarə olunması modelin performansını əhəmiyyətli dərəcədə artırır. Gələcəkdə daha inkişaf etmiş və izah oluna bilən modellərin tətbiqi bu sahədə mühüm nəticələr verə bilər.

### **Ədəbiyyat**

1. R. J. Bolton and D. J. Hand, "Statistical fraud detection: A review," *Statistical Science*, vol. 17, no. 3, pp. 235–255, 2002.
2. E. W. T. Ngai, Y. Hu, Y. H. Wong, Y. Chen, and X. Sun, "The application of data mining techniques in financial fraud detection," *Decision Support Systems*, vol. 50, no. 3, pp. 559–569, 2011.
3. H. He and E. A. Garcia, "Learning from imbalanced data," *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, vol. 21, no. 9, pp. 1263–1284, 2009.
4. N. V. Chawla, K. W. Bowyer, L. O. Hall, and W. P. Kegelmeyer, "SMOTE: Synthetic Minority Over-sampling Technique," *Journal of Artificial Intelligence Research*, vol. 16, pp. 321–357, 2002.
5. A. Dal Pozzolo, O. Caelen, R. A. Johnson, and G. Bontempi, "Calibrating probability with undersampling for unbalanced classification," *IEEE Symposium Series on Computational Intelligence*, 2015.

## PUASSON VƏ MƏNFI BİNOMIAL MODELƏRLƏ SİĞORTA HADİSƏLƏRİNİN TEZLİYİNİN QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ

**Mirzəyev Fərhad Əlif oğlu, Kərimli Nəzrin Rəhim qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

farhad\_1958@mail.ru, nazrinkarimli0204@gmail.com

**Xülasə:** Təqdim olunan işdə Puasson və mənfi binomial paylanmalardan istifadə olunaraq sığorta portfelinin riski qiymətləndirilmişdir və sığorta tariflərinin hesablanması üçün uyğun model seçilmişdir.

**Açar sözlər:** Puasson paylanması, mənfi binomial paylanma, sığorta tarifləri.

Sığorta hadisələrinin tezliyinin doğru modelləşdirilməsi sığorta şirkətlərinin maliyyə dayanıqlığının təmin edilməsi və ədalətli tarif siyasətinin qurulması üçün mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Bu tədqiqatda klassik Puasson reqressiyası ilə yanaşı, portfel daxili heterogenliyi nəzərə alan neqativ binomial modeli vasitəsi ilə sığorta hadisələri analiz olunmuşdur. Əsas məqsəd müxtəlif risk faktorlarının hadisə tezliyinə təsirini müəyyən etmək və informasiya meyarlarına əsasən portfel üçün ən optimal ehtimalı paylanmasını seçməkdir. Tədqiqatda iki fundamental diskret ehtimal paylanmasından istifadə olunmuşdur Puasson və mənfi binomial paylanma. Puasson paylanmasında sığorta hadisələrinin baş vermə ehtimalı aşağıdakı funksiya ilə ifadə olunur [1]:

$$P(Y = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

burada  $\lambda$  vahid zaman (və ya məruzqalma) üçün gözlənilən hadisə sayıdır. Reqressiya modelində loqarifmik keçid funksiyasından (log-link0 istifadə edərək model belə qurulur [2]:

$$\ln(\lambda_i) = \beta_0 + \sum \beta_j X_{ij} + \ln(w_i) \quad (2)$$

Mənfi binomial model isə Puasson modelinin "overdispersion"-dispersiyanın ortalamadan böyük olması problemini həll etmək üçün təkmilləşdirilmiş formasıdır. Onun dispersiya tənliyi aşağıdakı kimidir [2]:

$$\text{Var}(Y) = \lambda + \frac{\lambda^2}{\theta}, \quad (3)$$

burada  $\theta$  (və ya bəzi mənbələrdə  $1/\alpha$ ) dispersiya parametridir. əgər  $\theta \rightarrow \infty$  olarsa, NB paylanması Puasson paylanmasına yaxınlaşır.

Tədqiqat zamanı istifadə olunan sığorta portfelində hadisə saylarının (claims) paylanması aşağıdakı statistik göstəricilərlə xarakterizə olunur:

| Min. | 1st Qu. | Median | Mean  | 3rd Qu. | Max.   |
|------|---------|--------|-------|---------|--------|
| 0.00 | 9.50    | 22.00  | 49.23 | 55.50   | 400.00 |

Bu ədələri analiz etdikdə məlum olur ki, məlumatların paylanması kəskin müsbət asimmetriyaya (right-skewed) malikdir ki, bu da Puasson və neqativ binomial kimi diskret ehtimal paylanmalarının tətbiqini zəruri edir. Dataya uyğun Puasson regressiya modelinin nəticələri aşağıdakı şəkildə göstərilmişdir:

```
Call:
glm(formula = Claims ~ District + Group + Age + offset(log(Holders)),
     family = poisson(link = "log"), data = Insurance)

Coefficients:
            Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept) -1.810508   0.032972  -54.910 < 2e-16 ***
District2    0.025868   0.043016   0.601 0.547597
District3    0.038524   0.050512   0.763 0.445657
District4    0.234205   0.061673   3.798 0.000146 ***
Group.L      0.429708   0.049459   8.688 < 2e-16 ***
Group.Q      0.004632   0.041988   0.110 0.912150
Group.C     -0.029294   0.033069  -0.886 0.375696
Age.L       -0.394432   0.049404  -7.984 1.42e-15 ***
Age.Q       -0.000355   0.048918  -0.007 0.994210
Age.C       -0.016737   0.048478  -0.345 0.729910
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)

    Null deviance: 236.26  on 63  degrees of freedom
Residual deviance:  51.42  on 54  degrees of freedom
AIC: 388.74

Number of Fisher Scoring iterations: 4
```

Alınan nəticələr əsasında qurulmuş Puasson regressiya modelinə əsasən hər bir risk qrupu üçün gözlənilən hadisə sayının proqnozlaşdırılması üçün aşağıdakı tənlik əldə edilmişdir:

$$\lambda = \text{Holders}_i \times e^{-1.81+0.234\text{District4}+0.429\text{Group.L}-0.394\text{Age.L}} \quad (4)$$

Qurulmuş Puasson regressiya modelinə əsasən sığorta hadisələrinin tezliyinə təsir edən faktorlar aşağıdakı kimi şərh olunur:

Rayon 4 (District 4): bu rayon üçün əmsalın müsbət və p-qiymətinin 0.05-dən kiçik olması onu göstərir ki, bu rayonun sürücülərinin qəza törətmə tezliyi digər rayonlara nisbətən statistik olaraq daha yüksəkdir.

Yaş qrupu (Age. L): yaş faktoru üzrə xətti komponentin əsalı mənfidir və yüksək dərəcədə əhəmiyyətli. Aktuari elmindəki klassik fərziyyəni sübut edir: sürücülərin yaşı artdıqca hadisə törətmə tezliyi azalır.

Mühərrik həcmi (Group.L): Müsbət əmsal göstərir ki, avtomobilin mühərrik gücü artdıqca sığorta hadisəsi törətmə tezliyi artır.

Bundan əlavə modelin keyfiyyət göstəricisi olan AİC dəyəri 388.74-dür ki, bu ədəd təkbaşına bir məna kəsb etməsə də neqativ binomial model ilə müqayisə üçün əsas meyar olacaq. Residual deviance qiymətinin (51.42) sərbəstlik dərəcəsinə (54) çox yaxın olması ilk baxışdan modelin dataya uyğun olmadığını göstərsə də, nəzərə almaq lazımdır ki, Puasson üçün dispersiya parametri

standart olaraq 1 qəbul edilir. Puasson modeli bəzi faktorların təsirini uğurla müəyyən etsə də, o, dispersiyanın sabit olduğu fərziyyələrə əsaslanır. Portfel-dəki heterogenliyi (müxtəlifliyi) daha dəqiq nəzərə almaq üçün neqativ binomial modelinin tətbiqi və AİC dəyərlərinin müqayisəsi zəruridir. Mənfi binomial model Puassondan fərqli olaraq, hər bir müştərinin risk səviyyəsinin eyni olmadığını (yəni bir növ gizli "Gamma" paylanmış fərqlilik olduğunu) fərz edir.

```
Call:
glm.nb(formula = Claims ~ District + Group + Age + offset(log(Holders)),
       data = Insurance, init.theta = 449932.6148, link = log)

Coefficients:
              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept) -1.8105087   0.0329755  -54.905   < 2e-16 ***
District2    0.0258703   0.0430236    0.601  0.547637
District3    0.0385270   0.0505189    0.763  0.445686
District4    0.2342060   0.0616789    3.797  0.000146 ***
Group.L      0.4297077   0.0494627    8.688   < 2e-16 ***
Group.Q      0.0046344   0.0419919    0.110  0.912120
Group.C     -0.0292999   0.0330738   -0.886  0.375675
Age.L       -0.3944313   0.0494064   -7.983  1.42e-15 ***
Age.Q       -0.0003568   0.0489205   -0.007  0.994181
Age.C       -0.0167372   0.0484804   -0.345  0.729916
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for Negative Binomial(449932.6) family taken to be 1)

Null deviance: 236.212  on 63  degrees of freedom
Residual deviance: 51.416  on 54  degrees of freedom
AIC: 390.74

Number of Fisher Scoring iterations: 1

              Theta: 449933
            Std. Err.: 4185432
Warning while fitting theta: iteration limit reached

2 x log-likelihood: -368.745
```

Modelə diqqət etsək AİC dəyəri (390.74) Puasson modelinin AİC dəyərindən azca yüksəkdir. Model seçimi meyarı olan AİC dəyərinə əsasən, Puasson modeli daha kiçik dəyərə malik olduğu üçün bu data üzərində daha optimal model hesab olunur. Bundan əlavə neqativ binomial modelində dispersiya parametri olan  $\theta$  olduqca yüksək qiymət almışdır. Aktuari nəzəriyyəsinə görə  $\theta \rightarrow \infty$  şərti daxilində neqativ binomial paylanma Puasson paylanmasına yaxınlaşır. Bu da o deməkdir ki, bu xüsusi portfel üçün overdispersion (həddindən artıq yayılma) kritik səviyyədə deyil və Puasson paylanması məlumatları izah etmək üçün kifayət qədər effektivdir ( $Var \approx Mean$ ).

Əlavə olaraq qeyd edək ki, hər iki modeldə Age, District 4, və Group faktorlarının əmsalları statistik əhəmiyyətlik dərəcələri demək olar ki, eyni qalmışdır. Bu tapılan risk faktorlarının etibarlı (robust) olduğunu sübut edir.

### Ədəbiyyat

1. Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M., Modern Actiarial Risk Theory, Springer, 2008, 381 s.
2. Ohlsson E., Johansson B., Non-Life Insurance Pricing with Genarilized Linear Models, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010, 174 s.

## İNDEKS VƏ STANDARTLAŞDIRMA METODLARININ ÜMUMİ ÖLÜM GÖSTƏRİCİLƏRİNİN EHTİMAL-STATİSTİK TƏHLİLİNDƏ TƏTBİQİ

**Mirzəyev Fərhad Əlif oğlu, Mədətova Qalya Şəmistan qızı**  
(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi, SABAHQrupları )  
farhad\_1958@mail.ru , qalyamedetova@gmail.com

**Xülasə:** Ümumi ölüm göstəricilərinin statistik təhlili demoqrafik proseslərin mahiyyətini və əhalinin sağlamlıq vəziyyətini öyrənmək baxımından mühüm əhəmiyyət daşıyır. Lakin bu göstəricilərin birbaşa müqayisəsi əhalinin yaş quruluşu, cins bölgüsü və sosial-iqtisadi fərqliliklər səbəbindən təhriflər yaradır. Bu halda indeks və standartlaşdırma metodlarının tətbiqi zəruri olur. İndeks üsulu zaman üzrə ölüm göstəricilərinin dəyişməsinə izləməyə, artım və azalma meyillərini müəyyən etməyə imkan verir. Standartlaşdırma isə əhali strukturundakı fərqləri aradan qaldıraraq müxtəlif region və ölkələr üzrə göstəricilərin obyektiv müqayisəsini təmin edir. Eyni zamanda ehtimal-statistik yanaşmalar, xüsusilə Puasson və binom paylanmaları əsasında ölüm hallarının təsadüfi dəyişkənliyi nəzərə alınaraq risklərin proqnozlaşdırılmasına şərait yaradır. Bu metodların birgə tətbiqi nəticəsində ölüm göstəricilərinin dinamikası daha dəqiq müəyyənləşdirilir və səhiyyə siyasətində elmi əsaslandırılmış qərarların qəbuluna imkan yaradılır. Beləliklə, indeks və standartlaşdırma üsullarının ehtimal-statistik yanaşma ilə birləşdirilməsi əhalinin sağlamlıq vəziyyətinin qiymətləndirilməsində və demoqrafik sabitliyin təmin edilməsində vacib rol oynayır.

**Açar sözlər:** İndeks metodları, standartlaşdırma, ölüm göstəriciləri, ehtimal-statistik təhlil, demoqrafik proseslər

Demoqrafik təhlildə ölüm göstəriciləri əhalinin sağlamlıq vəziyyətini və sosial-iqtisadi inkişaf səviyyəsini xarakterizə edən ən mühüm statistik göstəricilərdən biridir. Lakin ölüm göstəricilərinin birbaşa müqayisəsi əhalinin yaş quruluşu, cins bölgüsü və regionların sosial-iqtisadi fərqlilikləri səbəbindən səhv nəticələr verə bilər. Bu səbəbdən, **indeksləşdirmə və standartlaşdırma metodları** tətbiq olunur. Bu metodlar vasitəsilə müxtəlif əhali qruplarının ölüm göstəriciləri müqayisə edilərkən təsadüfi amillərin və struktur fərqlərinin təsiri minimuma endirilir.[1,2]

### 1. İndeks metodunun tətbiqi

İndeks üsulu müəyyən dövrlərdə ölüm göstəricilərinin dinamikasını izləmək üçün istifadə edilir. Məsələn, ölüm əmsalı üzrə zəncirvari indeks aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$I_t = \frac{M_t}{M_{t-1}} \times 100 \quad (1)$$

burada,

- $M_t$  –  $t$  dövründə ümumi ölüm əmsalı,
- $M_{t-1}$  – əvvəlki dövrdə ölüm əmsalıdır.



Əgər  $I_t > 100$  olarsa, ölüm göstəricisi artmış, əksinə  $I_t < 100$  olarsa azalmış hesab olunur.

**Nümunə:** 2022-ci ildə hər 1000 nəfərə düşən ölüm əmsalı 8,5, 2023-cü ildə isə 9,0 olmuşdur. Bu halda:

$$I_{2023} = \frac{9,0}{8,5} \times 100 = 105,9\% \quad (2)$$

Nəticə göstərir ki, 2023-cü ildə ölüm əmsalı əvvəlki ilə nisbətən 5,9% artmışdır.

## **2. Standartlaşdırma metodunun tətbiqi**

Əhalinin yaş strukturuna görə ölüm göstəricilərinin müqayisəsi üçün **standartlaşdırma** vacibdir. Çünki yaşlı əhalinin payı çox olan ölkədə ümumi ölüm göstəricisi avtomatik yüksək olur. Bu təsiri aradan qaldırmaq üçün **birbaşa standartlaşdırma metodu** istifadə olunur:

$$M_s = \frac{\sum(m_i \cdot P_i^s)}{\sum P_i^s} \quad (3)$$

burada,

$m_i$  –  $i$ -ci yaş qrupu üzrə xüsusi ölüm əmsalı,

$P_i^s$  – standart əhali üzrə həmin yaş qrupunun payıdır,

$M_s$  – standartlaşdırılmış ölüm əmsalıdır.

Nümunə:

Fərz edək ki, 0–14, 15–64 və 65+ yaş qrupları üzrə ölüm əmsalları müvafiq olaraq  $m_1 = 2$ ,  $m_2 = 5$ ,  $m_3 = 30$ , (hər 1000 nəfərə) təşkil edir. Standart əhali bölgüsü isə 0–14 üçün 0,25; 15–64 üçün 0,65; 65+ üçün 0,10 təşkil edir.

$$M_s = \frac{(2 \times 0,25) + (5 \times 0,65) + (30 \times 0,10)}{1} = 0,5 + 3,25 + 3 = 6,75 \quad (4)$$

Nəticəyə görə, standartlaşdırılmış ümumi ölüm əmsalı 6,75 olmuşdur. Bu, müxtəlif ölkələrin və ya regionların ölüm göstəricilərinin daha obyektiv müqayisəsinə imkan verir.

## **3. Ehtimal-statistik yanaşmanın rolu**

Ölüm göstəricilərinin təhlilində ehtimal nəzəriyyəsi metodlarının tətbiqi, təsadüfi dəyişkənliklərin və qeyri-müəyyənliyin nəzərə alınmasına şərait yaradır. Məsələn, müəyyən yaş qrupunda ölüm hadisəsinin baş vermə ehtimalı binom və ya Puasson paylanması əsasında qiymətləndirilə bilər.[4,5]

Puasson paylanması əsasında ölüm hallarının ehtimalı belə ifadə olunur:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (5)$$

burada,

$\lambda$  – müəyyən zaman intervalında gözlənilən orta ölüm sayı,

$k$  – real müşahidə olunan ölüm hallarıdır.

Bu yanaşma səhiyyə planlamasında risk qruplarının təyin edilməsinə, regionlar üzrə ölüm hallarının proqnozlaşdırılmasına və səhiyyə siyasətində preventiv tədbirlərin hazırlanmasına imkan verir.

### **Nəticə**

İndeks və standartlaşdırma metodlarının demoqrafik təhlildə, xüsusilə ümumi ölüm göstəricilərinin öyrənilməsində tətbiqi son dərəcə əhəmiyyətlidir. Əgər indeks üsulu zaman kəsiyində baş verən dəyişiklikləri ölçməyə, ölüm göstəricilərinin artım və ya azalma tendensiyyalarını üzə çıxarmağa imkan verirsə, standartlaşdırma metodları əhalinin yaş və cins strukturundan doğan təhrifləri aradan qaldıraraq müxtəlif region və ölkələrin obyektiv müqayisəsinə şərait yaradır. Bu yanaşma nəticəsində səhiyyə siyasətində qəbul olunan qərarlar daha real və elmi əsaslara söykənir. Həmçinin ehtimal-statistik metodların, xüsusilə Puasson və binom paylanmalarının tətbiqi, ölüm hallarının təsadüfi dəyişkənliyini nəzərə almaqla risklərin dəqiq qiymətləndirilməsinə və proqnozlaşdırılmasına imkan verir. Beləliklə, indeks, standartlaşdırma və ehtimal-statistik yanaşmanın sintezi həm ölüm göstəricilərinin təhlilində obyektivliyi artırır, həm də səhiyyə siyasətində preventiv tədbirlərin hazırlanması üçün möhkəm baza yaradır. Əhali sağlamlığının vəziyyətinin dəqiq qiymətləndirilməsi demoqrafik sabitlik və sosial rifah üçün mühüm şərt olduğundan, bu metodların tətbiqi yalnız elmi baxımdan deyil, həm də praktiki baxımdan vacibdir. Müqayisələrin etibarlı aparılması, risk qruplarının müəyyənləşdirilməsi və səhiyyə resurslarının optimal bölüşdürülməsi kimi məsələlərdə bu yanaşmalar mühüm rol oynayır. Təcrübə göstərir ki, düzgün indeksləşdirmə, obyektiv standartlaşdırma və ehtimal-statistik qiymətləndirmə əhali sağlamlığının qorunması istiqamətində daha dəqiq strategiyaların hazırlanmasına şərait yaradır.

### **Ədəbiyyat**

1. Tsai, S. P., & Wen, C. P. (1986). A review of methodological issues of the standardized mortality ratio (SMR) in occupational cohort studies. *International Journal of Epidemiology*, 15(1), 8–21. <https://doi.org/10.1093/ije/15.1.8>
2. Roessler, M., Schmitt, J., & Schoffer, O. (2020). Can we trust the standardized mortality ratio? A formal analysis and evaluation based on axiomatic requirements. *arXiv*. <https://arxiv.org/abs/2009.03650>
3. Richardson, D. B. (2017). Observed and expected mortality in cohort studies. *American Journal of Epidemiology*.
4. Ferri, G. M., De Maria, L., Delvecchio, G., Caputi, A., Sole, S., Giannelli, G., ... Vimercati, L. (2025). Standardized Mortality Ratios (SMRs) and Radon Exposure Analysis for Lung Cancer and All-Cause Mortality in Locorotondo, Southern Italy. *Medicina*, 61(1), 47. <https://doi.org/10.3390/medicina61010047>
5. Statistics Canada. (2025, July 2). Age-standardized Rates. Statistics Canada. Retrieved from <https://www.statcan.gc.ca/en/dai/btd/asr>

## BİR İNTEQRO-DİFERENSIAL XƏTTİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ÜÇÜN ZƏRURİ VƏ KAFİ ŞƏRT

**Mirzəyeva Xəyalə Mais qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

mirzoyevakh@gmail.com

**Xülasə:** İşdə inteqro-diferensial xətti tənliklərlə təsvir olunan iki mərhələli optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Məsələdə fərz olunur ki, funksional xəttidir. Baxılan məsələdə mümkün idarənin optimallığı üçün zəruri və kafi şərt isbat olunur.

**Açar sözlər:** iki mərhələli optimal idarəetmə məsələsi, mümkün idarə, optimal idarə, Volterra tip, zəruri və kafi şərt.

Fərz edək ki, tədqiq olunan proses  $T_1 = [t_0, t_1]$  parçasında

$$\dot{x}_1(t) = \int_{t_0}^t (A(t, \tau)x_1(\tau) + f_1(t, \tau, u_1(\tau)))d\tau, \quad (1)$$

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad (2)$$

tənliklər sistemi ilə

$T_2 = [t_1, t_2]$  parçasında isə

$$\dot{x}_2(t) = \int_{t_1}^t (B(t, \tau)x_2(\tau) + f_2(t, \tau, u_2(\tau)))d\tau, \quad (3)$$

$$x_2(t_1) = Gx_1(t_1) \quad (4)$$

Volterra tip inteqro- diferensial tənliklər sistemi vasitəsilə verilir.

Burada  $A(t, \tau), B(t, \tau)$  – kəsilməz  $(n \times n)$  ölçülü matris funksiyalar,  $x_{10}$  – sabit vektor olub ölçüsü  $n$ -ə bərabərdir,  $G$  –  $(n \times n)$  ölçülü verilmiş matris,  $f_1(t, \tau, u_1(\tau)), f_2(t, \tau, u_2(\tau))$  – verilmiş  $n$  ölçülü kəsilməz olan vektor funksiyalar,  $u_1(t)$  və  $u_2(t)$  isə uyğun olaraq  $r$  və  $q$  ölçülü idarəedici vektor funksiyalar olub, aşağıdakı məhdudiyyət şərtlərini ödəyirlər.

$$\begin{aligned} u_1(t) &\in U_1 \subset R^r, \quad t \in T_1, \\ u_2(t) &\in U_2 \subset R^q, \quad t \in T_2 \end{aligned} \quad (5)$$

$U_1, U_2$  – ixtiyari, məhdud və qapalı çoxluqlardır.

Məhdudiyyət şərtlərini ödəyən  $(u_1(t), u_2(t))$  cütü mümkün idarəetmə vektor-funksiyaları adlanırlar.

Göründüyü kimi baxılan məsələ Volterra tipli inteqro-diferensial tənliklər sistemi üçün xətti bircins olmayan Koşi məsələsidir.

Mümkün  $(u_1(t), u_2(t))$  idarələri üçün məsələnin yeganə olan kəsilməz

$x_1(t)$  və  $x_2(t)$  həlləri mövcuddur.

Buna görə də (1)-(4) məsələlərinin bütün mümkün idarələrinə uyğun həlləri üzərində

$$S(u_1, u_2) = c'x_1(t_1) + d'x_2(t_2) \quad (6)$$

xətti funksionalını təyin edək.

Verilmiş  $c, d$  vektorları  $n$ -ölçülü sabit vektorlar, (6) funksionalı fəza dəyişəninə görə xəttidir.

Baxılan Volterra tip integro-diferensial optimallaşdırma məsələsinin keyfiyyət funksionalına daxil edilən məhdudiyyətlər daxilində  $(u_1(t), u_2(t))$  mümkün idarəsi minimum qiymət verərsə, bu mümkün idarə optimal idarə, bu idarələrə uyğun proses isə optimal proses adlanır.

Məqsədimiz baxılan integro-diferensial tənliklərlə təsvir olunan iki mərhələli optimal idarəetmə məsələsində optimallıq üçün zəruri və kafi şərt almaqdır [1].

$$H_1(t, u_1, \psi_1) = \psi_1' f_1(t, \tau, u_1(\tau)),$$

$$H_2(t, u_2, \psi_2) = \psi_2' f_2(t, \tau, u_2(\tau))$$

kimi təyin olunan şəkildə Hamilton-Pontryagin funksiyaları adlanan skalyar funksiyaları daxil edək.

Fərz edək ki,  $\psi_1(t)$  və  $\psi_2(t)$  naməlum vektor funksiyaları ixtiyaridirlər və aşağıdakı məsələlərin həlləridirlər.

$$\dot{\psi}_1(t) = - \int_t^{t_1} A'(\tau, t) \psi_1(\tau) d\tau, \quad (7)$$

$$\psi_1(t_1) = -c + G' \psi_2(t_1),$$

$$\dot{\psi}_2(t) = - \int_t^{t_2} B'(\tau, t) \psi_2(\tau) d\tau, \quad (8)$$

$$\psi_2(t_2) = -d.$$

Optimallıq şərtini almaq üçün artım üsulundan istifadə edilmişdir [2,3]. Belə ki, funksionalın artım düsturu qurulmuş və onun vasitəsilə aşağıdakı teorem isbat edilmişdir.

**Teorem.** Tutaq ki,  $\psi_1(t)$  və  $\psi_2(t)$  (7)-(8) qoşma sistemin həlləridirlər. Onda baxılan məsələdə  $(u_1(t), u_2(t))$  mümkün idarənin optimal idarə olması üçün zəruri və kafi şərt

$$\int_{t_0}^{t_1} \left( H_1(t, \bar{u}_1(t), \psi_1(t)) - H_1(t, u_1(t), \psi_1(t)) \right) \leq 0,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( H_2(t, \bar{u}_2(t), \psi_2(t)) - H_2(t, u_2(t), \psi_2(t)) \right) \leq 0$$

münasibətlərinin  $u_1(t) \in U_1, t \in T_1, u_2(t) \in U_2, t \in T_2$  ixtiyari idarələri üçün ödənməsidir.

### Ədəbiyyat

1. Бутковский А.Г. Управление в системах с распределениями параметрами.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Альсевич В.В. Методы оптимизации. Минск: Четыри четверты, 2011. 472 с.
3. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Минск: Изд-во БГУ, 1973. 256 с.

## İNTEQRO DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRLƏ TƏSVİR OLUNAN BİR İKİ MƏRHƏLƏLİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ MƏXSUSİ İDARƏNİN TƏDQIQI

**Mirzəyeva Xəyalə Mais qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

mirzoyevakh@gmail.com

**Xülasə:** İşdə inteqro diferensial tənliklə təsvir olunan bir iki mərhələli optimal idarəetmə məsələsində Pontryaginın maksimum prinsipinin cırlaşdığı halın tədqiqinə baxılır. Baxılan məsələdə məxsusi idarənin optimallığı üçün zəruri şərt isbat olunur.

**Açar sözlər:** bir-iki mərhələli optimal idarəetmə məsələsi, məxsusi idarə, ikinci tərtib zəruri şərt.

İşdə

$$S(u_1, u_2) = \varphi_1(x_1(t_1)) + \varphi_2(x_2(t_2)) \quad (1)$$

qeyri-xətti funksionalının  $T_1 = [t_0, t_1]$  parçasında

$$\dot{x}_1(t) = \int_{t_0}^t (A(t, \tau)x_1(\tau) + f_1(t, \tau, u_1(\tau)))d\tau, \quad (2)$$

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad (3)$$

və  $T_2 = [t_1, t_2]$  parçasında isə

$$\dot{x}_2(t) = \int_{t_1}^t (B(t, \tau)x_2(\tau) + f_2(t, \tau, u_2(\tau)))d\tau, \quad (4)$$

$$x_2(t_1) = Gx_1(t_1), \quad (5)$$

Volterra tip integro-diferensial tənliklər sistemi ilə təsvir olunan məsələ üçün minimumunun tapılmasına baxılır.

Burada  $A(t, \tau), B(t, \tau) - (n \times n) -$  ölçülü matris funksiyalar,  $x_{10} - n -$  ölçülü sabit vektor,  $G -$  isə sabit matris olub,  $(n \times n)$  ölçülüdür.  $f_1(t, \tau, u_1(\tau)), f_2(t, \tau, u_2(\tau)) -$  verilmiş  $u_1$  və  $u_2 -$ yə nəzərən isə kəsilməz olan  $- n$  ölçülü vektor funksiyalar,  $r$  ölçülü diksret idarəedici vektor funksiyaları isə  $u_1(t) u_2(t)$  işarə edək, belə ki, bu funksiyalar

$$\begin{aligned} u_1(t) &\in U_1 \subset R^r, \quad t \in T_1, \\ u_2(t) &\in U_1 \subset R^r, \quad t \in T_2, \end{aligned} \quad (6)$$

məhdudiyyət şərtlərini ödəyirlər.

Burada  $\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2) -$  skalyar funksiyaları verilmiş, iki dəfə kəsilməz diferensiallanandırılar.

İntegro diferensial tənliklə təsvir olunan bir iki mərhələli optimal idarəetmə məsələsində Pontryagin maksimum prinsipinin cırlaşdığı hal tədqiq olunur və məxsusi idarənin optimallığı üçün (bax məsələ [1]) zəruri şərt alınır.

$$H_1(t, u_1, \psi_1) = \psi'_1 f_1(t, \tau, u_1(\tau)),$$

$$H_2(t, u_2, \psi_2) = \psi'_2 f_2(t, \tau, u_2(\tau))$$

kimi təyin olunan şəkildə Hamilton-Pontryagin funksiyaları adlanan skalyar funksiyaları daxil edək.

Fərz edək ki,  $\psi_1(t)$  və  $\psi_2(t)$  vektor-funksiyasıyları uyğun olaraq aşağıdakı qoşma sistemin həlləridirlər:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1(t) &= - \int_t^{t_1} A'(\tau, t) \psi_1(\tau) d\tau, \\ \psi_1(t_1) &= - \frac{\varphi_1(x_1(t_1))}{\partial x_1} + G' \psi_2(t_1), \\ \dot{\psi}_2(t) &= - \int_t^{t_2} B'(\tau, t) \psi_2(\tau) d\tau, \\ \psi_2(t_2) &= - \frac{\varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2}, \quad \psi_2(t_2) = - \frac{\varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Məxsusi idarənin optimallığı üçün zəruri şərti almaq üçün artım üsulundan istifadə edilmişdir (bax məsələ [2,3]). Belə ki, funksionalın artım düsturu qurulmuş və onun vasitəsilə aşağıdakı teorem isbat edilmişdir.

Yazılışın sadəliyi üçün aşağıdakı işarəni daxil edək.

$$K_2(\tau, s) = \Phi'_2(t_2, \tau) \frac{\partial^2 \varphi_2(x_2(t_2))}{\partial x_2^2} \Phi_2(t_2, s).$$

Burada  $\Phi_1(t, \tau) - n \times n -$  ölçülü matris-funksiya olub, aşağıdakı məsələ-

nin həllidir

$$\frac{\partial \Phi_1(t, \tau)}{\partial \tau} = - \int_{\tau}^t F(t, \tau) A(s, \tau) d\tau,$$
$$\Phi_1(t, t) = E$$

**Teorem.** Baxılan məsələdə  $(u_1(t), u_2(t))$  məxsusi idarəsinin Pontryagin maksimum prinsipi mənasında optimal idarə olması üçün zəruri şərt

$$\Delta_{v_1} f_1'(\theta, u_1(\theta)) K_1(\theta, \theta) \Delta_{v_1} f_1(\theta, u_1(\theta)) \geq 0$$

$$\Delta_{v_2} f_2'(\theta, u_2(\theta)) K_2(\theta, \theta) \Delta_{v_2} f_2(\theta, u_2(\theta)) \geq 0$$

bərabərsizliklərinin ixtiyari  $v_1 \in U_1, \theta \in T_1, v_2 \in U_2, \theta \in T_2$  üçün ödənmələridir.

### Ədəbiyyat

1. Бутковский А.Г. Управление в системах с распределениями параметрами.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Альсевич В.В. Методы оптимизации. Минск: Четыре четверти, 2011, 472 с.
3. Марданов М.Дж., Мансимов К.Б., Меликов Т.К. Исследование особых управлений и необходимые условия оптимальности второго порядка в системах с запаздыванием. Баку: Элм, 2013, 355 с.

## PROQRAMLAŞDIRILMIŞ TƏLİM TEXNOLOGİYALARININ TƏHSİLDƏ ROLU, MÜQAYİSƏLİ ANALİZ VƏ QIYMƏTLƏNDİRMƏ METODOLOGİYASI

**Mirzəyeva Səlimə Mirzə qızı, Cəbrayilli Hürü Xudaverdi qızı**

(LDU, Təbiyyat fakültəsi)

mirzayeva\_salima@mail.ru, cebrayillihuru9@gmail.com

**Xülasə:** Tədqiqat işində təhsildə bulud texnologiyalarının rolu və onların yaratdığı imkanlar araşdırılmışdır. Eyni zamanda bulud texnologiyasına əsaslı yanaşmanın təhsil prosesində xərclərin azaldılması, əlçatanlığın və mobilliyin artırılması, həmçinin birgə fəaliyyət imkanlarının genişləndirilməsi kimi üstünlükləri vurğulanmışdır. Təlim idarəetmə sistemlərinin (LMS) funksiyaları izah edilmiş və iSpring Learn, TeachBase, TalentLMS, BlackBoard Learn və MoodleCloud platformaları müqayisəli şəkildə təhlil olunmuşdur. Müəyyən edilmiş meyarlar üzrə aparılan qiymətləndirmə nəticəsində sistemlər arasında fərqlər üzə çıxarılmışdır. Nəticə olaraq, ən yüksək göstəricilərə malik olan MoodleCloud platformasının təhsil məqsədləri üçün daha uyğun seçim olduğu qənaətinə gəlinmişdir.

**Açar sözlər:** Bulud texnologiyaları, LMS, Moodle, Elektron təhsil, iSpring, Distant təhsil.

XXI əsrin başlanğıcı texnoloji innovasiyaların təhsil sisteminə sürətli integrasiyası ilə xarakterizə olunur. Bu yeniliklərin mərkəzində dayanan "bulud hesablamaları" (Cloud Computing) proqramlarının konsepsiyası, istifadəçilərə proqram təminatı, xidmətlər və məlumat saxlama resurslarına uzaqdan giriş imkanı yaradır. Müasir təhsil mühitində bulud texnologiyalarının tətbiqi həm resursların optimallaşdırılması, həm də təhsilin əlçatanlığının artırılması baxımından ən perspektivli istiqamətlərdən biri hesab olunur [1].

Təhsildə Bulud Texnologiyalarının üstünlükləri aşağıdakılardan ibarətdir:

- Bulud texnologiyalarına keçid təhsil müəssisələri və təhsilənlər üçün bir sıra mühüm üstünlüklər vəd edir[2].
- İqtisadi səmərəlilik: İnfrastruktur və IT xərclərinin əhəmiyyətli dərəcədə azaldır.
- Mobillik və Əlçatanlıq: Məkan və cihaz məhdudiyyəti olmadan məlumatlara və dərslərə 7/24 giriş imkanı verir.
- Məhsuldarlıq: Fərdi təhsil trayektoriyalarının qurulması və təhsil prosesinin fərdiləşdirilməsi imkanına malikdir.
- Birgə əməkdaşlıq: Qrup layihələri və distant iş rejimində birgə fəaliyyəti asanlaşdırır.

Bu texnologiyalar sayəsində bahalı avadanlıq və mürəkkəb proqram təminatı tələbi aradan qalxır ki, bu da təhsilin demokratikləşməsinə xidmət edir.

Təlim İdarəetmə Sistemləri və Onların Rolu: Bulud xidmətlərinin təhsildə ən geniş yayılmış tətbiq forması Təlim İdarəetmə Sistemləridir. LMS – elektron təhsilin təşkili zamanı inzibati, texnoloji və metodoloji dəstəyi təmin edən avtomatlaşdırılmış sistemdir. Onun əsas funksiyalarına elektron kursların hazırlanması, yerləşdirilməsi, tələbə fəaliyyətinin monitorinqi və qiymətləndirilməsi daxildir [3].

Tədqiqat işində Populyar Bulud Əsaslı LMS-lərin müasir təhsil bazarında rəqabət aparan beş əsas platforması nəzərdən keçirilmişdir:

- iSpring Learn: Müasir interfeysi və geniş hesabatlılıq imkanları ilə seçilir. Xüsusilə korporativ təhsil və onlayn satış üçün əlverişlidir.
- TeachBase: Rusiya mənşəli bu sistem, video ünsiyyət və testləşdirmə üzərində fokuslanır. Kiçik qruplar üçün pulsuz tarifləri mövcuddur.
- TalentLMS: Asinxron və qarışıq təhsil üçün ideal olan bu platforma, xarici resurslarla (YouTube, Wikipedia) integrasiya imkanına malikdir [4].
- BlackBoard Learn: Akademik mühitdə geniş istifadə olunan, məlumat analitikası və istifadəçi idarəetməsi güclü olan peşəkar bir həlldir[5].
- MoodleCloud: Açıq mənbəli Moodle sisteminin bulud versiyasıdır. Geniş plugin seçimi və çevik tənzimləmə imkanları ilə liderdir [6].



Müqayisəli Analiz və Qiymətləndirmə Metodologiyası: Sistemlərin müqayisəsi aşağıdakı meyarlar əsasında aparılmışdır:

- İnformasiya əlçatanlığı;
- Qiymət və lisenziya siyasəti;
- Kurs redaktorunun mövcudluğu;
- İstifadəçi idarəetməsi;
- Çeviklik və nəticələrin nəzərə alınması;
- Ünsiyyət imkanları.

### **Nəticə**

Aparılan müqayisəli təhlil nəticəsində məlum olmuşdur ki, BlackBoard Learn və TalentLMS müəyyən parametrlər üzrə daha aşağı reyting göstərdiyi halda, iSpring Learn və TeachBase orta mövqelərdə qərarlaşmışdır. Ən yüksək balını toplayan sistem MoodleCloud olmuşdur. Bu platforma həm funksional zənginliyi, həm pulsuz istifadə imkanları, həm də proqramlaşdırılmış təhsil prinsiplərinə uyğunluğu ilə seçilir. Beləliklə, təhsil müəssisələrində bulud əsaslı LMS prototipinin tətbiqi üçün MoodleCloud ən optimal seçim kimi tövsiyə olunur.

### **Ədəbiyyat**

1. Ваганова О. И. (2017). Возможности облачных технологий в электронном обучении / О. И. Ваганова [и др.] // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований.
2. Билан И. (2011). Облачные сервисы для библиотек и образования / И. Билан // Университетская книга.
3. Кашина О. А. (2018). Система управления обучением как основа организации электронного обучения в вузе / О. А. Кашина // Образовательные технологии и общество.
4. Облачная LMS TalentLMS [Электронный ресурс] – URL: <http://www.talentlms.ru> (дата обращения: 20.04.2019).
5. Blackboard Learn – Learning Management System [Электронный ресурс] – URL: <https://www.blackboard.com/blackboard-learn/> (дата обращения: 20.04.2019).
6. Moodle hosting from the people that make Moodle [Электронный ресурс] – URL: <https://moodlecloud.com> (дата обращения: 21.04.2019).

## **İTERAKTİV TƏLİM MÜHİTİNİN QURULMASINDA MULTİMƏDİA TEKNOLOGİYALARININ İMKANLARI**

**Muradov Məmməd Fərrux oğlu, Qədirli Aydan Fuad qızı**

*(LDU, Təbiyyat fakültəsi)*

*mammad\_2011@mail.ru, aydanqedirli5@gmail.com*

**Xülasə:** *Multimedia texnologiyalarının təhsil sahəsində tətbiqi tədrisin keyfiyyətini yüksəldən əsas faktorlardan biridir. Multimedia kompüteri – müvafiq proqram təminatı vasitəsilə təlim prosesinin potensialını tam reallaşdırmağa imkan verən texniki bazadır. Məqalədə multimedia sistemlərinin ən mühüm üstünlüyü olan interaktivliyin təmin edilməsi və bu texnologiyaların təhsil, elm və peşəkar hazırlıq sahələrində yaratdığı köklü dəyişikliklər təhlil olunur.*

**Açar sözlər:** *multimedia texnologiyaları, rəqəmsal təhsil resursları, interaktiv təlim metodları, vizuallaşdırma, virtual reallıq.*

Multimedia (ing. multimedia), kompüterin mətn, qrafika, animasiya, rəqəmsal şəkillər, video, səs və s kimi məlumat tiplərinə daxil olmasını, işlənməsini, saxlanmasını, ötürülməsini və çıxışını təmin edən texnologiyaların toplusudur [1]. Daha doğru ifadə etsək, müasir informasiya texnologiyalarında yeni informasiya bazasını təşkil edən mətn, qrafik və səsi həm ayrılıqda həm də birləşdirən informasiyaya "multimedia" deyilir. Multimedia sistemlərinin meydana çıxması kompüter təlimi, iş və digər peşə fəaliyyət sahələrində inqilab yaratdı. Demək olar ki, multimedia insan fəaliyyətinin bütün sahələrini əhatə edir. Multimedia texnologiyasının tətbiqetmə sahəsində ən geniş sahələrindən biri də təhsil sahəsində əldə edilmişdir. Multimediada audiovizual məlumatların işlənmə metodlarından istifadə etməklə öyrənməni intensivləşdirmək və öyrənmə motivasiyasını artırmağa aşağıdakı xassələri imkan verir:

- Müxtəlif audiovizual informasiyaların qarışdırılması;
- Animasiya effektlərinin tətbiqi;
- Vizual informasiyanın deformasiyası;
- Audiovizual informasiyaların ayrı-ayrı nümayiş etdirilməsi;
- Görüntünün tonlanması;
- Vizual informasiyaların seçilmiş hissəsinin sonrakı hərəkəti və ya "böyüdücü şüşə altında" nəzərdən keçirilməsi üçün redaktə edilməsi;
- Ekranın istənilən hissəsini aktiv etmək qabiliyyəti ilə bir ekranda audiovizual informasiyaların çox pəncərəli nümayişi;

Multimedia proqramları yalnız mətn şəklində deyil, eyni zamanda üç ölçülü qrafika, soundtrack, video, animasiya şəklində informasiya verir. Multimedia əsaslı məlumatlandırma vasitələri bəzi hallarda təhsilin effektivliyini

əhəmiyyətli dərəcədə artırır [2]. Əksər hallarda kompüterlər və onlara uyğun periferik avadanlıqlar multimedia vasitələri kimi adlandırılır. Kompüter informasiyanın işlənməsinin universal vasitəsidir. Kompüterin çox yönlülüüyü ondadır ki, bir tərəfdən təkcə müxtəlif tipli multimedia məlumatları işləyə bilər, digər tərəfdən eyni kompüter bir sıra əməliyyatları yerinə yetirə bilər. Bunun sayəsində kompüter, uyğun periferik cihazlar dəsti ilə birlikdə texniki multimedia vasitələrinin bütün funksiyalarının yerinə yetirilməsini təmin edə bilər. "Multimedia kompüter" "multimedia tətbiqetmələrinin bütün imkanlarını tam həyata keçirə biləcəyi bir kompüterdir". Multimedia kompüter çox şey edə bilməlidir: qrafik və video məlumatları nümayiş etdirmək, animasiya göstərmək, müxtəlif səs müşayiətçilərini yüksək keyfiyyətlə çıxarmaq, musiqi CD-ləri daxil olmaqla musiqi və daha bir çox imkan. Ən müasir kompüter belə proqram olmadan işləməyəcəkdir. Proqramı şərti olaraq tətbiq olunan hissəyə və tətbiqi proqramlar yaratmaq üçün hazırlanmış proqramları olan ixtisaslaşdırılmış hissəyə bölmək olar. Multimedia kompüter proqramının əsas hissələrini nəzərdən keçirin:



Əməliyyat sistemi



Tətbiqi multimedia proqramları

İndi multimedia tətbiqləri proqram bazarının ən sürətlə inkişaf edən segmentlərindən birinə çevrilmişdir. Müasir kompüterlərin əksəriyyəti əvvəlcədən quraşdırılmış drayverlər, səs kartları və güclü qrafik kartları ilə təchiz olunmuşdur. Bütün bu media avadanlığından istifadə etmək üçün kompüterinizdə bu cihazların hamısını dəstəkləyən bir əməliyyat sistemi olmalıdır. Nümunə olaraq Microsoft Windows 10, Windows 11, Linuxu göstərmək olar. Tətbiqlərə multimedia kompüterinin adı bir istifadəçisinin birbaşa işlədiyi multimedia tətbiqləri daxildir. Əvvəla, bunlar kompüter oyunlarıdır. Buraya multimedia ensiklopediyaları, video və audio pleyerlər, təqdimatlar yaratmaq və izləmək üçün proqramlar və digərləri daxildir. Multimedia və müvafiq məlumatlandırma vasitələrinin istifadəsi ilə bağlı bir neçə konsepsiya var. Xüsusilə, multimedia alətlərindən istifadə edilərkən illüstrasiyaların rolu əhəmiyyətli dərəcədə artır. Multimedia alətlərində illüstrasiyalar nümunələr (mətn daxil olmaqla), iki ölçülü və üç ölçülü qrafik şəkillər (rəsmlər, fotosəkillər, diaqramlar, qrafiklər, diaqramlar), səs parçaları, animasiya, video fraqmentlər şəklində təqdim edilə bilər. Hal-hazırda bir çox məktəb fənləri və təhsil sahələrində multimedia ensiklopediyaları yaradılmışdır. Təhsil prosesini təşkil etmək üçün oyun si-

tuasiya simulyatorları və multimedia təlim sistemləri hazırlanmışdır. Multimedia, müxtəlif növ təhsil məlumatlarının interaktivliyi, çevikliyi və inteqrasiyası keyfiyyətlərinə, eləcə də şagirdlərin fərdi xüsusiyyətlərini nəzərə almaq və motivasiyasını artırmağa kömək etmək qabiliyyətinə görə təsirli bir təhsil texnologiyasıdır [3].

İnteraktivliyin təmin edilməsi multimediyanın ən əhəmiyyətli üstünlüklərindən biridir. İnteraktivlik müəyyən məhdudiyyətlər daxilində məlumatların təqdimatına nəzarət etməyə imkan verir: istifadəçi parametrləri fərdi olaraq dəyişdirə bilər, nəticələri öyrənə bilər, həmçinin xüsusi üstünlüklər üçün proqram istəklərinə cavab verə bilər, materialın yem dərəcəsini, təkrar sayını və fərdi ehtiyacları ödəyən digər parametrlər. Bu, multimedia texnologiyalarının rahatlığı barədə nəticə çıxarmaq imkanı verir. Multimedia texnologiyaları bir çox məlumat növünü mənalı və ahəngdar birləşdirməyə imkan verir. Bu, məlumatların bir kompüterdən istifadə edərək müxtəlif formalarda təqdim olunmasına imkan verir: Skan edilmiş fotosəkillər, təsvirlər, xəritələr və slaydlar daxil olmaqla şəkillər; səs yazıları, səs effektləri və musiqi; video, kompleks video effektləri; animasiyalar və animasiya təqlidi.

Multimedia texnologiyalarının inkişafında bir istiqamət virtual reallıqdır. Virtual reallıq, qeyri-real bir dünyadan demək olar ki, real hisslər alan bir insandır. Belə bir real olmayan dünyanın modelləşdirilməsi müasir bir kompüterlə yaxşı işlənmişdir. Kompüter alətləri elə tam vizual, səs və digər hisslər yaradır ki, istifadəçi ətrafdakı gerçək dünyanı unudur və həvəslə qondarma dünyaya qərq olur. Varlığın xüsusi bir təsiri, virtual gerçəklikdəki sərbəst hərəkət imkanları və bu gerçəkliyə təsir imkanları ilə əldə edilir. Virtual gerçəkliyə ən sadə və ən az yorucu giriş bu gerçəyin müşahidə oluna biləcəyi bir kompüter ekranından keçir. Bu vəziyyətdə, virtual aləmə hərəkət və təsir ümumiyyətlə bir siçan, joystick və klaviatura köməyi ilə həyata keçirilir. Özünü multimediaya salmaq üçün ucuz bir seçim olaraq, üç ölçülü bir görüntü təmin edən fərqli lincalı eynəklərdən istifadə edə bilərsiniz. Müasir kompüter sistemləri bir çox hallarda şəkilləri və səsləri analiz etməkdə və sintez etməkdə yaxşıdır. Kompüter siçanı və digər cihazlar toxunma hissəsinin təqlidi hesab edilə bilər. Önümüzdəki illərdə fərdi kompüterin qavrayış mexanizmindəki qoxulara bənzər qoxular və ləzzətlərlə işləməyi öyrənəcəyi ehtimal olunur. Texniki səbəblərdən bu gün süni vasitələrin köməyi ilə insan qoxu orqanlarını sanki yenidən yaratmaq mümkün deyil. Multimedia sistemlərinin meydana çıxması, təhsil, elm, sənət, kompüter təlimi kimi sahələrdə, peşəkar fəaliyyətin bir çox sahələrində inqilabi dəyişikliklər edir. Multimedia texnologiyalarında yaradılmış məhsulların tətbiqi aşağıdakılardır: marketinq, təhsil, əyləncə.

1. Marketing funksiyası. Multimedia təqdimatı sadəcə rəngli, məlumat verən və təsirli bir video deyil, ilk növbədə, reklam kampaniyalarının dizaynı və məhsulun təşviqi tədbirləri kimi bir sıra əsas tapşırıqları yerinə yetirən effektiv marketing vasitəsidir.

2. Təhsil funksiyası. Kompüter təlimi, xüsusən getdikcə daha da genişlənən məsafəli təhsil sistemlərində təhsil prosesinin vacib bir hissəsinə çevrilir. Hər iki təlim və test materialının blokları, eyni zamanda interfeys komponenti, multimedia elementlərinin ustalıqla daxil edilməsi ilə təlimin effektivliyini artırır. Hal-hazırda multimedia təlim kurslarının yaradılması aktual və dinamik inkişaf edən bir sahədir.

3. Əyləncə funksiyası. Bir çox filmdə animasiya fraqmentləri var və ya tamamlanıb. İnternetin əyləncə sektoru bu gün multimedia komponentləri olmadan düşünülür [4].

Beləliklə, multimedia, kompüter sistemində mətn, səs, video, qrafika və animasiya birləşdirməyə imkan verən müasir bir kompüter informasiya texnologiyasıdır.

### **Ədəbiyyat**

1. Vaughan, T. (2011). *Multimedia: Making It Work*. McGraw-Hill.
2. Mayer, R. E. (2009). *Multimedia Learning*. Cambridge University Press.
3. Moreno, R., Mayer, R. E. (2018). "Interactive Multimodal Learning Environments." *Educational Psychology Review*.
4. Radianti, J., Majchrzak, T. A., Fromm, J., Wohlgenannt, I. (2020). "A systematic review of immersive virtual reality applications for higher education." *Computers & Education*.

## **ELMI TƏDQIQATLARDA İNFORMASIYA-KOMMUNİKASIYA TEKNOLOGİYALARININ ROLU**

**Muradova Dünya Qədirağa qızı, Əsədova Könül Əbülfət qızı,**

**Ağayeva Nurdan Ağasalam qızı, Ələkbərli Aytən Hafiz qızı**

*(AU, İnformasiya –kommunikasiya texnologiyaları fakültəsi)*

*Dunya.muradova@au.edu.az, Konul.asadova@au.edu.az, nurdan.agayeva@au.edu.az, Aytan.Alakbarly@au.edu.az*

**Xülasə:** Müasir dövrdə informasiya-kommunikasiya texnologiyaları elmi tədqiqatların aparılması, məlumatların toplanması, saxlanması, emalı və paylaşılması baxımından mühüm rol oynayır. Rəqəmsal alətlər tədqiqatçıların elmi mənbələrə daha sürətli çıxış əldə etməsinə, nəticələri daha səmərəli şəkildə təqdim etməsinə və beynəlxalq elmi əmək-

*daşlıq imkanlarının genişlənməsinə şərait yaradır. Məqalədə informasiya-kommunikasiya texnologiyalarının elmi fəaliyyətə təsiri, tədqiqat prosesində yaratdığı üstünlüklər və bu sahədə mövcud olan əsas çağırışlar təhlil edilir. Eyni zamanda rəqəmsal savadlılıq, məlumat təhlükəsizliyi və etibarlı mənbələrdən istifadə məsələlərinin elmi mühit üçün əhəmiyyəti vurğulanır.*

**Açar sözlər:** *informasiya-kommunikasiya texnologiyaları, elmi tədqiqat, rəqəmsal savadlılıq, elektron mənbələr, rəqəmsal əməkdaşlıq, informasiya təhlükəsizliyi.*

Müasir elmi fəaliyyət informasiya-kommunikasiya texnologiyalarından kənarda təsəvvür edilmir. Əvvəllər elmi məlumatlara çıxış daha çox kitabxanalar, çap olunmuş jurnallar və məhdud arxivlər vasitəsilə mümkün idisə, hazırda tədqiqatçılar rəqəmsal kitabxanalar, elektron bazalar, onlayn jurnallar və akademik platformalar vasitəsilə geniş məlumat mənbələrinə qısa müddətdə çıxış əldə edə bilirlər. Bu dəyişiklik elmi tədqiqatın həm sürətinə, həm də keyfiyyətinə təsir göstərir.

İnformasiya-kommunikasiya texnologiyaları yalnız məlumat axtarışı üçün deyil, həm də elmi nəticələrin hazırlanması, sistemləşdirilməsi və yayılması üçün istifadə olunur. Mətn redaktorları, təqdimat proqramları, bulud yaddaş sistemləri, elektron poçt, videokonfrans platformaları və onlayn əməkdaşlıq alətləri elmi fəaliyyətin gündəlik hissəsinə çevrilmişdir. Bu baxımdan İKT elminin köməkçi vasitəsi olmaqla yanaşı, tədqiqat prosesinin daha çevik və əlçatan qurulmasını təmin edən əsas amillərdən biridir [1], [5].

### **1. İnformasiya-kommunikasiya texnologiyalarının elmi fəaliyyətə təsiri**

İKT-nin elmi fəaliyyətə əsas təsirlərindən biri məlumatlara çıxış imkanının genişlənməsidir. Rəqəmsal bazalar və elektron kitabxanalar tədqiqatçılara müxtəlif ölkələrdə aparılmış araşdırmalarla tanış olmaq, mövzu üzrə əvvəlki nəticələri müqayisə etmək və daha əsaslı elmi fikir formalaşdırmaq imkanı verir. Bu, xüsusilə elmi yeniliyin müəyyənləşdirilməsi baxımından vacibdir. Çünki tədqiqatçı öz mövzusunun əvvəlki işlərdən nə ilə fərqləndiyini yalnız geniş mənbə bazasına çıxış əldə etdikdə daha dəqiq görə bilər [2].

İKT həm də elmi məlumatların saxlanılması və idarə olunmasını asanlaşdırır. Elektron sənədlər, bulud xidmətləri və rəqəmsal arxivlər tədqiqat materiallarının daha səliqəli qorunmasına şərait yaradır. Bu vasitələr kağız sənədlərdən asılılığı azaldır və məlumatların itirilməsi riskini müəyyən qədər aşağı salır. Eyni zamanda rəqəmsal formatda saxlanılan məlumatlar daha rahat axtarılır, qruplaşdırılır və yenidən istifadə olunur.

Elmi kommunikasiya sahəsində də İKT-nin rolu böyükdür. Tədqiqatçılar elektron poçt, onlayn konfranslar və akademik şəbəkələr vasitəsilə bir-biri ilə

daha rahat əlaqə saxlayırlar. Bu imkanlar xüsusilə beynəlxalq əməkdaşlıq üçün əhəmiyyətlidir. Fərqli ölkələrdə çalışan alimlər eyni layihə üzərində işləyə, fikir mübadiləsi apara və nəticələri birlikdə müzakirə edə bilirlər [3].

## **2. Tədqiqat prosesində rəqəmsal alətlərin üstünlükləri**

Rəqəmsal alətlərin əsas üstünlüklərindən biri vaxta qənaət etməsidir. Mənbələrin axtarılması, mətnlərin hazırlanması, istinadların tərtibi, təqdimatların qurulması və məlumatların paylaşılması əvvəlki dövrlərlə müqayisədə daha sürətli həyata keçirilir. Bu, tədqiqatçının texniki işlərə daha az, məzmun və təhlilə isə daha çox vaxt ayırmasına imkan verir.

İkinci üstünlük elmi işin daha səliqəli və sistemli hazırlanmasıdır. Elektron sənəd redaktorları, cədvəl proqramları və təqdimat alətləri məlumatların daha aydın göstərilməsinə kömək edir. Tədqiqat nəticələrinin qrafik, cədvəl və diaqram formasında təqdim edilməsi oxucunun mövzunu daha rahat anlamasına şərait yaradır. Bu, riyaziyyat, informatika, iqtisadiyyat, sosial elmlər və digər sahələrdə aparılan tədqiqatlar üçün faydalıdır.

Üçüncü üstünlük elmi nəticələrin daha geniş auditoriyaya çatdırılmasıdır. Elektron jurnallar, institut saytları, açıq girişli bazalar və onlayn konfranslar tədqiqatın yalnız yerli mühitdə deyil, beynəlxalq səviyyədə də tanınmasına imkan yaradır. UNESCO açıq elm yanaşmasında elmi məlumatların daha əlçatan, şəffaf və paylaşılabilən olmasını vacib prinsip kimi göstərir [4]. Bu baxımdan İKT elmi biliklərin cəmiyyətə daha tez və daha geniş şəkildə ötürülməsinə kömək edir.

## **3. Elmi mühitdə rəqəmsal savadlılığın əhəmiyyəti**

İKT-dən istifadə imkanlarının genişlənməsi rəqəmsal savadlılığı daha vacib edir. Tədqiqatçı yalnız internetdən məlumat tapmağı deyil, həmin məlumatın etibarlılığını qiymətləndirməyi də bacarmalıdır. Çünki rəqəmsal mühitdə düzgün, elmi və etibarlı mənbələrlə yanaşı, qeyri-dəqiq və yoxlanılmamış məlumatlar da geniş yayılmışdır. Bu səbəbdən mənbə seçimi elmi işin keyfiyyətinə birbaşa təsir edir.

Rəqəmsal savadlılıq həm də elmi etikaya bağlıdır. Mənbələrdən düzgün istifadə etmək, müəllif hüquqlarına hörmətlə yanaşmaq, plagiatdan uzaq durmaq və istinad qaydalarına əməl etmək müasir elmi fəaliyyətin əsas tələblərindəndir. Rəqəmsal alətlər bu prosesdə kömək edə bilər, lakin məsuliyyət yenə də tədqiqatçının üzərində qalır.

Bu sahədə məlumat təhlükəsizliyi də xüsusi əhəmiyyət daşıyır. Elmi layihələrdə istifadə olunan sənədlər, şəxsi məlumatlar, araşdırma nəticələri və akademik yazışmalar qorunmalıdır. Güclü parolların istifadəsi, məlumatların ehtiyat nüsxəsinin saxlanması və etibarlı platformalardan istifadə tədqiqat prose-

sinin təhlükəsizliyini artırır [5].

#### **4. Mövcud çağırışlar və inkişaf istiqamətləri**

İKT elmi tədqiqatlar üçün geniş imkanlar yaratsa da, bəzi problemlər də mövcuddur. Bu problemlərdən biri rəqəmsal bərabərsizlikdir. Bütün tədqiqatçılar eyni texniki imkanlara, sürətli internetə və ödənişli elmi bazalara çıxış əldə edə bilmir. Bu isə elmi fəaliyyət üçün bərabər olmayan şərait yarada bilər. Xüsusilə gənc tədqiqatçılar və maddi imkanları məhdud olan müəssisələr üçün bu məsələ daha aktualdır.

Digər çağırış informasiya çoxluğu ilə bağlıdır. Rəqəmsal mühitdə məlumatın çox olması hər zaman üstünlük sayılır. Əksinə, bəzən tədqiqatçı üçün əsas çətinlik məlumat tapmaq deyil, çoxlu məlumat içərisindən etibarlı və mövzuya uyğun olanı seçmək olur. Buna görə elmi tədqiqatlarda mənbələrin düzgün seçilməsi, müqayisə olunması və təhlil edilməsi mühüm bacarıq kimi qalır.

Gələcəkdə elmi tədqiqatlarda İKT-nin rolu daha da artacaq. Rəqəmsal arxivlərin genişlənməsi, açıq elm təşəbbüsləri, onlayn əməkdaşlıq mühitləri və süni intellekt əsaslı köməkçi alətlər elmi fəaliyyətin formasını dəyişməyə davam edəcək. Lakin bu prosesdə texnologiyanın məqsəd deyil, vasitə olduğu unudulmamalıdır. Əsas məqsəd elmi tədqiqatın keyfiyyətini artırmaq, bilik mübadiləsini gücləndirmək və cəmiyyət üçün faydalı nəticələr əldə etməkdir.

#### **Nəticə**

Bu məqalədə informasiya-kommunikasiya texnologiyalarının elmi tədqiqatlarda rolu müasir elmi fəaliyyətin vacib istiqamətlərindən biri kimi nəzərdən keçirilmişdir. Aydın olur ki, İKT məlumatlara çıxışı asanlaşdırır, elmi əməkdaşlığı genişləndirir, tədqiqat materiallarının hazırlanmasını və paylaşılmasını daha səmərəli edir. Bununla yanaşı, rəqəmsal savadlılıq, mənbələrin etibarlılığı, informasiya təhlükəsizliyi və rəqəmsal bərabərsizlik kimi məsələlər də diqqətdən kənarda qalmamalıdır. Elmi mühitdə İKT-dən düzgün istifadə tədqiqatın keyfiyyətini artırır və elmin cəmiyyətlə əlaqəsini daha da gücləndirir.

#### **Ədəbiyyat**

1. International Telecommunication Union. (2023). Measuring digital development: Facts and Figures 2023. ITU.
2. OECD. (2021). Digital transformation in science. OECD Publishing.
3. OECD. (2023). OECD Science, Technology and Innovation Outlook 2023. OECD Publishing.
4. UNESCO. (2021). UNESCO Recommendation on Open Science. UNESCO.
5. UNESCO. (2018). ICT Competency Framework for Teachers. UNESCO.



## VAHİD KVADRATDA KOŞİ-RİMAN TƏNLİYİ ÜÇÜN SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN ZƏRURİ ŞƏRTLƏRİ VƏ FREDHOLMLUĞU

**Musayeva Gülayə Azər qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

*gulayamusayeva2@gmail.com*

**Xülasə:** Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllinin köməyi ilə əsas münasibət qurularaq, zəruri şərtlər alınır. Sərhəd boyunca integrallarla verilən zəruri şərtlər özündə müəyyən sinqulyarlıqlar saxlayır. Bu sinqulyarlıqlar xüsusi üsullarla requlyarlaşdırıldıqdan sonra, verilmiş sərhəd şərtləri ilə birlikdə nəzərdən keçirilərək, məsələnin Fredholm tipinə aid olmasının kafi şərtləri müəyyən edilir.

**Açar sözlər:** Koşi-Riman tənliyi, analitik funksiya, sərhəd məsələsi, vahid kvadrat, zəruri şərtlər, sinqulyarlıqlar, requlyarizasiya, fredholmluq.

Aşağıdakı məsələyə baxaq:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + i \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in D \subset R^2, \quad (1)$$

$$a_{k1}(t)u(t, 0) + a_{k2}(t)u(0, t) + a_{k3}(t)u(1-t, 1) + \\ + a_{k4}(t)u(1, 1-t) = \varphi_k(t), \quad k = 1, 2; t \in [0, 1], \quad (2)$$

burada  $i = \sqrt{-1}$ ,  $D = \{x = (x_1, x_2): x_1 \in (0, 1), x_2 \in (0, 1)\}$ ,  $a_{kj}(t)$ ,  $k = 1, 2$ ;  $j = \overline{1, 4}$ ; verilmiş kəsilməz funksiyalar, (2) sərhəd şərtləri isə xətti asılı deyil. (1) tənliyinin fundamental həllindən istifadə edərək əsas münasibət alınır. Burada Karleman şərti ödənilir [9]. Məlumdur ki, Koşi-Riman tənliyinin fundamental həlli:

$$\int_{\Gamma} u(x)U(x - \xi)[\cos(v, x_2) + i\cos(v, x_1)]dx = \\ = \int_D u(x) \left[ \frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_2} + i \frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_1} \right] dx = \\ = \int_D u(x)\delta(x - \xi)dx = \begin{cases} u(\xi), & \xi \in D, \\ \frac{1}{2}u(\xi), & \xi \in \Gamma, \end{cases} \quad (3)$$

burada  $v$  – ilə  $D$  oblastı olan vahid kvadratin sərhəddinə çəkilmiş xarici normal,  $\delta(x)$  ilə Dirakın delta funksiyası işarə edilmişdir. Aldığımız (3) əsas münasibəti iki hissədən ibarətdir. Birinci hissə ( $\xi \in D$  olan hissə) verilmiş (1) tənliyin  $D$  də təyin olunmuş ixtiyari həllini, ikinci hissə isə ( $\xi \in \Gamma$  olan hissə) zəruri şərtləri verir. Bu zəruri şərtlər sərhəd boyu integrallardan ibarətdir və tərkibində sinqulyarlıq saxlayır.

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t, 0) = \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(\tau, 0)}{\tau - t} d\tau - \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(0, \tau)}{\tau - it} d\tau + \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(1-\tau, 1)}{1+i(1-\tau-t)} + \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(1, 1-\tau)}{1-\tau+i(1-t)} d\tau, \\ u(0, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{u(\tau, 0)}{t-i\tau} d\tau - \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(0, \tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{u(1-\tau, 1)}{1-t+i(1-\tau)} d\tau + \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(1, 1-\tau)}{1-\tau-t+i} d\tau, \\ u(1-t, 1) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{u(\tau, 0)}{1-i(\tau-1+t)} d\tau - \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(0, \tau)}{\tau-1-i(1-t)} d\tau + \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(1-\tau, 1)}{\tau-t} d\tau - \\ \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(1, 1-\tau)}{\tau-it} d\tau, \\ u(1, 1-t) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{u(\tau, 0)}{1-t-i(\tau-1)} d\tau - \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(0, \tau)}{\tau-1+t-i} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{u(1-\tau, 1)}{t-i\tau} d\tau - \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(1, 1-\tau)}{\tau-t} d\tau, \end{array} \right. \quad (4)$$

### Zəruri şərtlərin requlyasiyası

Aldığımız (5) zəruri şərtlərindən aşağıdakı xətti kombinasiyanı quraq:

$$\begin{aligned} & \alpha_{k1}(t)u(t, 0) - \alpha_{k2}(t)u(0, t) + \alpha_{k3}(t)u(1-t, 1) - \alpha_{k4}(t)u(1, 1-t) = \\ & = \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{\alpha_{k1}(t)u(\tau, 0) + \alpha_{k2}(t)u(0, \tau) + \alpha_{k3}(t)u(1-\tau, 1) + \alpha_{k4}(t)u(1, 1-\tau)}{\tau - t} d\tau + \\ & + \dots = \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{d\tau}{\tau - t} \{ [\alpha_{k1}(t) - \alpha_{k1}(\tau)] + \alpha_{k1}(\tau) \} u(\tau, 0) + \\ & + [(\alpha_{k2}(t) - \alpha_{k2}(\tau)) + \alpha_{k2}(\tau)] u(0, \tau) + \\ & + [\alpha_{k3}(t) - \alpha_{k3}(\tau)] + \alpha_{k3}(\tau) u(1-\tau, 1) + \\ & + [\alpha_{k4}(t) - \alpha_{k4}(\tau)] + \alpha_{k4}(\tau) u(1-\tau, 1) + \\ & + \dots = \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{d\tau}{\tau - t} [\alpha_{k1}(\tau)u(\tau, 0) + \alpha_{k2}(\tau)u(0, \tau) + \alpha_{k3}(\tau)u(1-\tau, 1) +] \\ & + \alpha_{k3}(\tau)u(1, 1-\tau) + \dots = \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{\varphi_k(\tau)d\tau}{\tau - t} + \dots, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (5)$$

burada (...) ilə sinqulyar olmayan hədlərin cəmi işarə edilmiş və (2) sərhəd şərtindən istifadə edilmişdir.

Əgər

$$\varphi_k(t) \in C^{(1)}[0, 1], \quad \varphi_k(0) = \varphi_k(1) = 0, \quad k = 1, 2, \quad (6)$$

şərti ödənilərsə (5) ifadəsinin sağ tərəfində yalın inteqral adi mənada da mövcud olacaqdır.

Beləliklə aldığımız (5) ifadələri requlyardılar.

### Məsələnin fredholmluğu

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{k1}(t)u(t, 0) + \alpha_{k2}(t)u(0, t) + \alpha_{k3}(t)u(1-t, 1) + \alpha_{k4}(t)u(1, 1-t) = \varphi_k(t) \\ \alpha_{k1}(t)u(t, 0) - \alpha_{k2}(t)u(0, t) + \alpha_{k3}(t)u(1-t, 1) - \alpha_{k4}(t)u(1, 1-t) = \\ = \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{\varphi_k(\tau)d\tau}{\tau - t} + \dots, \quad k = 1, 2 \end{array} \right. \quad (7)$$

Aldığımız (7) şəklində olan iki münasibətləri tərəf-tərəfə toplayıb, sonra isə çıxmaqla aşağıdakı iki sistemi almış oluruq:

$$\begin{cases} \alpha_{k1}(t)u(t, 0) + \alpha_{k3}(t)u(1 - t, 1) = \frac{\varphi_k(t)}{2} + \frac{i}{2\pi} \int_0^1 \frac{\varphi_k(\tau)}{\tau - t} d\tau + \dots, \\ \alpha_{k2}(t)u(0, t) + \alpha_{k4}(t)u(1, 1 - t) = \frac{\varphi_k(t)}{2} - \frac{i}{2\pi} \int_0^1 \frac{\varphi_k(\tau)}{\tau - t} d\tau - \dots, \quad k = 1, 2 \end{cases} \quad (8)$$

Bu sistemdə isə:

$$\Delta_1(t) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}(t) & \alpha_{13}(t) \\ \alpha_{21}(t) & \alpha_{23}(t) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (9)$$

$$\Delta_2(t) = \begin{vmatrix} \alpha_{12}(t) & \alpha_{14}(t) \\ \alpha_{22}(t) & \alpha_{24}(t) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (10)$$

şərtləri daxilində (8) sistemindən

$$u(t, 0), u(0, t), u(1 - t, 1), \text{ və } u(1, 1 - t) \quad (11)$$

funksiyaları üçün normal şəkilli nüvələri requlyar (nüvələrində sinqulyarlıqlar olmayan) ikinci növ Fredholm tipli integral tənliklər sistemi almış oluruq.

### Ədəbiyyat

1. Əliyev N.Ə., Zeynalov R.M. Koşi-Riman tənliyi üçün Lavrentyev-Bitsadze şərtli Steklov məsələsinin fredholmluğu. ADPU-nun Xəbərləri, Təbiət elmləri bölməsi, Bakı-№1-2012, səh.16-19.
2. Алиев Н.А., Зейналов И.С. Представленные решения одной задачи Коши в виде интегрального вычета, ДУ, т1, №9, 1965, стр.1264-1266.
3. Алиев Н.А., Касимов Ф.А. Решение смешанной задачи для ограниченной области, ученые записки, Азнефтехим, им. М.Азизбекова, №7, 1978, стр.30-36.
4. Алиев Н. А., Гулиев А. С. «Граничная задача для уравнения Лапласа в трехмерном пространстве», изв. АН Азерб.ССР, серия физико-технических и математических наук, №9, 1985, стр.53 – 56.
5. Aliev, N., Rezapour, Sh., Jahanshahi, M. A mixed problem for Navier-Stokes System, Mathematica Moravica Journal of University of Kragujevac, Serbia vol. 12-2 (2008), pp. 1- 14
6. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными, Физмат., 1961, 400 стр.
7. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. Государственное издательство физико- математической литературы, Москва, 1958, 544 стр.
8. Aliyev N.A., Samadova S. Boundary value problem in square for Cauchy- Riemann equation, Third international scientific conference of young researchers, Baku, Azerbaijan, 17-18 aprel, 2015, pp.141-142.
9. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.

## VAHİD KVADRATDA KOŞİ-RİMAN TƏNLIYI ÜÇÜN SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİNİN ARAŞDIRILMASI

**Musayeva Gülayə Azər qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

*gulayamusayeva2@gmail.com*

**Xülasə:** Bu işdə vahid kvadratda Koşi-Riman tənliyi üçün sərhəd məsələsinin həlli araşdırılır. Kompleks dəyişənli funksiyaların analitikliyi şərti kimi verilən Koşi-Riman tənlikləri nəzərdən keçirilir və bu tənliklər üçün sərhəd şərtlərinin təsiri öyrənilir. Koşi-Riman tənliyinin fundamental həllinin köməyi ilə əsas münasibət qurularaq, zəruri şərtlər alınır. Sərhəd boyunca inteqrallarla verilən zəruri şərtlər özündə müəyyən sinqulyarlıqlar saxlayır.

**Açar sözlər:** Koşi-Riman tənliyi, analitik funksiya, sərhəd məsələsi, vahid kvadrat, zəruri şərtlər, sinqulyarlıqlar.

İkinci tərtib Laplas tənliyi üçün bir (Dirixle, Neyman və ya Puankare), dördüncü tərtib biharmonik tənlik üçün isə iki sərhəd şərti verilir. Birinci tərtib elliptik tip Koşi-Riman tənliyi üçün qabarıq oblastda sərhəd iki yerə bölündükdə bir qeyri-lokal şərt kifayət edir, sərhəd dörd yerə bölündükdə isə iki sərhəd şərti tələb olunur.

Aşağıdakı məsələyə baxaq:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + i \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in D \subset R^2, \quad (1)$$

$$\alpha_{k1}(t)u(t, 0) + \alpha_{k2}(t)u(0, t) + \alpha_{k3}(t)u(1-t, 1) + \alpha_{k4}(t)u(1, 1-t) = \varphi_k(t), \quad k = 1, 2; t \in [0, 1], \quad (2)$$

Burada  $i = \sqrt{-1}$ ,  $D = \{x = (x_1, x_2): x_1 \in (0, 1), x_2 \in (0, 1)\}$ ,  $\alpha_{kj}(t)$ ,  $k = 1, 2$ ;  $j = \overline{1, 4}$ ; verilmiş kəsilməz funksiyalar, (2) sərhəd şərtləri isə xətti asılı deyil. Burada Karleman şərti ödənilir. Burada Karleman şərti ödənilir [9]. Məlumdur ki, Koşi-Riman tənliyinin fundamental həlli :

$$U(x - \xi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}, \quad (3)$$

funksiyasıdır.

Verilmiş (1) tənliyini (3) fundamental həllinə vurub,  $D$  oblastı boyunca inteqrallayaq:

$$\int_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} U(x - \xi) dx - i \int_D \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} U(x - \xi) dx = 0.$$

Ostrogradski-Qauss formulunu tətbiq etsək, alarıq:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} u(x) U(x - \xi) [\cos(v, x_2) + i \cos(v, x_1)] dx = \\ & = \int_D u(x) \left[ \frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_2} + i \frac{\partial U(x - \xi)}{\partial x_1} \right] dx = \\ & = \int_D u(x) \delta(x - \xi) dx = \begin{cases} u(\xi), & \xi \in D, \\ \frac{1}{2} u(\xi), & \xi \in \Gamma, \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

burada  $v$  – ilə  $D$  oblastı olan vahid kvadratin sərhəddinə çəkilmiş xarici normal,  $\delta(x)$  ilə Dirakin delta funksiyası işarə edilmişdir. Aldığımız (4) əsas münasibəti iki hissədən ibarətdir. Birinci hissə ( $\xi \in D$  olan hissə) verilmiş (1) tənliyin  $D$  də təyin olunmuş ixtiyari həllini, ikinci hissə isə ( $\xi \in \Gamma$  olan hissə) zəruri şərtləri verir.

Bu şərtləri ayıraq:

$$\begin{cases} u(t, 0) = \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(\tau, 0)}{\tau - t} d\tau - \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(0, \tau)}{\tau - it} d\tau + \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(1 - \tau, 1)}{1 + i(1 - \tau - t)} d\tau + \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(1, 1 - \tau)}{1 - \tau + i(1 - t)} d\tau, \\ u(0, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{u(\tau, 0)}{t - i\tau} d\tau - \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(0, \tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{u(1 - \tau, 1)}{1 - t + i(1 - \tau)} d\tau + \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(1, 1 - \tau)}{1 - \tau - t + i} d\tau, \\ u(1 - t, 1) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{u(\tau, 0)}{1 - i(\tau - 1 + t)} d\tau - \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(0, \tau)}{\tau - 1 - i(1 - t)} d\tau + \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(1 - \tau, 1)}{\tau - t} d\tau - \\ \quad \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(1, 1 - \tau)}{\tau - it} d\tau, \\ u(1, 1 - t) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{u(\tau, 0)}{1 - t - i(\tau - 1)} d\tau - \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(0, \tau)}{\tau - 1 + t - i} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{u(1 - \tau, 1)}{t - i\tau} d\tau - \frac{i}{\pi} \int_0^1 \frac{u(1, 1 - \tau)}{\tau - t} d\tau, \end{cases} \quad (5)$$

Zəruri şərtlər üçün alınan (5) münasibətindən görünür ki, onlara sinqulyar hədlər daxildir.

### Ədəbiyyat

1. Əliyev N.Ə., Zeynalov R.M. Koşi-Riman tənliyi üçün Lavrentyev-Bitsadze şərtləli Steklov məsələsinin fredholmluğu. ADPU-nun Xəbərləri, Təbiət elmləri bölməsi, Bakı-№1-2012, səh.16-19.
2. Алиев Н.А., Зейналов И.С. Представленные решения одной задачи Коши в виде интегрального вычета, ДУ, т1, №9, 1965, стр.1264-1266.
3. Алиев Н.А., Касимов Ф.А. Решение смешанной задачи для ограниченной области, ученые записки, Азнефтехим, им. М.Азизбекова, №7, 1978, стр.30-36.
4. Алиев Н. А., Гулиев А. С. «Граничная задача для уравнения Лапласа в трехмерном пространстве», изв. АН Азерб.ССР, серия физико - технических и математических наук, №9, 1985, стр.53 - 56.
5. Aliev, N., Rezapour, Sh., Jahanshahi, M. A mixed problem for Navier-Stokes System,

- Mathematica Moravica Journal of University of Kragujevac, Serbia vol. 12-2 (2008), pp. 1- 14.
6. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными, Физмат., 1961, 400 стр.
7. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. Государственное издательство физико- математической литературы, Москва, 1958, 544 стр.
8. Aliyev N.A., Samadova S. Boundary value problem in square for Cauchy- Riemann equation, Third international scientific conference of young researchers, Baku, Azerbaijan, 17-18 aprel, 2015, pp.141-142.
9. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.

## BİR TİPİK OLMAYAN KEYFİYYƏT MEYARLI PAYLANMIŞ PARAMETRLİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ŞƏRTİ

**Mustafayeva Fatimə Allahverdi qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

fatimamustafayeva18@gmail.com

**Xülasə:** İşdə bir tipik olmayan keyfiyyət meyarlı paylanmış parametrli optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Məsələdə fərz olunur ki, funksional qeyri-xətti, idarə oblastı qabarıq çoxluqdur. Baxılan şərtlər daxilində mümkün idarənin optimallığı üçün xəttiləşdirilmiş maksimum şərti isbat olunur.

**Açar sözlər:** paylanmış parametrli optimal idarəetmə məsələsi, mümkün idarə, optimal idarə, zəruri şərt.

İşdə

$$S(u) = c'z(t_1, x_1) + \int_{t_0}^{t_1} \int_x^{x_1} (C'(t, x) z(t, x) + h(t, x, u(t, x))) dt dx \quad (1)$$

funksionalının

$$z_{tx}(t, x) = A(t, x)z(t, x) + f(t, x, u(t, x)), \quad (t, x) \in D = T \times X, \quad (2)$$

$$z(t_0, x) = a(x), x \in X = [x_0, x_1], \quad (3)$$

$$z(t, x_0) = b(t), t \in [t_0, t_1], \quad (4)$$

$$a(x_0) = b(t_0), \quad (5)$$

$$u(t, x) \in U \subset R^r, (t, x) \in D \quad (6)$$

məhdudiyyət şərtləri daxilində minimallaşdırılması məsələsinə baxılır.

Burada  $A(t, x)$  – verilmiş,  $(n \times n)$  – ölçülü kəsilməz matris funksiya,  $f(t, x, u)$  – verilmiş,  $n$ -ölçülü olan kəsilməz vektor-funksiya,  $a(x)$ ,  $b(t)$  – isə

verilmiş  $n$ -ölçülü kəsilməz vektor-funksiyalardır.

Baxılan xətti optimal idarəetmə məsələsində optimallıq üçün zəruri və kafi şərt alınmışdır.

$$H(t, x, u, \psi) = \psi'(t, x)f(t, x, u(t, x)) + h(t, x, u(t, x))$$

şəklində Hamilton-Pontryagin funksiyasını daxil edək.

Burada  $\psi(t, x)$ vektor-funksiyası

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t \partial x} &= A'(t, x)\psi(t, x) - C(t, x), \\ \frac{\partial \psi'(t_1, x)}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial \psi'(t, x_1)}{\partial t} = 0, \\ \psi'(t_1, x_1) &= -c\end{aligned}$$

qoşma məsələnin həllidir.

Funksionalın arım düsturu aşağıdakı kimi tapılmışdır.

$$S(\bar{u}) - S(u) =$$

$$= - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H(t, x, \bar{u}(t, x), \psi(t, x)) - H(t, x, u(t, x), \psi(t, x)) dx dt.$$

İsbat edilmiş funksionalın xüsusi artım düsturundan optimallıq üçün zəruri və kafi şərt alınmışdır. Beləliklə apardığımız mühakimələr nəticəsində aşağıdakı hökmün doğruluğu isbat edilmişdir [1-3].

**Teorem.** Verilmiş (1)-(6) xətti optimal idarəetmə məsələsində  $u^0(t, x)$  mümkün idarəsinin optimal idarə olması üçün zəruri və kafi şərt ixtiyari  $u(t, x) \in U \subset R^r, (t, x) \in D$  üçün

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H(t, x, \bar{u}(t, x), \psi(t, x)) - H(t, x, u(t, x), \psi(t, x)) dx dt \leq 0$$

bərabərsizliyinin ödənməsidir.

### Ədəbiyyat

1. Алексеев В.М., Фомин С.В., Тихомиров В.М. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 429 с
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Альсевич В.В. Методы оптимизации. Минск: Четыре четверти, 2011. 472 с.
3. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: URSS, 2013. 256 с.

**BİR TİPİK OLMAYAN KEYFİYYƏT MEYARLI PAYLANMIŞ  
PARAMETRLİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ  
EYLER TƏNLIYININ ANALOQU**

**Mustafayeva Fatimə Allahverdi qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

fatimamustafayeva18@gmail.com

**Xülasə:** *İşdə bir tipik olmayan keyfiyyət meyarlı paylanmış parametrli optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Məsələdə idarə oblasının açıq çoxluq olduğu halda optimalıq üçün birinci və ikinci tərtib zəruri şərtlər isbat olunur.*

**Açar sözlər:** *paylanmış parametrli optimal idarəetmə məsələsi, mümkün idarə, optimal idarə, Eyer tənliyinin analoqu, ikinci tərtib zəruri şərtlər.*

Fərz edək ki,  $D = T \times X = [t_0, t_1] \times [x_0, x_1]$  düzbucaqlısında tədqiq olunan proses paylanmış parametrli bir proses

$$z_{tx}(t, x) = A(t, x)z(t, x) + f(t, x, u(t, x)), \quad (t, x) \in D = T \times X \quad (1)$$

$$z(t_0, x) = a(x), \quad x \in X = [x_0, x_1], \quad (2)$$

$$z(t, x_0) = b(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (3)$$

$$a(x_0) = b(t_0) \quad (4)$$

tənlikləri ilə təsvir olunurlar.

Burada  $f(t, x, u)$  – arqumentlərinə nəzərən  $(x, u)$  – ya görə ikinci tərtib törəməsi ilə birlikdə kəsilməz vektor funksiya,  $a(x)$ ,  $b(t)$  – verilmiş  $n$ -ölçülü mütləq kəsilməz vektor-funksiyalar,  $u(t, x)$  -  $r$  – ölçülü idarəedic vektor-funksiya olub ölçülən və məhdud olaraq öz qiymətini verilmiş, boş olmayan, məhdud və açıq çoxluq olan  $U \subset R^r$  çoxluğundan alır, yəni

$$u(t, x) \in U \subset R^r, \quad (t, x) \in D \quad (5)$$

məhdudiyyətini ödəyir.

Fərz edək ki, verilən şərtlərə uyğun (1)-(4) məsələsinin ixtiyari verilmiş mümkün idarəsinə üçün yeganə şəkildə və mütləq kəsilməz həlli mövcuddur.

İndi bu (1)-(4) sərhəd məsələləsinin bütün mümkün idarələrə uyğun həllərinə görə

$$S(u) = \varphi(z(t_1, x_1)) + \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} F(t, x, u(t, x)) \quad (6)$$

şəklində terminal tipli qeyri-xətti olan funksionalı təyin edimişdir.

Burada  $\varphi(z)$  –verilmiş və iki dəfə kəsilməz diferensiallanan skalyar funksiya,  $F(t, x, u)$  – arqumentlərinin küllusunə nəzərən iki dəfə kəsilməz olan



diferensiallanan skalyar funksiyadır.

(6) funksionalına (1)-(4) şərtləri daxilində minimum qiymət verən  $u(t, x)$  mümkün idarəsinə optimal idarə deyilir.

$$H(t, x, u, \psi) = \psi'(t, x)f(t, x, u(t, x)) + h(t, x, u(t, x))$$

şəklində skalyar funksiya olan Hamilton-Pontryagin funksiyası daxil edilmişdir.

Burada  $\psi(t, x)$  vektor-funksiyasının

$$\frac{\partial^2 \psi(t, x)}{\partial t \partial x} = A'(t, x)\psi(t, x) - C(t, x),$$

$$\frac{\partial \psi'(t_1, x)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi'(t, x_1)}{\partial t} = 0,$$

$$\psi'(t_1, x_1) = -\frac{\partial \varphi'(z(t_1, x_1))}{\partial z},$$

qoşma məsələnin həlli olduğunu fərz edərək funksionalın birinci və ikinci variationaları uyğun olaraq aşağıdakı qaydada hesablanmışdır.

$$\delta^1 S(u, \delta u) = - \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} H_u'(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)) \delta u(t, x) dx dt,$$

$$\begin{aligned} \delta^2 S(u, \delta u) &= \delta z(t_1, x_1) \frac{\partial^2 \varphi(z(t_1, x_1))}{\partial z^2} \delta z(t_1, x_1) - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \delta u'(t, x) H_{uu}(t, x, z(t, x), u(t, x), \psi(t, x)) \delta u(t, x) dx dt. \end{aligned}$$

Variasiya hesabının əsas xassələrinə görə məlumdur ki, funksionalın minimum qiymət alması üçün minimum nöqtəsində birinci variasiya sıfır bərabər olmalı, ikinci variasiyası isə mənfi olmamalıdır [1-3].

Beləliklə aşağıdakı hökmlər isbat edilmişdir.

**Teorem 1.** Baxılan məsələdə  $U$  idarə oblastı açıq çoxluq olarsa, onda  $u(t, x)$  mümkün idarəsinin optimallığı üçün zəruri şərt

$$H_u(\theta, \xi, u(\theta, \xi), \psi(\theta, \xi)) = 0$$

münasibətinin  $D$  çoxluğundan olan bütün  $(\theta, \xi)$  cütləri üçün ödənməsidir.

**Teorem 2.** Baxılan (1)-(4) idarəetmə məsələsində  $u(t, x)$  klassik ekstremalının optimallığı üçün zəruri şərt

$$\begin{aligned} &\delta z'(t_1, x_1) \varphi_{zz}(z(t_1, x_1)) \delta z(t_1, x_1) - \\ &- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{x_1-1} \delta u'(t, x) H_{uu}(t, x, u(t, x), \psi(t, x)) \delta u(t, x) \geq 0 \end{aligned}$$

bərabərsizliyinin hər bir  $\delta u(t, x)$  variasiyası üçün ödənilməsidir.

Bu qeyri-aşkar şəkildə verilən optimallıq şərti ikinci tərtib zəruri şərtidir.

### **Ədəbiyyat**

1. Ванько В.И., Ермоштина О.В., Кувыркин Г.Н. Вариационное исчисление и оптимальное управления. М. 2018, 540 с.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М., «Либроком» 2016, 472 с.
3. Гайшун И.В. Многопараметрические системы управления. Минск, 2000.

## **MAGİSTR TƏLƏBƏ MƏLUMATLARININ İDARƏ EDİLMƏSİ ÜÇÜN İNFORMASIYA-AXTARIŞ SİSTEMİNİN STRUKTUR-FUNKSIONAL MODELİ**

**Namazova Əsli Taleh qızı**

*(Bakı Dövlət Universiteti, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*namazovaasli8@gmail.com*

**Xülasə:** *Tədqiqat işində magistr tələbələrinin elmi və akademik fəaliyyətini mərkəzləşdirilmiş qaydada idarə edən informasiya-axtarış sisteminin (İAS) konseptual struktur modeli təqdim olunur. Tezisdə sistemin üçsəviyyəli memarlıq quruluşu, verilənlərin relyasiya sxemi və magistr dissertasiyalarının mərhələli izlənməsi üçün "Workflow" modulu təsvir edilmişdir. Təklif olunan model məlumatların çevik filtrasiyasını və elmi rəhbərlərlə tələbələr arasında effektiv rəqəmsal koordinasiyanı təmin edir.*

**Açar sözlər:** *İnformasiya-axtarış sistemi, struktur model, verilənlər bazası, magistr idarəetməsi, monitoring.*

Müasir ali təhsil müəssisələrində magistratura pilləsi tələbələrdən həm nəzəri dərslərdə iştirakı, həm də fərdi elmi-tədqiqat trayektoriyasının qurulmasını tələb edən kompleks bir mərhələdir. Bu prosesin effektiv idarə olunması üçün tətbiq edilən ənənəvi metodlar, o cümlədən kağız üzərində hesabatlılıq və ya sadə cədvəl redaktorları, artıq böyük həcmli məlumatların sürətli emalı və analitik təhlili tələblərinə cavab vermir. İlkən araşdırmalar göstərir ki, magistr tələbə məlumatlarının vahid mərkəzdən idarə olunması üçün xüsusi proqram vasitələrinin layihələndirilməsi həm elmi rəhbərin inzibati yükünü azaldır, həm də universitetin elmi fəaliyyətinin monitoringini şəffəfləşdirir [1].

Təklif olunan sistemin proqram təminatı səviyyəsində dayanıqlılığını və gələcəkdə digər universitet modulları ilə integrasiyasını təmin etmək məqsədilə 3-tier (üçsəviyyəli) memarlıq modelindən istifadə olunur. Bu yanaşma sistemin komponentlərini – təqdimat qatını, biznes məntiqi qatını və verilənlər qatını bir-birindən asılı olmayaraq inkişaf etdirməyə imkan verir. Birinci səviyyə istifadəçi

interfeysini (UI/UX), ikinci səviyyə mürəkkəb axtarış sorğularının emalını, üçüncü səviyyə isə məlumatların strukturlaşdırılmış saxlanılmasını təmin edir [2].

Sistemin mərkəzində dayanan verilənlər bazası SQL (Structured Query Language) standartlarına uyğun olaraq relyasiya modelində layihələndirilməlidir. Magistr tələbələrinə aid minlərlə müxtəlif növ məlumatın (şəxsi profillər, elmi məqalələr, tezis layihələri) sistemli saxlanılması üçün verilənlər bazasında üçüncü normal forma (3NF) tətbiq edilir. Bu struktur, informasiya axtarış sisteminin mürəkkəb sorğulara real zaman rejimində cavab verməsinə şərait yaradır [3].

Magistr dissertasiyasının hazırlanma prosesi bir neçə kritik mərhələdən keçir: mövzunun təsdiqi, ədəbiyyat icmal, eksperimental hissə və yekun müdafiə. Təklif olunan "Workflow" (iş axını) modulu bu mərhələlərin hər birini rəqəmsal olaraq izləməyə və rəsmi sənədləşdirməyə imkan verir. Elmi rəhbər sistem üzərindən tələbənin elmi işi üzrə cari irəliləyişini qiymətləndirir, sənəd mübadiləsini həyata keçirir və magistr təhsilinin keyfiyyətini artırmaq üçün zəruri olan mentorluq dəstəyini mərkəzləşdirilmiş platforma vasitəsilə təmin edir [2].

Sistem daxilində informasiya axtarışının səmərəli olması üçün məlumatların indeksləşdirilməsi və çoxmeyarlı filtrasiya alqoritmlərindən istifadə olunur. Bu, idarəetmə heyətinə müəyyən bir ixtisas, elmi istiqamət və ya elmi rəhbər üzrə tələbələrin statistik göstəricilərini operativ şəkildə əldə etməyə imkan verir. Məlumatların həssaslığını nəzərə alaraq, sistemdə Role-Based Access Control (RBAC) modeli tətbiq edilir ki, bu da hər bir istifadəçi qrupuna yalnız öz səlahiyyəti daxilində olan məlumatlara giriş icazəsi verir [4].

Tədqiqat nəticəsində hazırlanan struktur-funksional model magistr tələbə məlumatlarının vahid rəqəmsal məkanda idarə olunmasını təmin edən effektiv bir mexanizmdir. Sistemin tətbiqi ali təhsil müəssisələrində magistratura şöbələrinin inzibati işini yüngülləşdirir və elmi-tədqiqat işlərinin mərhələli monitorinqini şəffaflaşdırır [1]. Gələcək tədqiqatlarda bu sistemə maşın öyrənməsi əsaslı proqnostik modulların əlavə edilməsi, tələbələrin akademik uğursuzluq risklərinin və ya məzuniyyət müddətlərinin əvvəlcədən proqnozlaşdırılmasına kömək edə bilər [4].

### **Ədəbiyyat**

1. Namazova Ə.T. Magistr tələbə məlumatlarının idarə olunması üçün müasir proqram vasitələrinin analizi. BDU Konfrans materialları, 2025. s. 1-3.
2. Sommerville I. Software Engineering. Pearson Education, 10th Ed., 2016. s. 210-235.
3. Date C.J. An Introduction to Database Systems. Pearson, 8th Ed., 2004. s. 142-165.
4. Garcia-Molina H., Ullman J.D., Widom J. Database Systems: The Complete Book. Prentice Hall, 2nd Ed., 2008. s. 400-420.

**QEYRİ-XƏTTİ KEYFİYYƏT MEYARLI DİSKRET  
OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ  
YƏHƏRARI NÖQTƏNİN VARLIĞI ÜÇÜN ZƏRURİ ŞƏRT**

**Niftəliyeva Kəmalə Əhməd qızı, Kərimova Aytac Vaqif qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

kamalaniftaliyeva201@gmail.com

**Xülasə:** İşdə xətti olmayan keyfiyyət meyarlı bir diskret optimal idarəetmə məsələsində yəhərari nöqtənin varlığı zəruri şərtin tapılması məsələsinə baxılır.

**Açar sözlər:** optimal idarəetmə, mümkün idarə, diskret proses, yəhərari nöqtə, optimal proses.

Fərz edək ki, idarə olunan diskret proses

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A(t)x(t) + B(t)x(t-N) + f(t, u(t), v(t)), \\ (t) \in T &= \{t_0, t_0+1, t_1-1\}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$x(t_0-N) = x_{t_0-N}, \dots, x(t_0) = x_{t_0}, \quad (2)$$

başlanğıc məsələsi

$$u(t) \in U \subset R^r, t \in T, \quad (3)$$

$$v(t) \in V \subset R^q, t \in T \quad (4)$$

məhdudiyyətləri və

$$J(u, v) = \varphi(x(t_1)) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [d'(t)x(t) + f(t, u(t), v(t))] \quad (5)$$

keyfiyyət meyarı ilə təsvir olunur.

Burada  $A(t), B(t)$  verilmiş  $(n \times n)$  ölçülü diskret matris funksiyalar,  $t_0, t_1$  –verilmiş natural ədədlər,  $N$  –verilmiş natural ədəd,  $x_{t_0-N}, \dots, x_{t_0}$  verilmiş sabit vektorlar,  $f(t, u, v)$  – verilmiş  $n$  ölçülü vektor funksiya,  $g(t, u, v)$  – verilmiş skalyar funksiya olub,  $t$  –yə nəzərən diskret,  $(u, v)$  nəzərən kəsilməzdir,  $d(t)$  verilmiş diskret  $n$  ölçülü vektor funksiya,  $\varphi(x)$  verilmiş kəsilməz diferensiallanan skalyar funksiya,  $U$  və  $V$  verilmiş boş olmayan və məhdud çoxluqlar (idarə oblastları),  $u(t)$   $r$  ölçülü,  $v(t)$   $q$  ölçülü idarəedicilə vektor funksiyalardır.

Bu xassələrə malik olan hər bir  $(u(t), v(t))$  cütünə mümkün idarələr deyəcəyik.

Məsələ elə  $(u^0(t), v^0(t))$  mümkün idarəsini tapmaqdan ibarətdir ki, ixtiyari  $u(t), v(t)$  idarəsi üçün

$$J(u^0, v) \leq J(u^0, v^0) \leq J(u, v^0) \quad (6)$$

bərabərsizlikləri ödəmiş olsun

Qeyd edək ki, (6) bərabərsizliklərini ödəyən hər bir  $(u^0(t), v^0(t))$  cütünə yəhərvari nöqtə deyilir

Deməli qoyulan məsələ yəhərvari nöqtənin tapılmasından ibarətdir.

İşdə artım üsulundan istifadə etməklə yəhərvari nöqtənin varlığı üçün zəruri şərt alınmışdır.

Tutaq ki,  $(u^0(t), v^0(t))$  qeyd olunmuş mümkün idarə,  $x(t)$  – isə (1)-(2) məsələsinin bu mümkün idarəyə uyğun həllidir.

$$H(t, u, v, \psi) = \psi^{0'} f(t, u, v) - g(t, u, v)$$

şəklində Hamilton-Pontryagin funksiyasınıdaxil edək və burada  $\psi^0(t) - n$  ölçülü vektor funksiya olub

$$\begin{aligned} \psi^0(t-1) &= A'(t)\psi^0(t) + B'(t+N)\psi^0(t+N) - d(t), \\ (t_0 \leq t \leq t_1 - N - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi^0(t-1) &= A'(t)\psi^0(t) - d(t), \\ (t_1 - N \leq t \leq t_1 - 1) \end{aligned}$$

$$\psi^0(t_1 - 1) = -\varphi_x(x^0(t_1)).$$

qoşma məsələsinin həllidir.

Fərz edək ki,  $U$  və  $V$  çoxluqları açıq çoxluqlar,  $f(t, u, v)$  və  $g(t, u, v)$  funksiyaları  $(u, v)$ -yə nəzərən kəsilməz törəməyə malikdirlər.

Bu fərziyyələr daxilində funksionalın birinci variasiyası hesablanmış və yəhərvari nöqtənin varlığı üçün Eyler tənliyi formasında zəruri şərt [1,2] isbat edilmişdir.

**Teorem:** Tutaq ki,  $U$  və  $V$  çoxluqları açıq çoxluqlardır,  $f(t, u, v)$  və  $g(t, u, v)$  funksiyaları  $(u, v)$ -yə nəzərən kəsilməz törəməyə malikdirlər. Onda  $(u^0(t), v^0(t))$  mümkün idarəsinin baxılan məsələdə yəhərvari nöqtə olması üçün zəruri şərt

$$\frac{\partial H(\theta, u^0(\theta), v^0(\theta), \psi^0(\theta))}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial H(\theta, u^0(\theta), v^0(\theta), \psi^0(\theta))}{\partial v} = 0.$$

bərabərsizliklərinin ixtiyari  $\theta \in T$  üçün ödənmələridir.

### Ədəbiyyat

1. Демьяков В.Ф. Условия экстремума и вариационное исчисление. М.Высшая школа 2005, 336.
2. Мансимов К. Б., Особые управления в системах с запаздыванием. Баку, Элм 17

## **ŞƏBƏKƏ TƏHLÜKƏSİZLİYİNDƏ RİSKLƏRİN ANALİZİ VƏ İNTEQRASIYA OLUNMUŞ MÜDAFİƏ METODLARI**

**Orucova Tutuxanım Vaqif qızı, Cəfərov Seyhun Ceyhun oğlu**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*otutu@mail.ru, seyhuncfrov785@gmail.com*

**Xülasə:** *Bu tədqiqatda şəbəkə mühitində mövcud olan əsas kibertəhlükələr, onların informasiya təhlükəsizliyinin məxfilik, bütövlük və əlçatanlıq prinsiplərinə təsiri araşdırılır. Eyni zamanda firewall, VPN və IDS/IPS kimi müdafiə mexanizmlərinin funksional xüsusiyyətləri və effektivliyi müqayisəli şəkildə təhlil edilir.*

**Açar sözlər:** *şəbəkə təhlükəsizliyi, firewall, VPN, IDS/IPS, kibertəhlükə*

Müasir rəqəmsal mühitdə şəbəkə infrastrukturalarının genişlənməsi və texnologiyaların inkişafı kibertəhlükəsizlik məsələlərini daha da ön plana çıxarır. Müxtəlif növ hücumların artması informasiya sistemlərinin qorunmasını prioritet məsələyə çevirir və risklərin sistemli şəkildə qiymətlən dirilməsini zəruri edir.

Şəbəkə hücumları müxtəlif formalarda həyata keçirilir. Bu cərcivədə Denial of Service (DoS), Man-in-the-Middle (MitM), phishing və zərərli proqramlar təhlil edilmişdir. DoS hücumları sistem resurslarını tükəndirərək xidmətin əlçatanlığını məhdudlaşdırır, MitM hücumları isə məlumatların ötürülməsi zamanı məxfiliyin pozulmasına səbəb olur. Bishop bu hücumların mexanizmlərini geniş şəkildə izah edir və risklərin düzgün qiymətləndirilməsinin vacibliyini vurğulayır [1, s. 88–91].

Şəbəkə təhlükəsizliyi yalnız texniki məsələlərlə məhdudlaşmır. İnsan faktoru və sosial mühəndislik hücumları da mühüm risk mənbəyidir. Bu hücumlar istifadəçilərin diqqətsizliyindən istifadə edərək məxfi məlumatların ələ keçirilməsinə yönəlir. Whitman və Mattord qeyd edirlər ki, istifadəçilərin maarifləndirilməsi və təhlükəsizlik siyasətlərinin tətbiqi bu risklərin azaldılmasında əsas rol oynayır [2, s. 45–47].

Kriptoqrafiya şəbəkə təhlükəsizliyinin əsas elementlərindən biridir. Məlumatların şifrələnməsi onların qorunmasını təmin etsə də, yanlış implementasiya əlavə risklər yarada bilər. Paar və Pelzl göstərirlər ki, kriptoqrafik alqoritmlərin effektivliyi onların düzgün tətbiqindən birbaşa asılıdır [3, s. 112–115].

Müasir şəbəkələrdə, xüsusilə mobil və IoT mühitlərində təhlükəsizlik problemləri daha mürəkkəb xarakter almışdır. Bu mühitlərdə çoxsaylı cihazların mövcudluğu hücum səviyyəsini artırır. Kurose və Ross firewall və IDS/IPS

sistemlərinin bu risklərin azaldılmasında mühüm rol oynadığını qeyd edirlər [4, s. 134–137].

Ayrı-ayrı müdafiə mexanizmləri tam təhlükəsizlik təmin etmir. Firewall şəbəkə trafikini filtrasiya edir, VPN məlumatların şifrələnməsini təmin edir, IDS/IPS isə hücumları aşkar edib qarşısını alır. Bu səbəbdən onların birgə tətbiqi daha effektiv nəticə verir.

Aparılan araşdırma nəticəsində müəyyən edilmişdir ki, şəbəkə təhlükəsizliyinin təmin edilməsi üçün kompleks yanaşma zəruridir. Texniki müdafiə vasitələri ilə yanaşı düzgün idarəetmə strategiyaları və istifadəçi maarifləndirilməsi sistemlərin dayanıqlılığının artırılmasında mühüm rol oynayır.

### **Ədəbiyyat**

1. M. Bishop. Computer Security: Art and Science. Addison-Wesley, 2019, 88–91 s.
2. M.E. Whitman, H.J. Mattord. Principles of Information Security. Cengage Learning, 2018, 45–47 s.
3. C. Paar, J. Pelzl. Understanding Cryptography. Springer, 2010, 112–115 s.
4. J.F. Kurose, K.W. Ross. Computer Networking: A Top-Down Approach. Pearson, 2021, 134–137 s.

## **ELEKTRON TƏDRİS SİSTEMLƏRİNDƏ CLIENT-SERVER ARXİTEKTURASI VƏ RESTFUL API-LƏRİN TƏTBİQİ**

**Orucova Tutu Vaqif qızı, Mikayılov Elşən Davud oğlu**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*otutu@mail.ru, elshanmikayilov2004@gmail.com*

**Xülasə:** *Müasir elektron tədris sistemlərinin qurulmasında yalnız istifadəçi interfeysinin hazırlanması kifayət etmir, eyni zamanda sistemin server tərəfinin düzgün layihələndirilməsi mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Bu işdə elektron tədris mühitində client-server arxitekturasının tətbiqi və RESTful API-lərin rolu araşdırılmışdır. C# və ASP.NET Core texnologiyalarından istifadə etməklə server tərəfinin qurulması, məlumatların idarə olunması və sistem komponentləri arasında qarşılıqlı əlaqənin təşkili məsələləri təhlil edilmişdir.*

**Açar sözlər:** *elektron tədris, client-server arxitektura, REST API, ASP.NET Core, backend, informasiya sistemi.*

Müasir dövrdə elektron tədris sistemləri təhsil prosesinin ayrılmaz hissəsinə çevrilmişdir. Bu sistemlər vasitəsilə təhsil resurslarının çatdırılması, qiymətləndirmə və istifadəçi idarəetməsi daha çevik şəkildə həyata keçirilir. Lakin

bu sistemlərin effektiv işləməsi yalnız frontend texnologiyalarından asılı deyil. Sistem daxilində məlumatların düzgün idarə olunması və istifadəçi sorğularının operativ emalı üçün server tərəfin düzgün qurulması vacibdir.

Elektron tədris platformalarında çoxsaylı istifadəçilərin eyni vaxtda sistemə müraciət etməsi performans və idarəetmə baxımından problemlər yaradır. Bu baxımdan müasir yanaşmalardan biri kimi client-server arxitekturası və RESTful API-lərin tətbiqi xüsusi əhəmiyyət kəsb edir [1].

Elektron tədris sistemlərində əsas problemlərdən biri sistemin miqyaslanma bilməsi və istifadəçi sorğularının effektiv şəkildə emal olunmasıdır. Ənənəvi monolit sistemlərdə bütün funksionallıq bir mərkəzdə toplandığı üçün sistem yükləndikdə performans aşağı düşür və idarəetmə çətinləşir. Bu problemi həll etmək üçün client-server arxitekturası tətbiq olunur. Client-server modelində sistem iki əsas hissəyə bölünür: istifadəçi interfeysini təmin edən client və məlumatların emalı ilə məşğul olan server. Bu yanaşma funksiyaların ayrılmasına və sistemin daha elastik qurulmasına imkan yaradır. Server tərəfi yalnız biznes məntiqi və verilənlərin idarə olunmasına cavabdeh olur ki, bu da sistemin optimallaşdırılmasını asanlaşdırır [4].

Client və server arasında əlaqənin təşkilində RESTful API-lər mühüm rol oynayır. REST arxitektura üslubu sadə və standart HTTP metodlarından istifadə etməklə məlumat mübadiləsini təmin edir. Bu yanaşma müxtəlif platformalarda işləyən sistem komponentlərinin bir-biri ilə uyğun şəkildə əlaqə qurmasına imkan verir [2].

Server tərəfinin reallaşdırılması üçün C# proqramlaşdırma dili və ASP.NET Core texnologiyası geniş istifadə olunur. Bu platforma yüksək performanslı Web API-lərin hazırlanmasına imkan verir. ASP.NET Core vasitəsilə yaradılan API-lər client-dən gələn sorğuları qəbul edir, onları emal edir və nəticəni JSON formatında geri qaytarır. Bu isə frontend və backend hissələrinin müstəqil şəkildə inkişaf etdirilməsinə şərait yaradır [3].

Bundan əlavə, verilənlər bazası ilə işləmək üçün müasir ORM texnologiyalarından istifadə edilməsi sistemin etibarlılığını artırır. Bu yanaşma verilənlərin strukturlaşdırılmış şəkildə saxlanılmasını təmin edir və proqram inkişaf prosesini sadələşdirir [5].

Aparılan tədqiqat göstərir ki, elektron tədris sistemlərində client-server arxitekturasının və RESTful API-lərin tətbiqi sistemin effektivliyini əhəmiyyətli dərəcədə artırır. Bu yanaşma sistem komponentlərinin ayrılmasına, daha yaxşı idarə olunmasına və genişlənmə bilmə imkanlarının təmin edilməsinə şərait yaradır. C# və ASP.NET Core texnologiyalarının istifadəsi isə bu tip sistemlərin yüksək performans və təhlükəsizlik tələblərinə cavab verməsini təmin edir. Nə-



ticə olaraq, bu yanaşma müasir elektron tədris platformalarının qurulmasında əsas texnoloji həllərdən biri hesab olunur.

### **Ədəbiyyat**

1. Fielding, R. T. (2000). *Architectural Styles and the Design of Network-based Software Architectures*. University of California, s. 76–85.
2. Richardson, L., & Ruby, S. (2007). *RESTful Web Services*. O'Reilly Media, s. 30–45.
3. Microsoft Docs. (2024). *ASP.NET Core Web API Documentation*, s. 10–20.
4. Fowler, M. (2018). *Patterns of Enterprise Application Architecture*. Addison-Wesley, s. 100–120.
5. Freeman, A. (2023). *Pro ASP.NET Core 7*. Apress, s. 60–75.

## **MÜASİR MOBİL PROQRAMLAŞDIRMADA SWİFT DİLİNİN iOS EKOSİSTEMİNDƏ ROLU VƏ İNKİŞAF PERSPEKTİVLƏRİ**

**Rəsulov Nurlan Bəxtiyar oğlu**

*(ADNSU, İnformasiya texnologiyaları və idarəetmə fakültəsi)*

*rasulovnurlan6@gmail.com*

**Xülasə:** *SWİFT* proqramlaşdırma dili müasir mobil proqramlaşdırmada iOS ekosisteminin əsas texnologiyalarından biridir. Bu dil tətbiqlərin daha sürətli, təhlükəsiz və effektiv hazırlanmasına imkan yaradır. *SWİFT*-in iOS mühitində rolu yalnız tətbiq inkişafı ilə məhdudlaşmayıb, həm də sistem performansının və təhlükəsizliyin artırılmasını əhatə edir. Eyni zamanda *SWİFT*-in inkişaf perspektivləri onun cross-platform imkanlarının genişlənməsi və yeni texnologiyalarla integrasiyası ilə bağlıdır.

**Açar sözlər:** *SWİFT*, *iOS*, mobil proqramlaşdırma, *SWİFTUI*, təhlükəsizlik, performans, inkişaf perspektivləri.

Müasir informasiya texnologiyaları dövründə mobil tətbiqlərin inkişafı rəqəmsal xidmətlərin əsas istiqamətlərindən birinə çevrilmişdir. *iOS* platforması bu sahədə yüksək keyfiyyət standartları, təhlükəsizlik mexanizmləri və optimallaşdırılmış sistem arxitekturası ilə fərqlənir. Bu platformada tətbiqlərin hazırlanmasında əsas rol *SWİFT* proqramlaşdırma dilinə məxsusdur. *SWİFT* dili Apple ekosisteminə tətbiqetmə inkişafını daha sistemli və çevik hala gətirərək proqramçıların məhsuldarlığını artırır. Eyni zamanda bu dil müasir proqramlaşdırma yanaşmalarını dəstəkləyərək *iOS* sistemində texnoloji inkişafın əsas hərəkətverici qüvvələrindən biri kimi çıxış edir [1].

### **SWIFT dilinin ios ekosisteminə təsiri**

SWIFT proqramlaşdırma dili iOS ekosisteminə yalnız tətbiqlərin yazılması üçün deyil, həm də sistemin ümumi inkişaf modelinin formalaşmasında mühüm rol oynayır. Apple tərəfindən hazırlanmış bu dil platformadaxili uyğunluq və yüksək performansla seçilir.

SWIFT -in iOS ekosisteminə əsas təsirləri:

- sistem komponentləri ilə yüksək inteqrasiya
- inkişaf prosesinin sadələşdirilməsi
- kod təhlükəsizliyinin artırılması
- tətbiqlərin stabil işləməsi

Bu xüsusiyyətlər SWIFT -i iOS üçün strateji proqramlaşdırma dili halına gətirir [2].

### **SWIFT -in proqramlaşdırma modelində yeri**

SWIFT müasir proqramlaşdırma paradigmaları əsasında qurulmuşdur və həm obyekt yönümlü, həm də funksional yanaşmaları dəstəkləyir. Bu isə tətbiqlərin daha strukturlaşdırılmış və genişlənmə bilən olmasına imkan yaradır.

SWIFT -in proqramlaşdırma modelində əsas xüsusiyyətlər:

- deklarativ kod yazılışı
- modul əsaslı arxitektura
- avtomatik yaddaş idarəetməsi
- səhvlərin erkən aşkarlanması

Bu yanaşma mobil tətbiqlərin keyfiyyətini əhəmiyyətli dərəcədə artırır [3].

| Sahə           | Təsir                   |
|----------------|-------------------------|
| Performans     | Optimallaşdırılmış icra |
| Təhlükəsizlik  | Sistem səviyyəli qoruma |
| Kod strukturu  | Sadə və oxunaqlı        |
| İnkişaf sürəti | Daha qısa inkişaf dövrü |

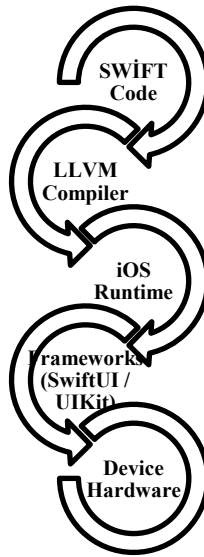
**Cədvəl 1.** SWIFT -in texnoloji üstünlükləri

### **SWIFT və sistem optimallaşdırılması**

SWIFT dilinin mühüm xüsusiyyətlərindən biri onun kompilyasiya səviyyəsində optimallaşdırma imkanlarıdır. LLVM əsaslı kompilyator kodun daha sürətli və effektiv işləməsini təmin edir.

Bundan əlavə, SWIFT -in yaddaş idarəetmə sistemi mobil cihazlarda resursların daha səmərəli istifadəsinə imkan yaradır və enerji sərfiyyatını azaldır [4].

SWIFT proqramlaşdırma dilinin kompilyasiya və icra prosesindəki rolunu vizual şəkildə göstərmək məqsədilə onun sistem arxitekturası aşağıdakı sxem vasitəsilə izah olunur.



**Sxem 1.** Swift sistem integrasiyası

Əvvəlcə yazılan SWİFT kodu kompilyator (LLVM) tərəfindən emal olunur və maşın dilinə çevrilir. Daha sonra bu kod iOS runtime mühitində icra edilir.

İcra prosesi zamanı SWİFT kodu Apple framework-ləri (UIKit və ya SWİFT UI) ilə integrasiya olunaraq istifadəçi interfeysi və tətbiqin funksional hissələrini formalaşdırır. Son mərhələdə isə bütün əməliyyatlar cihazın aparat təminatı (hardware) üzərində yerinə yetirilir.

### **SWİFT-in gələcək inkişaf istiqamətləri**

SWİFT proqramlaşdırma dilinin inkişafı yalnız mobil tətbiqlərin hazırlanması ilə məhdudlaşmır, əksinə, onun tətbiq sahəsi getdikcə daha geniş texnoloji ekosistemləri əhatə edir. Son illərdə SWİFT -in Apple ekosistemindən kənara çıxaraq server tərəfli proqramlaşdırma, bulud əsaslı sistemlər və süni intellekt həllərində istifadə olunması onun gələcək potensialını daha da artırmışdır [5].

SWİFT-in açıq mənbə (open-source) olması onun inkişafını sürətləndirən əsas faktorlardan biridir. Bu yanaşma tərtibatçı icmasının dilin inkişafına bir-bəşə töhfə verməsinə imkan yaradır və nəticədə SWİFT daha çevik, stabil və çoxplatformalı bir dilə çevrilir.

framework-ünün inkişafı isə tətbiq interfeyslərinin yaradılmasında yeni bir dövr açmışdır. Deklarativ UI yanaşması sayəsində tərtibatçılar daha az kod yazaraq daha funksional və vizual cəhətdən zəngin interfeyslər yarada bilirlər. Bu isə mobil tətbiqlərin hazırlanma müddətini azaldır və məhsuldarlığı artırır. Gələcək inkişaf istiqamətləri aşağıdakı kimi daha geniş şəkildə təsnif olunur:

- Cross-platform inkişaf: SWİFT-in yalnız iOS deyil, Android və digər platforma-

lara uyğunlaşdırılması istiqamətində tədqiqatlar və icmaların fəaliyyəti artır.

- Süni intellekt integrasiyası: SWİFT-in machine learning və AI kitabxanaları ilə integrasiyası ağıllı tətbiqlərin yaradılmasını asanlaşdırır.
- Server-side SWİFT: backend sistemlərin SWİFT ilə yazılması onun tamstack ekosistemə çevrilmə potensialını gücləndirir.
- Open-source genişlənməsi: icma dəstəyi ilə yeni framework və kitabxanaların yaranması SWİFT-in imkanlarını daha da artırır.

Bundan əlavə, SWİFT-in performans optimallaşdırmaları və təhlükəsizlik mexanizmlərinin inkişafı onun kritik sistemlərdə istifadəsini daha da aktualaşdırır. Xüsusilə real vaxt işləyən tətbiqlərdə, maliyyə sistemlərində və böyük həcmli məlumat emalında SWİFT-İN tətbiq sahəsinin genişlənəcəyi gözlənilir.

Ümumilikdə, bu inkişaf istiqamətləri SWİFT dilinin gələcəkdə yalnız mobil proqramlaşdırma dili deyil, eyni zamanda universal proqramlaşdırma ekosisteminin əsas texnologiyalarından birinə çevriləcəyini göstərir.

SWİFT proqramlaşdırma dili iOS ekosisteminin inkişafında əsas rol oynayan texnologiyalardan biridir. Onun yüksək performans, təhlükəsizlik və optimallaşdırma imkanları mobil proqramlaşdırmanın inkişafına ciddi təsir göstərir. SWİFT -in gələcəkdə daha geniş texnoloji sahələrdə tətbiqi onun strateji əhəmiyyətini daha da artıracaqdır [1], [5].

### **Ədəbiyyat**

1. Apple Inc. (2024). *The Swift programming language*. <https://docs.swift.org>
2. Apple Inc. (2023). *iOS developer documentation overview*. <https://developer.apple.com>
3. Apple Inc. (2023). *Modern programming paradigms in Swift*.
4. IEEE Xplore. (2022–2025). *Mobile system optimization using Swift*.
5. Kodeco. (2023–2025). *Advanced iOS architecture*.

## **RƏQƏMSAL DÖVRDƏ SÜNİ İNTELLEKTİN İQTİSADİYYATA TƏSİRİ**

**Rüstəmovə Firuzə Mədət qızı**

*(Bakı Dövlət Universiteti, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*f.rustamova@mail.ru*

**Xülasə:** Müasir dövrdə süni intellekt texnologiyalarının inkişafı iqtisadi sistemlərin strukturunda mühüm dəyişikliklər yaratmışdır. Süni intellekt istehsalın optimallaşdırılması, əmək məhsuldarlığının artırılması, idarəetmə proseslərinin avtomatlaşdırılması və innovativ biznes modellərinin formalaşdırılması baxımından mühüm rol oynayır. Bununla

*yanaşı, texnologiyanın sürətli inkişafı əmək bazarında struktur dəyişiklikləri, sosial bərabərsizlik və kibertəhlükəsizlik problemləri kimi yeni çağırışlar da meydana çıxarmışdır. Məqalədə süni intellektin iqtisadi inkişaf, məhsuldarlıq, məşğulluq və biznes idarəciliyinə təsiri elmi yanaşma əsasında təhlil edilir.*

**Açar sözlər:** *süni intellekt, rəqəmsal iqtisadiyyat, əmək bazarı, innovasiya, məhsuldarlıq, avtomatlaşdırma.*

XXI əsrdə rəqəmsal texnologiyaların sürətli inkişafı dünya iqtisadiyyatında yeni mərhələnin formalaşmasına səbəb olmuşdur. Xüsusilə süni intellekt texnologiyalarının geniş tətbiqi iqtisadi fəaliyyətin bütün sahələrinə təsir göstərərək istehsal, xidmət, maliyyə və idarəetmə mexanizmlərində köklü dəyişikliklər yaratmışdır. Süni intellekt insan intellektini təqlid edən və məlumatları analiz edərək qərarvermə proseslərini həyata keçirən texnologiyalar toplusu kimi xarakterizə olunur [1].

Müasir iqtisadiyyatda məlumat əsas kapital resurslarından birinə çevrilmişdir. Böyük verilənlər bazasının emalı, maşın öyrənməsi və avtomatlaşdırılmış sistemlər müəssisələrin rəqabət qabiliyyətini artırır. Tədqiqatlar göstərir ki, süni intellekt məhsuldarlığın yüksəlməsinə və iqtisadi artım tempinin sürətlənməsinə mühüm təsir göstərir [2].

Süni intellekt iqtisadi inkişafın əsas hərəkətverici qüvvələrindən birinə çevrilmişdir. Müəssisələr istehsal proseslərini avtomatlaşdırmaqla xərcləri azaldır və resurslardan daha səmərəli istifadə edə bilirlər. Bu isə məhsuldarlığın yüksəlməsinə və mənfəətin artmasına səbəb olur.

Rəqəmsal texnologiyalar xüsusilə bank sektoru, logistika, səhiyyə və sənaye sahələrində geniş tətbiq olunur. Bank sistemində süni intellekt risklərin qiymətləndirilməsi, kredit analizləri və maliyyə proqnozlaşdırılması proseslərini sürətləndirir. Sənaye müəssisələrində isə robot texnologiyaları istehsalın keyfiyyətini artırır və insan səhvlərini minimuma endirir [3].

Araşdırmalara əsasən, süni intellekt ümumi məhsuldarlıq artımına əhəmiyyətli töhfə verə bilər. Müasir şirkətlərdə avtomatlaşdırılmış sistemlərin tətbiqi əməliyyat xərclərini azaltmaqla yanaşı, istehsal sürətini də artırır [2].

Süni intellekt həmçinin innovativ sahibkarlığın inkişafına müsbət təsir göstərir. Startup ekosistemlərində məlumat analitikası və avtomatlaşdırılmış platformalar yeni biznes modellərinin yaranmasına şərait yaradır. Elektron ticarət platformalarında istifadə olunan tövsiyə sistemləri istehlakçı davranışını analiz edərək satış həcmi artırır [4].

Süni intellektin iqtisadiyyata təsir etdiyi əsas sahələrdən biri əmək bazasıdır. Avtomatlaşdırma nəticəsində bəzi ənənəvi peşələrə tələbat azalır, eyni za-

manda yeni texnoloji peşələr meydana çıxır. Bu proses əmək bazarında struktur dəyişikliklərinə səbəb olur.

Beynəlxalq araşdırmalara görə, süni intellekt yaxın gələcəkdə dünya üzrə mil-yonlarla iş yerinə təsir göstərə bilər. Bununla yanaşı, proqramlaşdırma, məlumat ana-litikası və kibertəhlükəsizlik kimi sahələrdə yüksək ixtisaslı kadrlara ehtiyac artır [5].

Müasir dövrdə əmək bazarının əsas tələblərindən biri rəqəmsal bacarıqların inkişafıdır. İşçi qüvvəsinin yeni texnologiyalara uyğunlaşması üçün peşə hazırlığı proqramlarının genişləndirilməsi vacib hesab olunur. Əks halda texnoloji inkişaf sosial bərabərsizliyin dərinləşməsinə səbəb ola bilər [6].

**Süni intellekt və rəqəmsal iqtisadiyyat :** Rəqəmsal iqtisadiyyat informasiya və kommunikasiya texnologiyalarına əsaslanan iqtisadi modeldir. Süni intellekt bu modelin əsas komponentlərindən biri hesab olunur. Elektron hökumət sistemləri, rəqəmsal ödəniş platformaları və ağıllı şəhər texnologiyaları iqtisadi münasibətlərin daha səmərəli təşkilinə imkan yaradır. Elektron ticarət sektorunda süni intellekt istehlakçı davranışlarını analiz edərək fərdiləşdirilmiş xidmətlər təqdim edir. Marketing sahəsində istifadə olunan alqoritmlər şirkətlərə bazar tendensiyalarını proqnozlaşdırmağa imkan verir. Bu isə müəssisələrin rəqabət üstünlüyünü artırır [4].

Süni intellekt dövlət idarəçiliyində də mühüm rol oynayır. Dövlət xidmətlərinin avtomatlaşdırılması bürokratik proseslərin sadələşdirilməsinə və vətəndaş məmnuniyyətinin artırılmasına şərait yaradır [7].

**Nəticə:** Aparılan tədqiqatlar göstərir ki, süni intellekt rəqəmsal iqtisadiyyatın inkişafında əsas amillərdən biridir. Bu texnologiya məhsuldarlığın artmasına, innovasiyaların sürətlənməsinə və iqtisadi səmərəliliyin yüksəlməsinə mühüm töhfə verir. Eyni zamanda əmək bazarında struktur dəyişiklikləri, sosial bərabərsizlik və təhlükəsizlik problemləri kimi yeni çağırışlar yaradır.

Gələcək dövrdə dövlətlərin əsas məqsədi süni intellektin iqtisadi üstünlüklərindən maksimum istifadə etməklə yanaşı, onun yaratdığı riskləri minimuma endirmək olmalıdır. Bunun üçün rəqəmsal təhsil proqramlarının genişləndirilməsi, hüquqi tənzimləmə mexanizmlərinin təkmilləşdirilməsi və innovativ texnologiyalara investisiyaların artırılması mühüm əhəmiyyət daşıyır.

### **Ədəbiyyat**

1. Filippucci, F., Gal, P., & Schief, M. (2024). *Miracle or myth? Assessing the macroeconomic productivity gains from artificial intelligence*. OECD Publishing.  
<https://doi.org/10.1787/63359d9f-en>
2. Filippucci, F., Gal, P., Jona-Lasinio, C., Leandro, Á., & Schief, M. (2024). *The impact*

- of artificial intelligence on productivity, distribution and growth: A survey. OECD Publishing.
3. International Monetary Fund. (2024). *Gen-AI: Artificial intelligence and the future of work*. IMF Staff Discussion Notes. <https://www.imf.org/en/Publications/Staff-Discussion-Notes/Issues/2024/01/14/Gen-AI-Artificial-Intelligence-and-the-Future-of-Work-542316>
  4. Maslej, N., Fattorini, L., Brynjolfsson, E., Etchemendy, J., Ligett, K., Terah, T., ... & Clark, J. (2024). *Artificial intelligence index report 2024*. Stanford University: AI Index Steering Committee.
  5. OECD. (2024). *OECD compendium of productivity indicators 2024*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/005e8e8f-en>
  6. PwC. (2024). *AI and workforce transformation report 2024*. <https://www.pwc.com/gx/en/issues/upskilling/ai-workforce-transformation-report.html>
  7. Straub, V., Bright, J., & Margetts, H. (2024). *AI for bureaucratic productivity: Measuring the potential of AI to help automate government transactions*. Oxford Internet Institute.

## KÜRƏVİ LAYDA LAPLAS OPERATORUNUN QRİN FUNKSİYASININ MƏXSUSİ FUNKSİYALARA NƏZƏRƏN AYRILIŞI

**Rzayeva İndiana Yadigar qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

[rzayevaindiana@gmail.com](mailto:rzayevaindiana@gmail.com)

**Xülasə:** Bu işdə mərkəzi koordinat başlanğıcında olan konsentrik sferalarının hüdudlandığı üçölçülü kürəvi layda Laplas operatoru üçün Dirixle məsələsinin məxsusi ədədləri və ortonormal məxsusi funksiyaları tapılmış və daxili kürəvi layda üçölçülü Laplas operatoru üçün Dirixle məsələsinin Qrin funksiyası aşkar şəkildə qurulmuşdur.

**Açar sözlər:** Laplas operatoru, fundamental həll, Qrin funksiyası, kürəvi lay, harmonik funksiya.

Qrin funksiyasının tərifinə görə Laplas operatoru üçün Dirixle funksiyası

$$\begin{cases} \Delta_x G(x, \xi) = -\delta(x, \xi), & x, \xi \in \Omega, \\ G(\eta, \xi)|_{\eta \in S} = 0, \end{cases}$$

sərhəd məsələsinin həllidir, burada  $\delta(x, \xi)$ - Dirak funksiyadır. Ümumi halda Qrin funksiyasının məxsusi funksiyalara görə ayrılışı

$$G(x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(\xi)u_n(x)}{\lambda_n}$$

şəklindədir (bax, [1]), burada  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  və  $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$

$$\begin{cases} \Delta u(x) + \lambda u(x) = 0 & x \in \Omega, \\ u(\eta)|_{\eta \in S} = 0, \quad \|u\| = 1 \end{cases}$$

məsələsinin məxsusi ədədləri və ortonormal məxsusi funksiyalarıdır.

Mərkəzi koordinat başlanğıcında olan konsentrik  $S_a(0)$  və  $S_b(0)$  sferalarının hüdudlandığı  $\Omega_{a,b}(0)$  ( $0 < a < b$ ) üçölçülü kürəvi layda Laplas operatoru üçün Dirixle məsələsinin  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  məxsusi ədədlərini və  $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  ortonormal məxsusi funksiyalarını tapaq.

Əgər

$$\begin{cases} \Delta u(r, \varphi, \theta) + \lambda u(r, \varphi, \theta) = 0, & r \in (a, b), \varphi \in (0, \pi), \theta \in (0, 2\pi) \\ u|_{r=a} = 0, \\ u|_{r=b} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

məsələsinin həllini  $u(r, \varphi, \theta) = R(r)Y(\varphi, \theta)$  formasında axtarsaq  $Y(\varphi, \theta)$  funksiyası (1) məsələsinin,  $R(r)$  isə

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) + \left( \lambda - \frac{n(n+1)}{r^2} \right) R(r) = 0, & r \in (a, b), \quad (2) \\ R(a) = 0, & (3) \\ R(b) = 0, & (4) \end{cases}$$

məsələsinin həlli olacaqdır. Məlumdur ki, (1) məsələsinin həlləri

$$Y_n^{(m)}(\varphi, \theta) = P_n^{(m)}(\cos \varphi) \sin m\theta, \quad Y_n^{(-m)}(\varphi, \theta) = P_n^{(m)}(\cos \varphi) \cos m\theta,$$

funksiyalarıdır ( $Y_n^{(m)}(\varphi, \theta)$  kürəvi,  $P_n^{(m)}$  isə qoşma Lejandr funksiyalarıdır), (2) tənliyinin ümumi həlli isə

$$R(r) = c_1 \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(r\sqrt{\lambda})}{\sqrt{r}} + c_2 \frac{N_{n+\frac{1}{2}}(r\sqrt{\lambda})}{\sqrt{r}}$$

şəklindədir, burada



$$J_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} z^{n+1} \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^{n+1} \cos z, N_{n+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} z^{n+1} \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^{n+1} \sin z,$$

uyğun olaraq, Bessel və Neyman funksiyalarıdır .

(3)-(4) sərhəd şərtlərini nəzərə alsaq,  $c_1$  və  $c_2$  məchullarına nəzərən aşağıdakı xətti bircins tənliklər sistemini alırıq:

$$\begin{aligned} c_1 J_{n+\frac{1}{2}}(a\sqrt{\lambda}) + c_2 N_{n+\frac{1}{2}}(a\sqrt{\lambda}) &= 0, \\ c_1 J_{n+\frac{1}{2}}(b\sqrt{\lambda}) + c_2 N_{n+\frac{1}{2}}(b\sqrt{\lambda}) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

(5) sisteminin trivial olmayan həlli olması üçün onun baş determinantı sıfır olmalıdır, yəni

$$\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(a\sqrt{\lambda})}{J_{n+\frac{1}{2}}(b\sqrt{\lambda})} = \frac{N_{n+\frac{1}{2}}(a\sqrt{\lambda})}{N_{n+\frac{1}{2}}(b\sqrt{\lambda})} \quad (6)$$

bərabərliyi ödənməlidir. (6) tənliyindən məxsusi ədədlər tapılır. Bessel və Neyman funksiyaları arasındakı

$$N_\nu(z) = \frac{\cos \pi \nu J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi \nu}, \nu \notin \mathbb{Z}$$

bağlılıqdan istifadə etsək(bax, [2])

$$N_{n+\frac{1}{2}}(a\sqrt{\lambda}) = \frac{\cos \pi \left(n + \frac{1}{2}\right) J_{n+\frac{1}{2}}(a\sqrt{\lambda}) - J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(a\sqrt{\lambda})}{\sin \pi \left(n + \frac{1}{2}\right)} = \frac{J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(a\sqrt{\lambda})}{(-1)^{n-1}}$$

$$N_{n+\frac{1}{2}}(b\sqrt{\lambda}) = \frac{\cos \pi \left(n + \frac{1}{2}\right) J_{n+\frac{1}{2}}(b\sqrt{\lambda}) - J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(b\sqrt{\lambda})}{\sin \pi \left(n + \frac{1}{2}\right)} = \frac{J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(b\sqrt{\lambda})}{(-1)^{n-1}}$$

bərabərliklərini alırıq. Bu bərabərlikləri (6)-da nəzərə alsaq

$$\frac{J_{n+\frac{1}{2}}(a\sqrt{\lambda})}{J_{n+\frac{1}{2}}(b\sqrt{\lambda})} = \frac{J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(a\sqrt{\lambda})}{J_{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}(b\sqrt{\lambda})} \quad (7)$$

tənliyini almış olarıq. Bessel funksiyasının xassələrindən çıxır ki, (7) tənliyini ödəyən hesabı sayda həlli var. (7) tənliyinin  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  həlləri (1) məsələsinin məxsusi ədədləridir.  $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$  məxsusi ədədlərinə uyğun məxsusi funksiyaları tapmaq üçün

$$c_1 J_{n+\frac{1}{2}}(a\sqrt{\lambda_n}) + c_2 N_{n+\frac{1}{2}}(a\sqrt{\lambda_n}) = 0$$

tənliyindən

$$c_2 = -c_1 \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(a\sqrt{\lambda_n})}{N_{n+\frac{1}{2}}(a\sqrt{\lambda_n})}$$

$c_2$ -ni tapıb

$$R(r) = c_1 \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(r\sqrt{\lambda})}{\sqrt{r}} + c_2 \frac{N_{n+\frac{1}{2}}(r\sqrt{\lambda})}{\sqrt{r}}$$

bərabərliyində nəzərə aldıqdan sonra

$$u_{nm}(r, \varphi, \theta) = R_n(r) Y_n^{(m)}(\varphi, \theta), n = 0, 1, 2, \dots; m = 0, 1, 2, \dots, n$$

məxsusi funksiyaları tapmış oluruq. Beləliklə aşağıdakı teoremi isbat etdik:

**Teorem.** Kürəvi  $\Omega_{a,b}(0)$  layında Laplas operatoru üçün Dirixle məsələsinin Qrin funksiyasının məxsusi funksiyalara nəzərən ayrılışı üçün

$$G(r, \varphi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{c_1(n)}{\lambda_n} Y_n^{(m)}(\varphi, \theta) \left[ \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(r\sqrt{\lambda_n})}{\sqrt{r}} - \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(a\sqrt{\lambda_n}) N_{n+\frac{1}{2}}(r\sqrt{\lambda_n})}{\sqrt{r} N_{n+\frac{1}{2}}(a\sqrt{\lambda_n})} \right] \cdot Y_n^{(m)}(\varphi_0, \theta_0) \left[ \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(r_0\sqrt{\lambda_n})}{\sqrt{r_0}} - \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(a\sqrt{\lambda_n}) N_{n+\frac{1}{2}}(r_0\sqrt{\lambda_n})}{\sqrt{r_0} N_{n+\frac{1}{2}}(a\sqrt{\lambda_n})} \right]$$

düsturu doğrudur.

### Ədəbiyyat

1. Камке Э, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, 6 изд., М.: Наука, 1976. 576 с.
2. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б., Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984. 344 с.

## İOT SİSTEMLƏRİNDƏ BIOMETRİK ƏSASLI CİHAZ VƏ İSTİFADƏÇİ İDENTİFİKASIYASI: ÇƏTİNLİKLƏR VƏ TƏTBİQ

**Sadayev Əzbər Şamı oğlu, Əliyev Mirağa Qasım oğlu**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakultəsi)

asadayev@mail.ru, miraga.aliyev.qasim@bsu.edu.az

**Xülasə:** *İoT cihazların sürətli inkişafı, şifrə əsaslı identifikasiya metodlarında kritik boşluqların ortaya çıxmasına səbəb olmuşdur. Bu tezis, biometrik identifikasiya metodlarının araşdırılması, həmçinin, resurs məhdudiyyətli mühitdə fizioloji (barmaq izi, üz və s.) və davranış yönümlü (yazış tərzı və ya səs) metodların təhlilinə həsr olunmuşdur. Əlavə olaraq, aparat təminatı səviyyəsində, "Physical Unclonable Functions" (PUFlar) haqqında daha detallı və Rust proqramlaşdırma dilinin güvənli platforma qurulmasını nümayiş etdirilir.*

**Açar sözlər:** *biometrik identifikasiya, physical unclonable functions (PUF), fuzzy extractors, multi faktor identifikasiya, presentation attack.*

Əşyaların interneti, Səhiyyə, Sənaye və ağıllı şəhərlər əhatəsində milyardlarca cihazın bir birinə bağlı olduğunu ifadə edir. Ənənəvi identifikasiya metodları, parollar, statik açarlar, resursu məhdud cihazlar üçün uyğun deyil, yenidən istifadə edilə bilər və ya credential-stuffing (mövcud bazalardan istifadə edərək kombinasiyaların yoxlanması) hücumu ilə istismar edilirlər [1].

Biometrik metodlar, doğrulamanı, "bildiyiniz bir şey" məntiqindən, "olduğunuz bir şey" məntiqinə çevirir. Fizyolojiya, barmaq izi, qüzhəli qışa və damarın forması kimi müxtəlif formalarla insanları bir birindən ayırır, eyni zamanda özü ilə xərclər də gətirir. Klaviaturada yazılış tərzı, yeriş tərzı kimi davranış modellərini, istifadəçinin fərqlində olmadan, passif və təkrarlanan identifikasiyanı mümkün görərkən, səs tanınması süni intellekt tərəfindən yaradılan deepfakelərə qarşı müdafiəsiz qalır [2].

Cihaz səviyyəsində, Physical Unclonable Functions (PUFlar), bənzərsiz çətinlik-cavab eyniləşdirmə mühiti yaratmaq üçün nano ölçüdə silikon istehsalının variasiyalarından yararlanırlar  $R = f_{PUF}(C)$ . Çünki, bu funksiya, idarə edilə bilməyən fiziki mikro strukturlar tərəfindən müəyyən edildiyindən, kopyası çıxarıla bilməz və ya yenidən istehsal edilə bilməz. Mühitdəki küy (istilik, voltaj kimi) "fuzzy extractor"lar tərəfindən təmizlənilirlər, bunlar, məxfi məlumatı saxlamadan, küylü məlumatı oxumaq üçün XOR əsaslı xəta düzəldici funksiyalardır [3].

Beləliklə, biometrik verilənlər və PUFlar birlikdə, həm istifadəçinin həm də fiziki cihazın bir birindən xəbərsiz doğrulandığı iki-tərəfli bir model yaradaraq, token-əsaslı identifikasiya metodları üzərindəki, əvvəlki tezisdə araşdırılan zəifliklərində aradan qaldırılmasına kömək edir.

Rust proqramlaşdırma dilinin əsas xüsusiyyətlərindən biri olan "Borrow

Checker", mümkün "Buffer Overflow" və "Memory Leak" problemlərinin qarşısını alır, düşünsək ki bu problemlərin baş verməsi halı, "Bare-Metal" kimi adlandırılan IoT cihazların tətbiqi səviyyədəki quruluşlarında biometrik şablonların və müvəqqəti açarların emal edildiyi zaman müddətində çox kritik bir boşluq yaradır. Aşağıda iki əsas primitivlər göstərilmişdir:

**Fuzzy extractor:** küylü bir PUF və ya oxunan biometrik məlumatdan, sabit 256 bit açar yaradır. Açar yalnız enerjiden asılı olmayan "volatile stack" yaddaş qurğusunda saxlanır və heç vaxt daxili yaddaş qurğusuna yazılmır.

Sessiya açarı yaratmaq üçün kod nümunəsi

```
pub fn reproduce_key(noisy: &[u8], helper: &[u8]) -> [u8; 32] {
    let codeword: Vec<u8> = noisy.iter().zip(helper)
        .map(|(a, b)| a ^ b)
        .collect();
    let corrected = bch_decode(&codeword); // bch error correct
    Sha256::digest(&corrected).into() // volatile -- never stored
}
```

**JWT signing:** biometrik doğrulanma uğurla başa çatdıqdan sonra, cihaz PUFdan yaradılan ECDSA (P-256) xüsusi açarı ilə JSON Web Token imzalayır. Əvvəlki tezisdə də qeyd edilən mərhələlər ilə doğrulama aparılır, yəni, server yalnızca "public key" ilə təsdiqləmə aparır, beləliklə gizli açar cihazdan ayrılmaz [4].

Nonce'ni imzalamaq üçün kod nümunəsi

```
pub fn create_jwt(key: &SigningKey, device_id: &str, exp: u64)
-> String {
    let msg = format!("{}",
        b64(json!({"alg": "ES256", "typ": "JWT"}))),
        b64(json!(
            {"device_id": device_id,
             "role": "sensor",
             "exp": exp
            }
        )));
    let sig: Signature = key.sign(msg.as_bytes());
    format!("{}", msg, b64(sig.to_der()))
}
```

Beləliklə Multi Factor identifikasiya ardıcılığı bu şəkildədir: 1. istifadəçi biometrik məlumatlarını təqdim edir; (2) cihaz, bunu PUF cavabı ilə birləşdirir-

rək sessiya açarı yaratmaq üçün yuxarıda göstərilən "Sessiya açarı yaratmaq üçün kod" ilə açar yaradır; (3) server, nonce (number used once) gödərir; (4) cihaz, yuxarıda göstərilən "Nonce'ni imzalamaq üçün kod" ilə göndərilən nonce'ni imzalayır; (5) server, mövcud açıq açar ilə doğrulama prosesi aparır. Beləliklə, kritik hücum metodlarından, "node capture", "replay attacks" və "user impersonation" kimi açıqların qarşısını almış olarıq.

Ən əsas tətbiq çətinlikləri arasında, "presentation attack", yəni 3D və ya silikon kopyalar ilə saxtakarlıq yer alır. Bunun üçün statik PAD (Presentation Attack Detection) sensorları görüntülərdə saxtalıqları (artefacts) araşdırarkən, dinamik PAD, mikro hərəkətləri və qan axısına diqqət edir, və PUFların Maşın Öyrəldilməsi ilə modelləşdirilməsi, XOR-PUF non-linearity quruluşu ilə qarşılaşdırıldığına, zəif qalır. Düşünsək ki, maşın öyrənməsi standart detalları izləməkdə yaxşı olsa belə, PUF məlumatlarının XOR ilə qarışdırılması, maşının doğru ardıcılığı tutma bilməməsi ilə nəticələnir və saxtakarlığın qarşısı alınmış olur [3].

Biometrik identifikasiya, PUF əsaslı doğrulama və Rust proqramlaşdırma dilinin memory-safe işləmə mühitinin birləşməsi, IoT identifikasiya prosesinin zəifliklərinin ardan qaldırılmasında əsas rol oynayırlar.

### **Ədəbiyyat**

1. Frustaci M., Pace P., Aloï G., Fortino G., "Evaluating critical security issues of the IoT world" IEEE Internet of Things Journal, vol. 5, no. 4, pp. 2483–2495, 2018.
2. Jain A. K., Ross A., Nandakumar K., Introduction to Biometrics. New York, NY: Springer, 312p, 2016.
3. Herder C., Yu M.-D., Koushanfar F., Devadas S., "Physical unclonable functions and applications: A tutorial," Proceedings of the IEEE, vol. 102, no. 8, pp. 1126–1141, 2014.
4. Jones M. B., Bradley J., Sakimura N., "JSON Web Token (JWT)," IETF RFC 7519, May 2015. <https://www.rfc-editor.org/rfc/rfc7519>

## **TƏHSİL SEKTORUNDA DATA ANALİTİKANIN TƏDQIQI**

**Sadayev Əzbər Şamı oğlu, Lətifli Sevinc Ayaz qızı**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*asadayev@mail.ru, svnclatiff@gmail.com*

**Xülasə:** *Hazırkı dövrdə data analitika ən mühüm və öz tətbiqlərini bir çox sahədə sübut etmiş elm istiqamətlərindən biridir. Belə sahələrdən biri də təhsil sektorudur. Bu tezisdə təhsil sektorunda data analitikanın tətbiqi və onun əhəmiyyəti araşdırılmışdır. Data analitikanın əsas istiqamətləri olan "learning analytics" və "academic analytics" yanaşmaları izah edilmişdir. Həmçinin LMS platformaları, sistem logları və digər rəqəmsal mənbələr vasitəsilə məlumatların necə toplandığı və analiz edildiyi qeyd olunmuşdur. Bu pro-*

*sesdə SQL, Python, Excel və Power BI kimi alətlərin tətbiqi də izah edilmişdir. Nəticə olaraq, data analitikanın təhsil keyfiyyətinin artırılmasında və qərarvermə prosesinin təkmilləşdirilməsində mühüm rol oynadığı vurğulanır.*

**Açar sözlər:** *data analitika, learning analytics, təhsil sistemləri, academic analytics, təhsil analitikası.*

Müasir dövrdə təhsil sektoru sürətlə inkişaf edən və rəqəmsallaşan sahələrdən biridir. Bu sektorun modernləşməsində data analitika mühüm rol oynayır. Rəqəmsallaşmanın inkişafı nəticəsində təhsil müəssisələrində böyük həcmdə datalar toplanır. Həmin məlumatları düzgün analiz edərək doğru qərarlar vermək təhsilin inkişafına və keyfiyyətinin yaxşılaşdırılmasına təkan verir.

Təhsil sektorunda data analitika müxtəlif istiqamətlərdə tətbiq olunur. Bu istiqamətlər "learning analytics" və "academic analytics"-dir. "Learning analytics" fərdi tələbə səviyyəsində işləyir, yəni onun məqsədi tələbənin davranışını öyrənməkdir. Məsələn, tələbənin davamiyyəti, qiymətləri, tapşırıqları yerinə yetirməsi, imtahan nəticələri və s. analiz edilir. "Academic analytics" isə müəssisə səviyyəsində işləyir və onun əsas məqsədi təhsil sistemini effektiv idarə etmək və qərarvermə prosesini sürətləndirməkdən ibarətdir. Bu istiqamətdə semestrlik və ya illik nəticələrə görə strateji qərarlar verilir. Məsələn, ümumi akademik göstəricilər, məzunların sayı, kəsilmə faizinin çox olduğu fənlər, uğur faizi daha yüksək olan ixtisaslar və s. təhlil olunur [1].

Təhsildə data analitikanın tətbiqi ilə tələbə performansının təhlili, təhsil keyfiyyətinin qiymətləndirilməsi, risk analizi, tədris proqramının effektivliyinin yoxlanılması mümkündür. Bunların həyata keçirilməsi üçün müxtəlif mexanizmlərdən istifadə edilir. Belə ki, LMS, Moodle, Microsoft Teams, Blackboard və s. təhsil proseslərini rəqəmsallaşdırır və data analitika üçün "informasiya mənbəyi" yaradır. Sistem logları, istifadəçi trackingi, qiymətləndirmə sistemləri tələbələrin, şagirdlərin sistemdəki davranışlarını öyrənməyə, onları təhlil etməyə və qiymətləndirməyə imkan verir. Sistem logları, tələbə hər hansı əməliyyat yerinə yetirdikdə sistemin bu hadisəni avtomatik olaraq qeydə almasıdır. Bu loglar vasitəsilə tələbənin dərslər fayllarını yükləməsi, onları izləməsi, testi başlatması, bir sözlə, hər klik zamanı möhürü ilə birlikdə bazada qeydə alınır. Bu, "event logging" adlanır. Sonrakı mərhələdə həmin loglar analiz edilərək tələbənin davranışı, onun aktivliyi yoxlanılır. Tracking mexanizmi ilə isə tələbənin resursları necə istifadə etdiyi öyrənilir. Məsələn, tələbənin dərslər recordunu harada dayandırması, harada geri sarması və ya sona qədər izləyib-izləməməsi kimi məlumatlar qeydə alınır. Qiymətləndirmə sistemlərində isə tələbənin cavabları, onları yerinə yetirmə müddəti, səhv etdiyi sualların tipləri kimi informasiyalar toplanılır. Bundan əlavə, müxtəlif sorğular, formalar vasitəsilə də tə-

ləbə məlumatları toplanır. Sadəcə bu halda informasiya istifadəçi tərəfindən daxil edilməlidir, yəni həmin məlumatları sistem özü avtomatik olaraq qeyd etmir. Bu üsulla tələbənin daha çox psixoloji kontekstini, dərs keyfiyyəti barədə subyektiv olaraq fikirlərini almaq və s. üçün istifadə olunur. Bu məlumatları sistem logları vasitəsilə öyrənmək mümkün olmur, ona görə də əlavə olaraq belə metodlar tətbiq edilir. Daha texniki səviyyədə isə mərkəzləşdirilmiş verilənlər bazası və ya data warehouse qurulur. Müxtəlif mənbələrdən gələn məlumatlar toplanır, sonra təmizlənir və analiz üçün uyğun formata salınır. Buna ETL prosesi deyilir (Extract, Transform, Load) [2].

Data analitikanın tətbiqi zamanı Excel, Power BI, Tableau, Python, SQL kimi alətlər istifadə olunur. Belə ki, LMS və digər platformalardan gələn tələbə məlumatları database-ə düşür. SQL əsasən ilkin mərhələdə dataları çıxarmaq, onları filtrləmək və birləşdirmək üçün tətbiq edilir. Burada ən çox istifadə olunan əməliyyatlar SELECT, WHERE, GROUP BY, JOIN, ORDER BY, statistik funksiyalar(AVG(), COUNT(), SUM())-dır. Məsələn:

```
SELECT s.name, AVG(e.grade) AS average_grade  
FROM exams e  
JOIN students s ON s.id = e.student_id  
WHERE e.semester = 'Fall 2025'  
GROUP BY s.name  
ORDER BY average_grade DESC;
```

Sonrakı mərhələdə isə data cleaning həyata keçirilir və o analiz üçün hazır vəziyyətə gətirilir. Burada daha çox Python və onun pandas kitabxanası istifadə edilir. Pandas kitabxanasından praktikada daha çox read\_csv(), dropna(), fillna(), groupby(), merge() funksiyaları istifadə olunur. Statistik hesablamalar üçün isə numpy kitabxanasından istifadə edilir. Üçüncü mərhələ, yəni analiz mərhələsində isə Python və ya Excel tətbiq olunur. Excel əsasən daha sadə analizlər aparmaq üçündür. Burada, adətən Pivot Table, AVERAGE(), IF(), VLOOKUP() kimi funksiyalar tətbiq edilir. Sonuncu mərhələ isə vizuallaşdırma və dashboard mərhələsidir. Bunun üçün isə Power BI və ya Tableau alətləri tətbiq olunur. Vizuallaşdırmanı həyata keçirmək üçün daha çox DAX funksiyaları, yəni AVERAGE(), SUM(), CALCULATE() funksiyaları, filters və slicers, drill-down analysis, interactive dashboard-lar istifadə olunur. Burada məqsəd datanı vizuallaşdıraraq onu daha çox oxunaqlı etməkdir. Məsələn, müəllim və ya dekan tələbələrin hansı fəndən daha zəif olduqlarını dashboard vasitəsilə daha aydın görə bilər [3].

Beləliklə, təhsil sektorunda data analitika şagirdləri və tələbələri rəqəmsal olaraq müşahidə etməyə və onların fəaliyyətini analiz etməyə şərait yaradır.

Bu yanaşma bizə tələbələrin nəticələrinin obyektiv qiymətləndirilməsini, tədris səviyyəsinin təhlilini, potensial təhlükələrin analizini düzgün şəkildə həyata keçirərək doğru qərarlar qəbul etməyimizə imkan verir. Hazırda ölkəmizdə DİM (Dövlət İmtahan Mərkəzi) və Təhsil Nazirliyi data analitikasında tətbiq edilən proqramların üstünlüklərindən istifadə edirlər. Azərbaycanda rəqəmsal məktəb, LMS və s. kimi platformalar olsa da, onların istifadəsi əsasən məlumatların saxlanması və idarə edilməsi ilə məhdudlaşır, yəni hələlik ölkəmizdə məlumatların təhlili əsasında uyğun qərarların verilməsi geniş yayılmayıb.

Gələcəkdə data analitika texnologiyalarının daha geniş tətbiqi nəticəsində bu sahədə mühüm irəliləyişlərin əldə olunacağı gözlənilir. Bu işə öz növbəsində ölkədə təhsil sektorunun inkişafına və tədris prosesinin yaxşılaşmasına əhəmiyyətli töhfələr verəcək.

### **Ədəbiyyat**

1. Siemens G., Baker R. S. Learning analytics and educational data mining: towards communication and collaboration. ACM International Conference Proceeding Series, 2012, s.252.
2. Romero C., Ventura S. Educational Data Mining: A Review of the State of the Art, 2010, s.601-604.
3. VanderPlas J. Python Data Science Handbook: Essential Tools for Working with Data, 2016, s.33-42, s.170-178.

## **HİPERBOLİK TİP TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİR OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ**

**Seyfullayeva Xəyalə İdris qızı, Alızadə Nərmin Nahid qızı**

*(SDU, Riyaziyyat fakültəsi)*

*xayala.seyfullayeva@sdu.edu.az,nermin0300@mail.ru*

**Xülasə:** Təqdim olunan işdə hiperbolik tip tənliklə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələsinə baxılıb. Əvvəlcə həllin varlığı tədqiq olunub, sonra isə optimal idarəedicin varlığı teoremi isbat olunub və sonda optimallıq üçün zəruri şərt alınıb.

**Açar sözlər:** hiperbolik tənlik, optimal idarəedici, optimallıq şərti.

Fərz edək ki, idarəolunan proses

$$\frac{\rho}{g} h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( h \frac{\partial u}{\partial y} \right) = v(x, y, t) \quad (1)$$

hiperbolik tip tənlik,

$$u(x, y, 0) = \varphi_0(x, y), \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x, y), \quad (2)$$

başlanğıc və



$$\begin{aligned}u(0, y, t) &= u(a, y, t) = 0, \\u(x, 0, t) &= u(x, b, t) = 0\end{aligned}\tag{3}$$

sərhəd şərtləri ilə təsvir olunur.

Qeyd edək ki, (1) tənliyi lövhəyəbənzər konstruksiyanın rəqsləri tənliyidir[1]. Burada  $\rho(x, y)$ -lövhənin  $(x, y)$  nöqtəsində sıxlığı,  $G$ -gərginlik,  $h(x, y)$ -lövhənin qalınlığı,  $u(x, y, t)$ -isə zamanın  $t$  anında  $(x, y)$  nöqtəsində lövhənin yerdəyişməsi,  $v(x, y, t)$ -idarəedici funksiya,  $\varphi_0(x, y)$ ,  $\varphi_1(x, y)$  -verilmiş başlanğıc funksiyalardır

Fərz olunur ki,  $(x, y) \in D = \{(x, y): 0 < x < a, 0 < y < b\}$ ,  $t \in (0, T)$ .  $Q_T = D \times (0, T)$ . Burada,  $a, b, T$ -verilmiş müsbət ədədlərdir.

İdarəedici funksiyalar sinfi olaraq

$$U_{ad} = \{v \in L_2(D): \|v\|_{L_2(D)} \leq M\}.$$

götürək. Burada  $M$ -verilmiş müsbət ədəddir.

Belə optimal idarəetmə məsələsi qoyulur:  $U_{ad}$  sinfindən elə idarəedici tapmalı ki, (1)-(3) məsələsinin həlli ilə birlikdə

$$J(v) = \frac{1}{2} \|u - u_0\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|v\|_{L_2(D)}^2\tag{4}$$

funksionalına minimum versin.

Bu məsələni (1)-(4) məsələsi adlandırırıq.

Qeyd edək, bu məsələyə yaxın məsələlərə [2], [3] işlərində baxılmışdır.

(1)-(3) məsələsinin həlli dedikdə,  $W_2^1(Q_T)$  fəzasından olan ümumiləşmiş həlli başa düşülür.

İşdə aşağıdakı nəticələr alınmışdır:

**Teorem 1.** Fərz edək ki, (1)-(3) məsələsinin üzərinə yuxarıda qoyulan şərtlər ödənilir. Onda bu məsələnin  $u(x, y, t) \in W_2^1(Q_T)$  sinfindən olan yeganə ümumiləşmiş həlli var.

**Teorem 2.** Fərz edək ki, (1)-(4) məsələsinin üzərinə yuxarıda qoyulan şərtlər ödənilir. Onda bu məsələdə yeganə optimal idarəedici var.

Sonda isə integral bərabərsizlik şəklində optimallığın zəruri şərti çıxarılmışdır.

### Ədəbiyyat

1. Арман Ж.-Л.П. Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций, М.: «Мир», 1977, 144 стр.
2. Кулиев Г.Ф. Задача оптимального управления коэффициентами для уравнений гиперболического типа. // Изв. Вузов. Матем., 1985, №3, с. 39-44.
3. Кулиев Г.Ф., Насибзаде В.Н. Приведение обратной задачи акустики к задаче оптимального управления и её исследование // Вестник Томского Государственного Университета, математика и механика, 2018, № 54, с.5-16.

## DOĞURAN FUNKSIYALARIN ŞAXƏLƏNƏN PROSESLƏRDƏ TƏTBİQİ

**Seyidbəyli Nərmən Dəmət qızı**

**(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)**

**seyidbeylinermin@gmail.com**

**Xülasə:** Şaxələnən proseslər diskret zamanlı stoxastik modellər olub, populyasiyanın nəsilədən-nəsilə inkişafını təsvir edir. Bu proseslərdə hər bir fərd müstəqil şəkildə təsadüfi sayda nəsil verir və bu çoxalma sabit ehtimal paylanması ilə müəyyən olunur. Belə sistemlərin təhlilində əsas riyazi alətlərdən biri doğuran funksiyasıdır [1].

Doğuran funksiyalar təsadüfi kəmiyyətin paylanmasını kompakt formada ifadə etməyə və mürəkkəb ehtimal hesablamalarını sadələşdirməyə imkan verir. Şaxələnən proseslərdə doğuran funksiyalar vasitəsilə nəsilər üzrə populyasiya ölçüsünün paylanması, orta artım sürəti və prosesin uzunmüddətli davranışı öyrənilir. Xüsusilə, doğuran funksiyalarının törəməsi vasitəsilə orta sayı müəyyən edilir ki, bu da prosesin sönməsi və ya davamlı artması haqqında əsas meyardır. [2].

**Açar sözlər:** şaxələnən proseslər, doğuran funksiyalar, populyasiya, sönmə ehtimalı, orta nəsil sayı.

**Məsələnin qoyuluşu:** Galton–Watson şaxələnən prosesində hər fərdin nəsil sayı aşağıdakı doğuran funksiya ilə verilir:

$$G(s) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}s + \frac{1}{2}s^3$$

Başlanğıcda iki fərd vardır: ( $Z_0=2$ )

Burada fərdin nəsil sayının ehtimal paylanması, orta nəsil sayı və prosesin növü, prosesin məhv olma ehtimalı araşdırılır.

**Məsələnin həlli:** Fərdin nəsil sayının ehtimal paylanması:

$$G(s) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}s + \frac{1}{2}s^3$$

$$P(X = 0) = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 1) = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 2) = 0$$

$$P(X = 3) = \frac{1}{2}$$

**Orta nəsil sayı və prosesin növü:**

$$\begin{aligned} G'(1) &= \frac{1}{4} + \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{6}{4} \\ &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

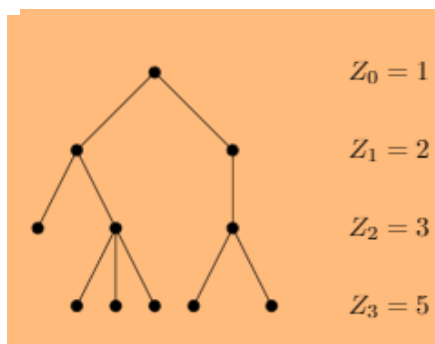
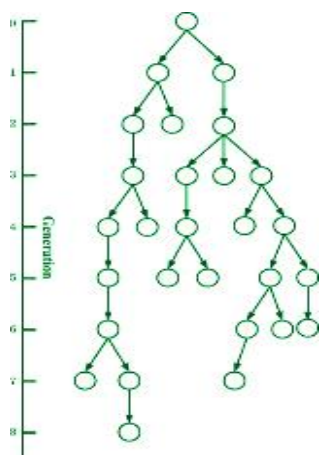
$$G'(s) = \frac{1}{4} + \frac{3}{2}s^2$$

$m > 1$

**Məhv olma ehtimalı:**

superkritikdir

$$q \approx 0.366$$



$$q = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}q + \frac{1}{2}q^3$$

$$\frac{1}{2}q^3 - \frac{3}{4}q + \frac{1}{4} = 0$$

$$2q^3 - 3q + 1 = (q - 1)(2q^2 + 2q - 1)$$

$$2q^2 + 2q - 1 = 0$$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)$$

$$D = 4 + 8 = 12$$

$$q = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$q = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{4}$$

$$q = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{4}$$

$$q = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

Deməli, məhv olma ehtimalı:

### **Tədqiqatın nəticəsi:**

Tədqiqatda doğuran funksiyanın yalnız ehtimal tapmaq üçün deyil, həm də prosesin struktur xüsusiyyətlərini araşdırmaq üçün necə istifadə edildiyi göstərildi. Başlanğıc fərdlərinin sayı birdən fərqli olduqda məhv olma ehtimalının dəyişməsi, cüt-paritet ehtimalları və yüksək nəsillərin gözlənilən qiymətləri doğuran funksiyalar vasitəsilə effektiv şəkildə hesablandı. Bu üsul mürəkkəb şaxələnən proseslərin analizində çox güclü alət hesab olunur.

### **Ədəbiyyat**

1. R.T.Əliyev, Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika, Bakı, 2022, 516 səh.
2. В.Феллер, Введение в теорию вероятностей и её приложения, Москва, Вол 2, 1984, 700 стр.

## **DOĞURAN FUNKSİYALARIN LİMİT TEOREMLƏRİN İSBATINDA TƏTBİQİ**

**Seyidbəyli Nərmin Damət qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

seyidbeylinermin@gmail.com

**Xülasə:** Limit teoremləri ehtimal nəzəriyyəsinin və statistikanın ən mühüm nəticələrindən biridir. Bu teorem göstərir ki, çoxlu sayda müstəqil təsadüfi dəyişənin cəmi və ya ortası müəyyən şərtlər altında normal paylanmaya yaxınlaşır. Limit teoremlərinin isbatında əsas vasitələrdən biri doğuran funksiyalardır. Xüsusilə moment doğuran funksiya, xarakteristik funksiya geniş istifadə olunur. Doğuran funksiyalar limit teoremlərində cəmlərin analizini sadələşdirir, limit keçidini funksiyaların yaxınlaşmasına çevirir, normal

paylanmanın yaranmasını göstərir [1].

**Açar sözlər:** limit teoremi, Taylor açılışı, doğuran funksiya, moment.

**Məsələnin qoyuluşu:**  $X_1, X_2, \dots, X_n$  müstəqil təsadüfi dəyişənlərdir.

Verilən paylanma

$$P(X=0)=\frac{1}{2}, P(X=1)=\frac{1}{4}, P(X=3)=\frac{1}{4},$$

burada moment doğuran funksiya, xarakterik funksiya, cəmin moment doğuran funksiyası, cəmin xarakterik funksiyası, Taylor açılışı, limit həlləri axtarılır.

**Tədqiqatın məqsədi:** Limit teoremlərinin doğuran funksiyalar (xüsusilə moment doğuran funksiyalar və xarakteristik funksiyalar) vasitəsilə isbat mexanizminin araşdırılması və onun analitik əsaslarını formal şəkildə qurulması. [2].

**Tədqiqatın üsulları:** Məsələnin həlli:

**Moment doğuran funksiya**

$$M_X(t) = \frac{1}{2} e^0 + \frac{1}{4} e^t + \frac{1}{4} e^{3t},$$

$$M_X(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^t + \frac{1}{4} e^{3t}$$

**Xarakterik funksiya**

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{2} e^{i0t} + \frac{1}{4} e^{it} + \frac{1}{4} e^{i3t}$$

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{it} + \frac{1}{4} e^{i3t}$$

**Cəmin moment doğuran funksiyası**

$$M_{S_n}(t) = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^t + \frac{1}{4} e^{3t} \right)^n$$

**Cəmin xarakterik funksiyası**

$$\varphi_{S_n}(t) = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{it} + \frac{1}{4} e^{i3t} \right)^n$$

**Taylor açılışı**

$$\varphi_X(u) = 1 + i\varphi u + \frac{\sigma^2 u^2}{2} + 0(u^2)$$

$$\varphi_X(u) = 1 + iu + \frac{1}{2} u^2 + 0(u^2)$$

**Moment doğuran funksiya üçün limit**

$$\ln M_{Z_n}(t) \rightarrow \frac{t^2}{2}$$

$$M_{Z_n}(t) \rightarrow e^{\frac{t^2}{2}}$$

**Xarakterik funksiya üçün limit**

$$\ln \varphi_{Z_n}(t) \rightarrow -\frac{t^2}{2}$$

$$\varphi_{Z_n}(t) \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}$$

### Moment doğuran funksiya üçün nəticə

$$M_{Z_n}(t) \rightarrow e^{\frac{t^2}{2}}$$
$$Z_n \Rightarrow N(0,1)$$

yəni normallaşdırılmış cəm standart normal paylanmaya yaxınlaşır.

### Xarakterik funksiya üçün nəticə

$$\varphi_{Z_n}(t) \rightarrow e^{-\frac{t^2}{2}}, \text{ çünki } e^{-\frac{t^2}{2}} \quad Z_n \Rightarrow N(0,1)$$

standart normal paylanmanın xarakteristik funksiyasıdır.

### Tədqiqatın nəticəsi:

Hər iki metod göstərir ki:

1. Doğuran funksiya metodu daha çox analitik (real eksponent) struktura əsaslanır
2. Xarakteristik funksiya metodu isə kompleks analiz üzərində qurulur
3. Hər ikisi konvolyusiyayı hasilə əvəz edir
4. Limitdə yalnız ikinci moment (dispersiya) qalır.

### Ədəbiyyat

1. Əliyev.R.T., Ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika, Bakı, 2022, 516 səh.
2. Феллер.В., Введение в теорию вероятностей и её приложения, Москва, Вол 2, 1984, 700 стр.

## İSTİLİKKEÇİRMƏ PROSESİ ÜÇÜN OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNİN TƏQRİBİ HƏLLİNƏ QRADİYENTİN PROYEKSİYASI VƏ ŞƏRTİ QRADİYENT ÜSULLARININ TƏTBİQİ

**Süleymanlı Ziba Kamil qızı**

(BDU, SABAH qrupları)

suleymanliziba2000@gmail.com

**Xülasə:** Bu işdə istilikkeçirmə prosesi üçün bir optimal idarəetmə məsələsinə baxılır. Məqsəd funksionalının qradientinin ifadəsindən istifadə edərək məsələnin təqribi həlli üçün qradientin proyeksiyası və şərti qradient üsulları tətbiq olunur.

**Açar sözlər:** optimal idarəetmə, istilikkeçirmə tənliyi, qoşma məsələ, funksionalın qradienti, qradientin proyeksiyası üsulu, şərti qradient üsulu.

İstilikkeçirmə prosesi üçün aşağıdakı optimal idarəetmə məsələsinə baxaq:

$$J(u) = \int_0^l |x(s, T, u) - y(s)|^2 ds \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + u(s, t), (s, t) \in Q = \{0 < s < l, 0 < t \leq T\}, \quad (2)$$

$$x(s, 0) = \varphi(s), 0 \leq s \leq l \quad (3)$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} \Big|_{s=0} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial s} \Big|_{s=l} = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad (4)$$

$$u = u(s, t) \in U = \left\{ u(s, t) \in L_2(Q): \iint_Q |u(s, t)|^2 ds dt \leq R^2 \right\}. \quad (5)$$

Burada  $l, T, a^2, R > 0$  – verilmiş ədədlər,  $y(s), \varphi(s) \in W_2^1[0, l]$  – verilmiş funksiyalar,  $u = u(s, t)$ -idarəedicisi funksiya – istilik mənbəyinin sıxlığı,  $x = x(s, t) = x(s, t, u)$  – (2) – (4) sərhəd məsələsinin  $u = u(s, t)$  idarəedicisinə uyğun həllidir.

Funksionalın artımını tədqiq etmək və qradienti aşkar şəkildə tapmaq üçün Laqranj funksiyasından istifadə edilmişdir. Aparılan riyazi çevirmələr və hissə-hissə integrallama nəticəsində  $\psi(s, t)$  qoşma funksiyası üçün aşağıdakı qoşma sərhəd məsələsi alınmışdır [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} &= 0, \quad (s, t) \in Q, \\ \psi(s, T) &= 2(x(s, T; u) - y(s)), \quad 0 \leq s \leq l, \\ \frac{\partial \psi}{\partial s} \Big|_{s=0} &= \frac{\partial \psi}{\partial s} \Big|_{s=l} = 0, \quad 0 \leq t < T. \end{aligned}$$

Funksionalın Freşe mənadı diferensiallanan olduğu isbat edilmiş və qradient üçün aşağıdakı ifadə alınmışdır:

$$J'(u) = \psi(s, t) \quad (6)$$

Bu nəticə optimal idarəetmənin tapılması üçün qradient üsullarının tətbiqinə imkan verir.

**Qradient proyeksiyası üsulu:** Bu üsulda hər bir iterasiya addımında qoşma məsələdən alınan qradient ( $J'(u) = \psi(s, t)$ ) istiqamətində hərəkət edildikdən sonra, alınan nöqtə idarəetmə çoxluğu üzərində proyeksiyalanır.

Bu üsula uyğun olaraq iterasiya prosesi aşağıdakı düsturla təyin olunur [2]:

$$u^{(k+1)} = P_U(u^{(k)} - \alpha_k \psi^{(k)}) \quad (7)$$

Burada  $\psi^{(k)} = J'(u^{(k)})$  funksionalın cari nöqtədə qradientini,  $\alpha_k > 0$  iterasiya addımını,  $P_U$  isə  $U$  idarəetmələr çoxluğuna proyeksiyasını ifadə edir.

Nəzərə alsaq ki, idarəetmələr çoxluğu

$$U = \left\{ u \in L_2(Q): \iint_Q |u(s, t)|^2 ds dt \leq R^2 \right\}$$

şəkilində verilmişdir, bu halda proyeksiya operatoru aşağıdakı kimi təyin

olunur: əgər  $\|v\| \leq R$  olarsa  $P_U(v) = v$ , əks halda isə  $P_U(v) = \frac{R}{\|v\|}v$ .

**Şərti qradiyent üsulu:** Qrادیentin proyeksiyası üsuluna alternativ olaraq şərti qradiyent üsulu tətbiq edilə bilər. Şərti qradiyent üsulu zamanı biz hər addımda bir köməkçi  $\bar{u}^{(k)}$  idarəedicişini tapırıq. Bu üsul mürəkkəb məhdudiyyətlər daxilində funksionalın qradiyentinin xətti aproksimasiyasına əsaslanır. Belə ki, hər addımda aşağıdakı xətti köməkçi məsələ həll edilir:

$$\min_{v \in U} \int_0^T \int_0^l \psi^{(k)}(s, t) v(s, t) ds dt \quad (8)$$

Bu şərti ödəyən köməkçi  $v^{(k)}(s, t) \in U$  yaxınlaşmasını tapdıqdan sonra, növbəti addımdakı əsas idarəetmə aşağıdakı xətti kombinasiya düsturu ilə təyin olunur[2]:

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} + \beta_k(v^{(k)} - u^{(k)}), \quad 0 \leq \beta_k \leq 1 \quad (9)$$

Burada  $u^{(k+1)}$ -növbəti idarəetmə yaxınlaşması,  $u^{(k)}$  – cari idarəetmə yaxınlaşması,  $v^{(k)} - u^{(k)}$ -istiqaşət vektoru: bu cari nöqtədən optimal köməkçi nöqtəyə doğru yönəlmiş bir istiqamət.

Əlavə olaraq məsələyə uyğun dayanma şərtini qeyd etmək mümkündür. Bu üsullarla proses o vaxt dayanır ki, aşağıdakı şərt ödənsin:

$$\|u^{(k+1)} - u^k\| < \epsilon.$$

#### Ədəbiyyat

1. İsgəndərov A.D., Tağıyev R.Q., Yaqubov Q.Y. Optimallaşdırma üsulları. Bakı, Çarşıoğlu, 2002, 400 s.
2. İsgəndərov A.D., Tağıyev R.Q., Həşimov S.A. Optimallaşdırma üsulları məsələ və misallarla. Bakı, Bakı Universiteti nəşriyyatı, 2016, 272 s.

## AZƏRBAYCANIN APARICI ŞİRKƏTLƏRİNDƏ SİĞORTA FƏALİYYƏTİNİN ƏSAS İSTİQAMƏTLƏRİ HAQQINDA

**Süleymanova Aysu Rövşən qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika)

*aysusuleymanova46@gmail.com*

**Xülasə:** Məqalədə Azərbaycanın aparıcı sığorta şirkətləri olan Atəşgah Sığorta və Paşa Həyat Sığorta timsalında sığorta fəaliyyətinin əsas istiqamətləri təhlil edilmişdir. Araşdırma göstərir ki, bu şirkətlərin fəaliyyəti həyat və qeyri-həyat sığortası xidmətlərinin genişliyi, risklərin effektiv idarə olunması və müasir idarəetmə prinsiplərinə əsaslanır. Eyni zamanda sığorta haqqı və ödənişlərinin hesablanması mexanizmləri, eləcə də rəqəmsal texnologiyaların tətbiqi və maliyyə dayanıqlılığı məsələləri araşdırılmışdır. Nəticədə müəyyən edilmişdir ki, bu amillər sığorta bazarının inkişafında və maliyyə təhlükəsizliyinin təmin olunmasında mühüm rol oynayır.



**Açar sözlər:** *sığorta bazarı, sığorta fəaliyyəti, Ataşgah Sığorta, Paşa Həyat Sığorta, həyat sığortası, qeyri-həyat sığortası, aktuar hesablamalar, sığorta haqqı, sığorta ödənişi, fransıza, KASKO sığortası.*

Hal-hazırda Azərbaycan sığorta bazarında mühüm mövqeyə malik olan aparıcı şirkətlərdən "Ataşgah Sığorta" və "Paşa Həyat Sığorta" həm həyat, həm də qeyri-həyat sığortası seqmentlərində geniş xidmət portfeli təqdim edən təşkilatlar kimi seçilir. Bu şirkətlərin fəaliyyət strategiyası müasir sığorta bazarının tələblərinə uyğun olaraq risklərin idarə olunması, məhsul diversifikasiyası, müştəriyönümlülük və maliyyə dayanıqlılığı prinsipləri əsasında formalaşdırılmışdır. Şirkətlərin fəaliyyətində prioritet istiqamətlər bir neçə əsas sahə üzrə sistemləşdirilə bilər.

Həyat sığortası seqmentində fəaliyyət göstərən "Paşa Həyat Sığorta" şirkəti fərdi və korporativ müştərilər üçün müxtəlif həyat sığortası məhsulları təqdim edir. Bu məhsulların tərkibinə ömürlük və müddətli həyat sığortası proqramları, tibbi sığorta paketləri, pensiya təminatı mexanizmləri, annuitet məhsulları və investisiya elementli sığorta məhsulları daxildir. Bu istiqamət uzunmüddətli maliyyə planlaşdırılması baxımından əhalinin sosial müdafiəsinin gücləndirilməsində mühüm rol oynayır. Həyat sığortası məhsulları xüsusilə risklərin uzunmüddətli kompensasiyası və gələcək maliyyə təhlükəsizliyinin təmin edilməsi baxımından əhəmiyyətlidir.

Qeyri-həyat sığortası sahəsində isə "Ataşgah Sığorta" şirkəti əmlak, nəqliyyat vasitələri, məsuliyyət, daşınmaz əmlak, yük və KASKO sığortası kimi müxtəlif məhsullar təqdim edir. Bu xidmətlər iqtisadi fəaliyyət subyektlərinin və fərdi şəxslərin risklərinin minimuma endirilməsinə xidmət edir. Şirkətin qeyri-həyat portfelində avtomobil sığortası xüsusi yer tutur ki, bu da ölkədə nəqliyyat vasitələrinin sayının artması və icbari sığorta tələblərinin genişlənməsi ilə əlaqədardır [6].

Hər iki şirkətin fəaliyyətində risklərin düzgün qiymətləndirilməsi əsas strateji elementlərdən biridir. Bu məqsədlə müasir aktuar modellər, statistik analiz metodları və maliyyə proqnozlaşdırma alətlərindən istifadə olunur. Risklərin qiymətləndirilməsi prosesində müştərinin maliyyə vəziyyəti, fəaliyyət sahəsi, əmlakın dəyəri, sağlamlıq göstəriciləri və digər amillər nəzərə alınır. Bu yanaşma sığorta haqlarının optimal müəyyən edilməsinə və ödəniş qabiliyyətinin qorunmasına imkan yaradır [1].

Risk menecmenti sisteminin effektiv təşkili şirkətlərin maliyyə dayanıqlığını artırmaqla yanaşı, bazarda etibarlılığın möhkəmlənməsinə də səbəb olur. Müasir sığorta praktikasında risklərin diversifikasiyası və təkrarsığorta mexa-

nizmlərinin tətbiqi də mühüm əhəmiyyət kəsb edir.

Müasir iqtisadi münasibətlər sistemində sığorta bazarı risklərin idarə olunmasında mühüm maliyyə aləti hesab olunur. Fərdi və institusional subyektləri gözlənilməz maliyyə itkilərindən qoruyan sığorta mexanizmi iqtisadi sabitliyi və davamlı inkişafı dəstəkləyir. Bu baxımdan risklərin düzgün qiymətləndirilməsi və sığorta ödənişlərinin iqtisadi əsaslarla hesablanması böyük əhəmiyyət kəsb edir.

Sığorta bazarında risklərin qiymətləndirilməsi və sığorta haqqının hesablanması aktuar elminə əsaslanan riyazi-statistik metodlarla həyata keçirilir. Bu prosesdə aktuarlar ehtimal nəzəriyyəsi və statistik məlumatlardan istifadə edərək riskləri təhlil edir və uyğun sığorta tariflərini müəyyənləşdirirlər. Ehtimal göstəriciləri şirkətlərə gələcək zərərləri proqnozlaşdırmaq və uyğun ödəniş səviyyəsini təyin etmək imkanı verir ki, bu da sığorta fondunun maliyyə dayanıqlığını təmin edir.

Sığorta haqqının hesablanması aşağıdakı ümumi düstur əsasında aparılır:

Ümumi düstur:  $SH = SS \times T$

- SH – sığorta haqqı
- SS – sığortalanan obyektin dəyəri (məsələn, avtomobilin qiyməti, tibbi xidmətlərin dəyəri)
- T – sığorta tarifi (risk səviyyəsinə görə faizlə)

İzah: Sığorta məbləği (SS) nə qədər böyükdürsə, sığorta haqqı da bir o qədər yüksək olur. Tarif (T) isə riskin səviyyəsinə görə dəyişir. Məsələn, yaşlı sürücülər və ya riskli ərazilər üçün tarif daha yüksək olur.

Məsələn: Avtomobilin qiyməti 30 000 manat, risk faizi 4% olduqda:  $SH = 30\,000 \times 0.04 = 1\,200$  manat

Bu düsturdan göründüyü kimi, sığorta haqqının məbləği sığorta obyektinin dəyəri ilə birbaşa əlaqəlidir. Obyektin dəyəri nə qədər yüksək olarsa, mümkün zərərin həcmi də bir o qədər böyük olar və bu da sığorta haqqının artmasına səbəb olur. Eyni zamanda tarif göstəricisi risk səviyyəsindən asılı olaraq dəyişir. Məsələn, avtomobil sığortasında sürücünün yaşı, idarəetmə təcrübəsi, nəqliyyat vasitəsinin texniki vəziyyəti və istifadə olunduğu ərazi kimi amillər tarifi formalaşmasına təsir göstərir.

Sığorta münasibətlərində digər mühüm iqtisadi mexanizm sığorta ödənişinin hesablanmasıdır. Sığorta hadisəsi baş verdikdə sığortalıya dəymiş zərərin müəyyən hissəsi və ya tam məbləği sığorta şirkəti tərəfindən ödənilir. Lakin bəzi hallarda sığorta müqaviləsində fransıza nəzərdə tutulur. Fransıza – zərərin müəyyən hissəsinin sığortalı tərəfindən ödənilməsi deməkdir və bu mexanizm sığorta şirkətinin maliyyə yükünü azaltmaqla yanaşı, kiçik zərərlərin qarşısını almağa xidmət edir.

Sığorta ödənişinin hesablanması aşağıdakı düstur əsasında aparılır:

Düstur:  $SO = Z - F$

- $SO$  – sığorta ödənişi
- $Z$  – faktiki zərər
- $F$  – franşiza (sığortalının öz üzərinə düşən hissə)

İzah: Franşiza kiçik məbləğli zərərlər zamanı şirkətin ödəniş yükünü azaldır.

Bu prinsip həm avtomobil, həm də digər sığorta növlərində tətbiq olunur.

Məsələn: Zərər 5 000 manat, franşiza 500 manat olduqda:  $SO = 5000 - 500 = 4500$  manat

Bu düstur göstərir ki, sığorta şirkəti faktiki zərərin yalnız franşiza çıxıldıqdan sonrakı hissəsini ödəyir. Bu mexanizm sığortalının məsuliyyətini artırmaqla yanaşı, sığorta fondunun daha səmərəli idarə olunmasına imkan yaradır. Avtomobil sığortasında geniş tətbiq olunan KASKO növündə isə ödəniş məbləği faktiki zərər və sığorta məbləği arasında kiçik olan göstərici ilə məhdudlaşdırılır. Bu prinsip sığorta şirkətinin öhdəliklərini müqavilədə göstərilən maksimum məbləğlə məhdudlaşdırılır və həmçinin sığortalı ilə sığortaçı arasında riskin bölüşdürülməsini tənzimləyir.

KASKO sığortasında zərərin ödənilməsi aşağıdakı düstur əsasında müəyyən edilir:

Düstur:  $SO = \min(Z, SS)$

İzah: Əgər zərər sığorta məbləğindən böyükdürsə, sığorta şirkəti yalnız sığorta məbləği həddində ödəniş edir. Bu, şirkətin maliyyə dayanıqlığını qoruyur.

Məsələn: Sığorta məbləği: 20 000 manat, zərər: 25 000 manat

Bu halda sığorta şirkəti yalnız 20 000 manat ödəyir.

Bu düstura əsasən, əgər faktiki zərər sığorta məbləğindən yüksək olarsa, sığorta şirkəti yalnız müqavilədə nəzərdə tutulmuş məbləği ödəyir. Bu yanaşma sığorta şirkətlərinin maliyyə sabitliyinin qorunmasına xidmət edir.

Sığorta risklərinin qiymətləndirilməsində aktuar hesablamalar xüsusi əhəmiyyətə malikdir. Aktuar metodlar statistik məlumatların təhlili və ehtimal nəzəriyyəsinin tətbiqi əsasında risklərin başvermə ehtimalını müəyyən etməyə imkan verir. Bu yanaşma xüsusilə tibbi sığorta, həyat sığortası və uzunmüddətli sığorta müqavilələrində geniş tətbiq olunur.

Şirkətlər icbari və könüllü sığorta məhsullarını paralel şəkildə təqdim edir. İcbari sığorta növlərinə avtomobil sahiblərinin mülki məsuliyyəti, istehsalatda baş verən bədbəxt hadisələr və peşə xəstəlikləri nəticəsində əmək qabiliyyətinin itirilməsi halları daxildir. Bu məhsullar sosial müdafiənin vacib komponentidir. Könüllü sığorta sahəsində isə həyat, tibbi, əmlak və avtomobil sığortası üzrə geniş paketlər mövcuddur. Bazardakı inkişaf və maliyyə savad-

lılığının artması müştərilərə risklərə qarşı daha geniş təminat verir [6].

Sığorta şirkətləri rəqəmsal texnologiyalardan istifadə edərək müştəri məmnuniyyətini artırır. Elektron platformalar, mobil tətbiqlər, onlayn müqavilə və ödəniş sistemləri xidmətin əlçatanlığını yüksəldir, məlumatlılığı artırır və əməliyyat xərclərini azaldır. Rəqəmsallaşma risklərin avtomatlaşdırılmış qiymətləndirilməsinə və xidmət keyfiyyətinin yüksəlməsinə şərait yaradır.

Sığorta şirkətlərinin maliyyə dayanıqlığı onların bazardakı mövqeyini müəyyən edir. Toplanan sığorta haqları həm kompensasiyalara, həm də investisiya portfellerinə yönəldilərək uzunmüddətli likvidliyi təmin edir [2, 3]. Xüsusilə həyat sığortasında kapitalın təhlükəsiz və gəlirli istiqamətlərə yönəldilməsi prioritet hesab olunur.

İdarəetmə sistemi müşahidə şurası, direktorlar şurası və icraedici orqanlardan ibarətdir. Bu struktur qərarvermə səmərəliliyini artırır və hesabatlılığı təmin edir. Şəffaflıq maliyyə hesabatlarının açıqlanması, tənzimləyici qurumlarla əməkdaşlıq və risklərin açıq şəkildə təqdim olunmasını əhatə edir. Bu isə investor etimadını gücləndirir.

Şirkətlər müntəzəm təlimlər, sertifikatıya kursları və seminarlarla əməkdaşların bilik və bacarıqlarını artırır, sığorta xidmətlərinin keyfiyyətini yüksəldir. [4,5]

Nəticədə aparılan təhlil göstərir ki, "Ataşgah Sığorta" və "Paşa Həyat Sığorta" şirkətləri Azərbaycan sığorta bazarında kompleks xidmət modeli əsasında fəaliyyət göstərən aparıcı qurumlardandır. Məhsul portfelinin genişliyi, risklərin effektiv idarə olunması, maliyyə sabitliyi, innovativ texnologiyaların tətbiqi və korporativ idarəetmə prinsiplərinə riayət edilməsi onların bazarda dayanıqlı mövqeyini təmin edən əsas amillərdir.

Bu şirkətlərin fəaliyyəti sığorta bazarının inkişafına, əhəlinin maliyyə təhlükəsizliyinin gücləndirilməsinə və ölkədə sığorta mədəniyyətinin formalaşmasına mühüm töhfə verir.

### **Ədəbiyyat**

1. Abdullayev, P. Sığorta işinin təşkili və idarə olunması. Bakı: İqtisad Universiteti nəşriyyatı, 2018, 256 s.
2. Hacıyev, N. Maliyyə menecmenti. Bakı: Elm və Təhsil, 2018, 320 s.
3. Aslanov, H. Azərbaycanın maliyyə bazarı. Bakı: Elm və Təhsil, 2020, 240 s.
4. Dorfman, M. Introduction to Risk Management and Insurance. Boston: Pearson, 2008, 528 p.
5. Rejda, G., & McNamara, M. Principles of Risk Management and Insurance. Boston: Pearson, 2017, 720 p.
6. Azərbaycan Mərkəzi Bankı. Azərbaycan sığorta bazarı üzrə illik hesabat. Bakı: AMB nəşri, 2025, 95 s.

## **İKİNCİ TƏRTİB ADI DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN KOŞI MƏSƏLƏSİNİN EYLER VƏ DÖRDÜNCÜ TƏRTİB RUNQE-KUTTA ÜSULLARI İLƏ ƏDƏDİ HƏLLİ**

**Şəfiyeva Gülşən Xəliq qızı, Əliyeva Şəbnəm İmdar qızı**

*(BDU, Mexanika-riyaziyyat fakültəsi)*

*gulshan.shafiyeva@mail.ru, eliyevasebnem89@gmail.com*

**Xülasə:** *bu tədqiqat ikinci tərtib adi diferensial tənliklərin həllində dördüncü tərtib Runqe-Kutta metodunun Eyer üsulu ilə müqayisədə daha yüksək dəqiqliyə və sürətli yığılmaya malik olduğunu elmi şəkildə sübut edir.*

**Açar sözlər:** *adi diferensial tənliklər, Koşi məsələsi, Eyer üsulu, Runqe-Kutta üsulu, ədədi həll*

Adi diferensial tənliklərin analitik həllinin tapılması çox vaxt çətin və ya mürəkkəb diferensial tənliklər üçün ümumiyyətlə mümkün olmur. Buna görə də, ədədi üsullar bu tənliklərin təqribi həllinin tapılmasında mühüm rol oynayır.

Bir çox tədqiqatçılar adi diferensial tənliklər üçün başlanğıc məsələsinin ədədi həlli üçün müxtəlif üsullar qurmuşlar. Bu üsullardan Eyer və Runqe-Kutta üsulları xüsusi yer tutur.

Eyer üsulu sadə quruluşu və asan tətbiqi ilə seçilir [1, 3]. Bu üsul yalnız sadə arifmetik əməliyyatlar tələb edir və Runqe-Kutta kimi daha mürəkkəb metodlarla müqayisədə nisbətən az hesablama alqoritmində malikdir. Buna görə sadə və aşağı tərtibli məsələlər üçün daha səmərəli ola bilər. Eyer üsulu yalnız əvvəlki addımın məlumatından istifadə etdiyinə görə sürətli nəticə verir, lakin dəqiqlik baxımından zəif ola bilər.

Dördüncü tərtib Runqe-Kutta (RK4) üsulu isə daha yüksək tərtibli metoddur, eyni tərtibdən Eyer üsulu ilə müqayisədə nisbətən daha dəqiq nəticələr verir və yüksək dəqiqlik tələb olunan məsələlər üçün daha münasibdir [2, 3, 4].

Birinci tərtib başlanğıc məsələlər üçün ədədi metodlar geniş araşdırılsa da, ikinci tərtib məsələlər üçün xüsusi metodların tədqiqində müəyyən boşluq mövcuddur. Bu səbəbdən ikinci tərtib başlanğıc məsələləri üçün etibarlı və effektiv xüsusi ədədi metodların hazırlanması və qiymətləndirilməsi vacibdir.

Bu tezisdə ikinci tərtib adi diferensial tənliklər üçün Koşi məsələsinin həllində istifadə olunan biraddımlı ədədi metodların müqayisəli təhlili aparılır. Xüsusilə, Eyer metodu və dördüncü tərtib Runqe-Kutta metodunun tətbiq mexanizmləri, dəqiqlik dərəcələri və yığılma sürətləri araşdırılır. Tədqiqat göstərir ki, mürəkkəb dinamik sistemlərin modelləşdirilməsində dördüncü tərtib Runqe-Kutta üsulu daha yüksək sabitlik və minimum xəta təmin edir.

İkinci tərtib adi diferensial tənliklər üçün Koşi məsələsi aşağıdakı kimi ifadə olunur:

$$y'' = f(x, y(x), y'(x)), \quad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \quad x_0 \leq x \leq X. \quad (1)$$

Burada  $y''$  ikinci tərtib törəməni,  $y(x_0)$  və  $y'(x_0)$  isə verilmiş başlanğıc şərtləri ifadə edir. Bu tənliyi standart ədədi metodlarla həll etmək üçün onu birinci tərtib tənliklər sisteminə gətirmək vacibdir:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= z, \\ \frac{dz}{dx} &= z' = f(x, y, z), \quad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \quad z(x) = y'(x), \quad x_0 \leq x \leq X. \end{aligned} \quad (2)$$

Eyler alınan məsələnin ədədi həllini 1768-ci ildə təklif etmişdir. Eyler üsulu ən sadə ədədi integrallama üsuludur. O, funksiyanı hər addımda törəmə istiqamətində düz xətt boyunca yaxınlaşdırır. Üsulun əsas üstünlüyü hesablama sadəliyidir, lakin böyük addım ölçülərində xəta payı sürətlə artır. (2) məsələsi üçün Eyler üsulu aşağıdakı kimi olacaq:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h z_n, \\ z_{n+1} &= z_n + h f(x_n, y_n, z_n). \end{aligned}$$

(2) tipli məsələnin digər biraddımlı ədədi həlli iki alman riyaziyyatçısı tərəfindən qurulmuşdur. Təxminən 1894-cü ildə Runqe bu üsulu təklif etmiş və bir neçə il sonra Kutta tərəfindən təkmilləşdirilmişdir. Müxtəlif tərtibli Runqe-Kutta üsulları mövcuddur. Təcrübədə ən çox istifadə olunan dördüncü tərtib Runqe-Kutta üsuludur. (2) məsələsi üçün dördüncü tərtib Runqe-Kutta üsulu aşağıdakı kimi olacaq:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ z_{n+1} &= z_n + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4), \end{aligned}$$

burada

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n, y_n, z_n), \\ l_1 &= hf(x_n, y_n, z_n), \\ k_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1, z_n + \frac{1}{2}l_1\right), \\ l_2 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1, z_n + \frac{1}{2}l_1\right), \\ k_3 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2, z_n + \frac{1}{2}l_2\right), \\ l_3 &= hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2, z_n + \frac{1}{2}l_2\right), \end{aligned}$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3, z_n + l_3),$$
$$l_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3, z_n + l_3), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Dördüncü tərtib Runqe-Kutta üsulu daha mürəkkəb və "inovativ" yanaşma tələb edir. Bu üsul hər bir addım daxilində törəmənin dörd müxtəlif nöqtədə qiymətləndirilməsinə əsaslanır. Qeyd edək ki, bu üsul Teylor sırasına ayrılışda  $h^4$  tərtibinədək dəqiqlik təmin edir və dördüncü tərtib Runqe-Kutta üsulunun əsas üstünlüyü onun həm hamar, həm də sərt tənliklərdə yüksək sabitlik nümayiş etdirməsidir.

### Ədəbiyyat

1. A.Brissaud, U.Frisch Solving linear stochastic differential equations. J Mathematic Pyhs. (1974) 15:524-34. doi: 10.1063/1.1666678
2. B.Denis An Overview of Numerical and Analytical Methods for solving Ordinary Differential Equations. Cornell University (2020). Available online at: <http://arxiv.org/abs/2012.07558>
3. M.Kamruzzaman, MC.Nath A comparative study on numerical solution of initial value problem by using Euler's method, modified Euler's method and Runge-Kutta method. J Comput Mathematic Sci. (2018) 9:493-500. doi: 10.29055/jcms/784
4. A.Cromer Stable solutions using the Euler approximation. Am J Pyhs. (1981) 49:455-9. doi: 10.1119/1.12478

### REFLEKSİV FƏALİYYƏTİN MƏQSƏDLƏRİ

**Tahirov Bahadur Ömər oğlu, Rzayeva Nərmin Niyazi qızı**

*(BDU, Mexanika-riyaziyyat fakültəsi)*

*qarabah48@mail.ru*

**Xülasə:** *Hər bir şagirdin refleksiv bacarıqlarını inkişaf etdirməsi problemi mürəkkəb, çoxşaxəli və həmişə aktual olan problemlərdən biridir. Refleksiya, şagirdin psixikasının, onun təlim fəaliyyətinin uğurunu və səmərəliliyini təmin edən universal xüsusiyyəti-dir. Riyaziyyat təlimində şagirdlərin refleksiv bacarıqlarının inkişafında refleksiv məsələlərin rolu çox vacibdir. Təqdim olunan tezisdə refleksiv qabiliyyətlərin inkişafına xidmət edən tapşırıqlar verilir.*

**Açar sözlər:** *tapşırıq, metod, bacarıq, refleksiya.*

Hazırda təhsilin inkişafının əsas prioriteti şəxsiyyət yönümlü yanaşmadır. Şəxsiyyətin inkişafı üçün mühüm vasitə fəaliyyətdir. Psixoloji və pedaqoji ədə-

biyyatda təlim fəaliyyətinin iki əsas mərhələsi fərqləndirilir:

- 1) şagirdin fərdi öyrənmə fəaliyyətinə yiyələnməsi;
- 2) təlim fəaliyyətinin müxtəlif komponentlərini tamda birləşdirilməsi.

Müasir təlim prosesi fərdin mühüm bacarığını—öyrənmə bacarığını inkişaf etdirir və şagirdlərin fərdi inkişafı üçün əlverişli şərait yaradır.

Refleksiya şagirdin təlim fəaliyyətinin keyfiyyətini yüksəldir.

Refleksiv məsələnin həlli aşağıdakı bacarıqların inkişafına xidmət edir:

- 1) müəyyən problemlə şəraitdə əsas əlaqələri müəyyən etmək bacarığı;
- 2) müəyyən edilmiş əlaqələri modelləşdirmək bacarığı;
- 3) oxşar məsələnin həll üsullarını ümumiləşdirmək bacarığı.

Aparıcı metodistlər refleksiv məsələnin aşağıdakı növlərini fərqləndirirlər:

- 1) təklif olunan həll nümunəsində səhvlərin tapılmasına aid məsələlər;
- 2) təklif olunan mühakimədə səhvlərin tapılmasına aid məsələlər;
- 3) səhv etməyə təhrik edən məsələlər;
- 4) tədqiqat xüsusiyyətli məsələlər.[1]

*Məsələ.* Hündürlüyü 40 sm, sahəsi  $1200 \text{ sm}^2$  olan düzbucaqlı paralelepiped şəklində akvariumda 8 qırmızı, 12 ağ və 4 sarı balıq var.

Sual 1. Əgər akvariumun oturacağının eni uzunluğundan 10 sm kiçikdirsə, onun ölçülərinin tapın.

Həlli. Oturacağın enini  $x$  ilə işarə etsək, onda aşağıdakı tənliyi alarıq:

$x(x+10)=1200$ . Onu həll etsək,  $x=30$  taparıq. Deməli, akvariumun eninin 30 sm, uzunluğunun isə, 40 sm olduğunu tapdıq.

Sual 2. Hər balıq üçün akvariumun neçə  $\text{dm}^3$ -in düşdüyünü tapın.

Həlli. Şərtə görə, akvariumun oturacağının eni 30 sm, uzunluğu 40 sm və hündürlüyü 40 sm olduğundan onun həcmi  $48 \text{ dm}^3$  olar. Balıqların sayı 24 olduğundan hər balığa  $\frac{V}{24} = \frac{48}{24} = 2 \text{ dm}^3$  düşər.

Cavab:  $2 \text{ dm}^3$ .

### Ədəbiyyat

1. Далингер В.А. Причины типичных ошибок учащихся по математике// Современная наука: актуальные проблемы пути их решения, 2014, №12, с.4-97.



## ŞƏRTİ EKSTEMUMA AİD MƏSƏLƏLƏRİN HƏLLİNƏ VARIATİV YANAŞMA

**Tahirov Bahadur Ömər oğlu, Rzayeva Nərmin Niyazi qızı**

(BDU, mexanika-riyaziyyat fakültəsi)

qarabah48@mail.ru

**Xülasə:** Tezisdə funksiynın ekstremal qiymətlərini tapmağa aid məsələlərdən istifadənin didaktik imkanları tədqiq olunur. Tezisdə məsələnin şərtinin və onun həlli üsullarının müxtəlif şərtlərindən istifadə etməklə, müxtəlif riyazi anlayışların və metodların qarşılıqlı əlaqələrini müəyyən etməyin, həm də şagirdlərin variativ təfəkkürünün inkişaf etdirməyin imkanları araşdırılır.

**Açar sözlər:** ekstremal qiymət, variativ təfəkkür, müxtəlif həll üsulları, xüsusi metodlar, diferensial hesabı.

Funksiyaların ekstremal qiymətlərini tapmağa aid məsələlərə elm və texnikanın bir çox sahələrində rast gəlmək olur. Çox vaxt ekstremal qiymətlərin, müəyyən şərtlərdə və ya məhdudiyyətlərdə tapılması tələb olunur. Belə məsələlər şərti ekstemuma aid məsələlər adlanır.

Ekstremal qiymətlərin tapılması üçün diferensial hesabı metodlarından və ya digər xüsusi metodlardan istifadə oluna bilər.

Aşağıda müəyyən konkret ifadənin ekstremal qiymətinin tapılmasına aid nümunələr verilir.

Məsələ.  $A = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$  ifadəsinin ən böyük qiymətini tapın.

Bu məsələ bir neçə üsulla həll edilə bilər.

I üsul.  $\vec{a}(x; \sqrt{1-x^2})$  və  $\vec{b}(\sqrt{1-y^2}; y)$  vektorlarını daxil edək.

Onda verilən A ifadəsi  $\vec{a}$  və  $\vec{b}$  vektorlarının skalyar hasili şəklində göstərilə bilər. Verilən ifadənin ən böyük qiymətini alması üçün  $\vec{a}$  və  $\vec{b}$  vektorları eyni istiqamətli olması lazımdır. Deməli, ifadənin ən böyük qiyməti

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 0^\circ = \sqrt{x^2 + 1 - x^2} \cdot \sqrt{y^2 + 1 - y^2} \cdot 1 = 1$$

olar.[1]

Bu qiymət,  $\frac{x}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{y} > 0$  şərtini ödəyən isənilən  $(x; y)$  cütləri üçün alınır, başqa sözlə,  $x^2 + y^2 = 1$ .

II üsul. A ifadəsindəki x və y dəyişənlərinin mümkün qiymətləri çoxluğu

$$\begin{cases} x^2 \leq 1, \\ y^2 \leq 1 \end{cases}$$

bərabərsizlikləri ilə müəyyən olunur.  $x = \cos \alpha$ ,  $y = \sin \alpha$  işarə edək. A ifadəsi ən böyük qiymətini x və y – in mənfi olmayan qiymətlərində aldığından

$\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$  olduğunu fərz etmək olar. Onda A ifadəsini

$$A = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$$

şəklində yazmaq olar. Sonuncu bərabərlikdən, A ifadəsinin ən böyük qiymətinin 1-ə bərabər olduğu alınır.

### Ədəbiyyat

1. Погорелов А.В. Геометрия 7-9 классы: учебник для общеобразовательных организаций / М. Просвещение, 2013, –240 с.

## PERİODİK VƏ KƏSİLƏN ƏMSALLI ŞTURM-LİUVİLL OPERATORUNUN SPEKTRİ

**Talıblı Nigar Nadir qızı**

(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)

nigartalibli3@gmail.com

**Xülasə:** Bu işdə periodik və kəsilən əmsallı Şturm-Liuvill ifadəsinin doğurduğu operatorun spektral xassələri öyrənilir.

**Açar sözlər:** Şturm-Liuvill operatoru, öz-özünə qoşma operator, spektr.

$R = (-\infty, +\infty)$  həqiqi ədədlər çoxluğunda

$$l^q = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

diferensial ifadəsinə baxaq. Belə ki,  $[0, 2]$  parçasında

$$q(x) = \begin{cases} -q, & x \in [0, 1), \\ q, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

kimi təyin olunan  $q(x)$  funksiyası bütün oxda 2 periodu ilə davam etdirilir, burada  $q$  müsbət ədəddir.  $l^q$  ifadəsinin  $L^2(-\infty, \infty)$  fəzasında doğurduğu maksimal operatoru  $L^q$  ilə işarə edək.  $L_q^2(z)$  ilə

$$-\frac{d^2}{dx^2}u + q(x)u = zu \tag{1}$$

tənliyinin  $L^2(0, 2)$  Hilbert fəzasına daxil olan həllər çoxluğunu işarə edək.

$L_q^2(z)$  altfəzasını öz-özünə obyektiv inikas edən (bax,[1]) elə  $U(z)$  operatorunun matrisini

$$U(z) = \begin{pmatrix} u_1(2,z) & u_2(2,z) \\ u'_1(2,z) & u'_2(2,z) \end{pmatrix} \quad (2)$$

işarə edək.

**Teorem 1.** Tutaq ki,  $z \in C \setminus \{-q, q\}$ . Onda (2.13) düsturu ilə təyin olunmuş  $U(z)$  matrisi üçün

$$U(z) = \begin{pmatrix} c_+(z)c_-(z) - \frac{\sqrt{z+q}s_+(z)s_-(z)}{\sqrt{z-q}} & \frac{s_+(z)c_-(z)}{\sqrt{z+q}} + \frac{c_+(z)s_-(z)}{\sqrt{z-q}} \\ -\sqrt{z-q}c_+(z)s_-(z) - \sqrt{z+q}s_+(z)c_-(z) & -\frac{\sqrt{z-q}s_+(z)s_-(z)}{\sqrt{z+q}} + c_+(z)c_-(z) \end{pmatrix} \quad (3)$$

düsturu doğrudur.  $U(z)$  matrisinin  $D(z)$  diskriminantı üçün isə

$$\begin{aligned} D(z) &= \sigma_1(z) + \sigma_2(z) = \sigma(z) + \frac{1}{\sigma(z)} = u_1(2,z) + u'_2(2,z) = \\ &= 2 \cos \sqrt{z+q} \cos \sqrt{z-q} - \left( \frac{\sqrt{z+q}}{\sqrt{z-q}} + \frac{\sqrt{z-q}}{\sqrt{z+q}} \right) \sin \sqrt{z+q} \sin \sqrt{z-q} \end{aligned} \quad (4)$$

düsturu doğrudur, burada  $c_{\pm}(z) = \cos \sqrt{z \pm q}$ ,  $s_{\pm}(z) = \sin \sqrt{z \pm q}$ ,  $u_1(x, z)$  və  $u_2(x, z)$  isə (1) tənliyinin

$$u_1(0, z) = 1, u'_1(0, z) = 0$$

$$u_2(0, z) = 0, u'_2(0, z) = 1$$

şərtlərini ödəyən fundamental həlləridir.

**İsbatı.**

$$\begin{aligned} -u''_1(x, z) + q(x)u_1(x, z) &= zu_1(x, z), x \in (0, 1) \\ u_1(0, z) &= 1, u'_1(0, z) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

və

$$\begin{aligned} -u''_2(x, z) + q(x)u_2(x, z) &= zu_2(x, z), x \in (0, 1) \\ u_2(0, z) &= 0, u'_2(0, z) = 1 \end{aligned} \quad (6)$$

məsələlərinin həllərini tapaq.  $x \in (0, 1)$  olduqda,  $q(x) = -q$  olduğunu nəzərə alsaq,  $u_1(x, z)$  funksiyası üçün

$$-u''_1(x, z) - qu_1(x, z) = zu_1(x, z)$$

tənliyini alırıq.  $u_1(0,z)=1, u_1'(0,z)=0$  və  $u_2(0,z)=0, u_2'(0,z)=1$  şərtlərindən istifadə etsək, (4) və (5) məsələlərinin  $(0,1)$  intervalındakı həllərinin

$$u_1(x,z) = \cos \sqrt{z+q}x \text{ və } u_2(x,z) = \frac{1}{\sqrt{z+q}} \sin \sqrt{z+q}x$$

funksiyaları olduğunu görürük.

$$u_1(1,z) = \cos \sqrt{z+q}, u_1'(1,z) = -\sqrt{z+q} \sin \sqrt{z+q},$$

$$u_2(1,z) = \frac{1}{\sqrt{z+q}} \sin \sqrt{z+q}, u_2'(1,z) = \cos \sqrt{z+q}$$

bərabərliklərindən və  $[1,2]$  parçasında  $q(x)=q$  olduğundan,  $[1,2]$  parçasında  $u_1(x,z)$  və  $u_2(x,z)$  funksiyaları üçün aşağıdakı Koşi məsələlərini almış olarıq:

$$\begin{aligned} -u_1''(x,z) + qu_1(x,z) &= zu_1(x,z), x \in [1,2] \\ u_1(1,z) &= \cos \sqrt{z+q}, u_1'(1,z) = -\sqrt{z+q} \sin \sqrt{z+q} \end{aligned} \quad (7)$$

və

$$\begin{aligned} -u_2''(x,z) + qu_2(x,z) &= zu_2(x,z), x \in [1,2] \\ u_2(1,z) &= \frac{1}{\sqrt{z+q}} \sin \sqrt{z+q}, u_2'(1,z) = \cos \sqrt{z+q} \end{aligned} \quad (8)$$

Asanlıqla (bax,[1]) yoxlamaq olar ki, (7) və (8) məsələlərinin  $[1,2]$  parçasındakı həlləri

$$u_1(x,z) = \cos \sqrt{z+q} \cos \sqrt{z-q}(x-1) - \frac{\sqrt{z+q}}{\sqrt{z-q}} \sin \sqrt{z+q} \sin \sqrt{z-q}(x-1). \quad (9)$$

$$u_2(x,z) = \frac{\sin \sqrt{z+q}}{\sqrt{z+q}} \cos \sqrt{z-q}(x-1) + \frac{\cos \sqrt{z+q}}{\sqrt{z-q}} \sin \sqrt{z-q}(x-1). \quad (10)$$

funksiyalarıdır.

(9)- (10) düsturlarından  $x$ -ə nəzərən törəmə alıb,  $x=2$  götürsək,  $u_1(2,z)$ ,  $u_2(2,z)$ ,  $u_1'(2,z)$  və  $u_2'(2,z)$  üçün olan ifadələri (2) matrisində və diskriminantın ifadəsində nəzərə alsaq, (3) və (4) düsturlarını almış olarıq.

**Teorem 2.9.**  $L^q$  operatorunun spektri hesabi sayda cüt-cüt kəsişməyən qapalı aralıqların birləşməsindən ibarətdir.

**İsbati.** Tutaq ki,  $\lambda > q$ .  $K_q(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda+q}}{\sqrt{\lambda-q}} + \frac{\sqrt{\lambda-q}}{\sqrt{\lambda+q}}$  işarələməsi aparsaq və toplama teoremlərindən istifadə etsək,  $D(\lambda)$  diskriminantını belə yazmaqla bilirik:

$$D(\lambda) = \left[ 2 + \frac{1}{2}(K_q(\lambda) - 2) \right] \cos(\sqrt{\lambda+q} + \sqrt{\lambda-q}) \cos - \frac{1}{2}(K_q(\lambda) - 2) \cos(\sqrt{\lambda+q} - \sqrt{\lambda-q}). \quad (11)$$

Əgər  $\lambda_n$  və  $\mu_n$  ədədlərini

$$\sqrt{\lambda_n + q} + \sqrt{\lambda_n - q} = 2\pi n, \quad \sqrt{\mu_n + q} + \sqrt{\mu_n - q} = (2n + 1)\pi$$

kimi seçsək, və

$$K_q(\lambda) > 2 \text{ və } 0 < \left| \cos(\sqrt{\lambda+q} - \sqrt{\lambda-q}) \right| = \left| \cos \left( \frac{2q}{\sqrt{\lambda+q} + \sqrt{\lambda-q}} \right) \right| < 1$$

bərabərsizliklərindən və (11) bərabərliyindən istifadə etsək, kifayət qədər böyük  $n$ -lər üçün aşağıdakı bərabərsizlikləri alırıq:

$$D(\lambda_n) = 2 + \frac{1}{2}(K_q(\lambda_n) - 2) \left[ 1 - \cos(\sqrt{\lambda_n + q} - \sqrt{\lambda_n - q}) \right] > 2, \quad (12)$$

$$D(\mu_n) = -2 - \frac{1}{2}(K_q(\mu_n) - 2) \left[ 1 + \cos(\sqrt{\mu_n + q} - \sqrt{\mu_n - q}) \right] < -2. \quad (13)$$

(12)-(13) bərabərsizliklərindən çıxır ki,  $\lambda_n$  və  $\mu_n$  ədədləri dayanıqsızlıq nöqtələridir. Ona görə də  $(\lambda_n, \mu_n)$  və  $(\mu_n, \lambda_{n+1})$  intervallarının hər birində

ən azı bir dayanıqlıq parçası olmalıdır. Dayanıqlıq parçaları  $L^q$  operatorunun spektri olduğuna görə (bax,[2]) teorem isbat olundu.

### Ədəbiyyat

1. Eastham M. S. P., The Spectral Theory of Periodic Differential Equations, Scottish Academic Press, 1973.
2. Weidmann J., Spectral Theory of Ordinary Differential Operators, Springer Verlag 1987, 310 p.

## **SÜNİ İNTELLEKTDƏ NEYRON ŞƏBƏKƏLƏRİ VƏ EKSPERT SİSTEMLƏRİNİN MÜQAYİSƏSİ**

**Tariverdiyeva Çinarə Qahir qızı**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*ibadzadecinare@gmail.com*

**Xülasə:** *bu işdə süni intellekt sahəsində neyron şəbəkələri və ekspert sistemlərinin xüsusiyyətləri, üstünlükləri və çatışmazlıqları müqayisəli şəkildə təhlil olunur. Göstərilir ki, neyron şəbəkələri öyrənmə və yeni qanunauyğunluqları aşkar etmə qabiliyyəti ilə seçildiyi halda, ekspert sistemləri məntiqi izah imkanları ilə fərqlənir və müasir yanaşmalarda bu iki texnologiyanın integrasiyası aktuallıq kəsb edir.*

**Açar sözlər:** *neyron şəbəkələri, ekspert sistemləri, süni intellekt, hibrid sistemlər.*

Bir çox tədqiqatçıların fikrincə, intellekt çox mürəkkəb bir bilik sahəsidir və onu tək bir nəzəriyyə ilə təsvir etmək mümkün deyil. Buna görə də alimlər intellekti müxtəlif abstraksiya səviyyələrində xarakterizə edən bütöv bir nəzəriyyələri iyerarxiyası qururlar. Bu iyerarxiyanın ən aşağı səviyyəsində neyron şəbəkələri, genetik alqoritmlər və digər təkamül edən hesablamalar formaları yerləşir, daha yüksək abstraksiya səviyyəsində isə ekspert sistemləri dayanır.

Süni intellekt "binasının" qurulmasına aşağıdan deyil, yuxarıdan başlanılmış və bu proses zaman baxımından böyük fasilə ilə baş vermişdir. Praktiki tətbiqlər sahəsində ekspert sistemləri texnologiyası XX əsrin 80-ci illərinin ortalarında zirvəyə çatmışdır. Məhz həmin dövrdən, 1980-ci illərin sonlarından etibarən, proqram təminatı bazarında ekspert sistemləri ilə neyron şəbəkələri arasında rəqabət başlamış və bu rəqabət bu günə qədər davam edir [1].

Gələcək üçün proqnozlar qurarkən bu iki yanaşmanın yaxınlaşması meylinin formalaşdığı qeyd olunur və bu, hər iki texnologiyayı eyni anda istifadə edən hibrid intellektual sistemlərin yaranması ilə özünü göstərir. Bununla belə, praktiki məsələlərin həllində çox vaxt bu iki texnologiyadan hansına üstünlük veriləcəyini seçmək lazım gəlir.

Neyron şəbəkələrinin əsas çatışmazlığı onların qeyri-verbal olmasıdır. Əgər ekspert sisteminin verdiyi nəticəni "izah alt sistemini" işə salmaqla məntiqi şəkildə əsaslandırmaq mümkündürsə, neyron şəbəkəsi tətbiq edilərkən belə bir imkan mövcud olmur. Digər bir çatışmazlıq isə tam formalaşmış fundamental nəzəriyyənin olmaması və bunun nəticəsi olaraq neyron şəbəkələrinin layihələndirilməsi və öyrədilməsi üçün kifayət qədər universal metodikaların mövcud olmamasıdır.

Neyroşəbəkə texnologiyalarının əsas üstünlüklərindən biri onların yaradılmasının nisbətən az əmək tələb etməsi və bunun nəticəsində proqram məhsullarının maya dəyərinin aşağı olmasıdır. Neyroşəbəkə modelləşdirilməsi zamanı biliklərin əldə edilməsi və formallaşdırılması kimi əmək tutumlu və baha başa gələn prosedurlar tələb olunmur. Bunun əvəzinə biliklərin avtomatik çıxarılmasını həyata keçirən geniş təlim alqoritmləri toplusu təklif olunur. Neyron şəbəkələri bir çox qeyri-standart məsələlərin həlli üçün standart bir yanaşma təqdim edir.

Neyron şəbəkə texnologiyalarının mühüm üstünlüklərindən biri də ekspertlər tərəfindən hələ bilinməyən yeni bilikləri aşkar etmək potensialıdır. Neyron şəbəkələri xüsusilə insan intuisiyasına bənzər yanaşmanın lazım olduğu, predmet sahəsinin qanun və qanunauyğunluqlarının məlum olmadığı və ya onların aşkar edilib formallaşdırılmasının çətin olduğu hallarda daha effektivdir.

Neyron şəbəkələrindən fərqli olaraq, ekspert sistemləri yalnız ekspert tərəfindən onlara daxil edilmiş biliklər, qanunlar və qanunauyğunluqlarla işləyir. Bəzi hallarda ekspert sistemləri də məntiqi zəncirlər qura və beləliklə yeni biliklər yarada bilər. Lakin bu biliklər mövcud qaydalar bazasına əsaslanaraq formalaşır və aksiomatik sistemi genişləndirmir. Buna görə də onların əldə olunması prosesi yaradıcılıq aktı hesab edilmir və bu biliklər prinsip etibarilə tam yeni olmur.

Dünya təcrübəsi göstərir ki, yaxşı layihələndirilmiş və düzgün öyrədilmiş neyron şəbəkələri demək olar ki, istənilən predmet sahəsində qanunauyğunluqları müstəqil şəkildə aşkar edə və müxtəlif sahələrdə adekvat riyazi modellər qura bilir [2].

Bununla yanaşı, neyron şəbəkə texnologiyalarının imkanlarını şişirtmək də düzgün deyil. Adətən neyron şəbəkələr biliklərin məlum olduğu və yaxşı təsvir edilərək formallaşdırıla bildiyi predmet sahələrində deterministik modellərdən geri qalır. Həmçinin çıxış parametrlərinin giriş parametrlərindən asılı olmadığı və ya zəif asılı olduğu hallarda neyron şəbəkələrdən istifadə məqsəddə uyğun deyil.

Təcrübə göstərir ki, neyron şəbəkələr məsələnin həlli insan üçün çətin olduqda, çoxlu sayda giriş və çıxış amilləri mövcud olduqda, giriş amillərindəki dəyişikliklər çıxışa təsir etdikdə və deterministik riyazi model qurmaq mümkün olmadıqda daha məqsəddə uyğundur [3].

Artıq məlum olan çoxsaylı praktik tətbiqlərə baxmayaraq, süni neyron şəbəkələrinin signalların emalı sahəsində gələcək istifadəsi üçün imkanları tam tükənməmişdir və onların uzun müddət qərarların qəbuluna dəstək verən əsas vasitələrdən biri olaraq qalacağı ehtimal olunur.

### **Ədəbiyyat**

1. Рассел С. Искусственный интеллект: современный подход - М: Издат. дом «Вильямс», 2006., 1408 с.
2. Ясницкий Л.Н. Интеллектуальные информационные технологии и системы. - Пермь: Пермский государственный университет, 2007., 271 с.
3. Haykin S. Neural Networks: A Comprehensive Foundation // MacMillan College Publishing Co. New York, 1994.

## **JAVA TƏTBİQLƏRİ ÜÇÜN ZİBİL YIĞIMININ (GARBAGE COLLECTION) OPTİMALLAŞDIRILMASI**

**Tariverdiyeva Çinarə Qahir qızı**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*ibadzadecinare@gmail.com*

**Xülasə:** *bu işdə Java-da zibil yığımının incəlikləri, Java virtual maşınının (JVM) daxilində mövcud olan müxtəlif zibil yığıcıları və onlar arasındakı fərqlər nəzərdən keçirilmişdir. Həmçinin, zibil yığımının tətbiq performansına və istifadəçi təcrübəsinə təsiri araşdırılmış, effektiv olmayan zibil yığımının əlamətləri və problemlərin, qanunauyğunluqların təhlili üçün GC loqlarının analizi öyrənilmişdir.*

**Açar sözlər:** *zibil yığıcılar, Garbage Collection, Java Virtual Maşın (JVM), zibil yığımı, GC səmərəsizliyi.*

Java-da tətbiqin performansı böyük ölçüdə yaddaşın idarə edilməsindən asılıdır. Java-da zibil yığımı (GC), proqramın aktiv hissəsinə artıq istinad etməyən obyektləri silir. Bu, tətbiq yaddaşından minimum və effektiv şəkildə istifadə etməyə imkan verir.

Java bir çox zibil yığıcısı tətbiq edir. Bu o deməkdir ki, Java obyektləri yaşlarına və ya həyat dövrü mərhələlərinə görə təsnif edir. Yeni obyektlər qısamüddətli və tez-tez GC dövrlərinə məruz qalır. Uzunömürlü obyektlər isə GC dövrlərinin daha az tətbiq olunduğu sahələrə köçürülür. Zibil yığımı üçün tətbiq hazırlamaq üçün proqramçı bu balansı başa düşməlidir. Ötürmə qabiliyyəti (throughput) və gecikmə (latency) arasındakı balans həlledici əhəmiyyət kəsb edir. Seçilmiş GC strategiyası tətbiqlərin performansına əhəmiyyətli təsir göstərir.

Java-da zibil yığımı "obyektlərin əlçatanlığı" (reachability) konsepsiyasına əsaslanır. Əgər obyekt canlı axınlardan (threads) əlçatan deyilsə, o, zibil yığımı üçün uyğun hesab edilir. JVM daim obyektləri və onların istinadlarını yoxlayır. Bu,



yalnız istifadə olunan obyektlərin yaddaş resurslarını istehlak etməsini təmin edir. Zibil yığımı dövrlərlə işləyir, əlçatmaz obyektləri skan edir və silir [1].

Java-da zibil yığımı, sistemin yaddaşı boşaltmaq üçün istifadə olunmayan obyektləri avtomatik təmizlədiyi bir prosesdir. Prosesin ilkin mərhələsində hələ də istifadə olunan obyektlər tapılaraq işarələnir. İkinci mərhələdə isə artıq ehtiyac duyulmayan obyektlər kənarlaşdırılır. Java GC yaddaşı hissələrə bölür:

1. Gənc nəsil (Young Generation): Yeni obyektlərin saxlanıldığı yer. Yer boşaltmaq üçün bu hissə tez-tez təmizlənir.

2. Ehtiyatlı (Köhnə) nəsil (Old Generation): Uzunömürlü obyektlərin yerləşdiyi yer. Bu hissə daha az təmizlənir, lakin bu proses daha çox vaxt aparır.

Java GC sürət, yaddaş istifadəsi və performans balansını qorumaq üçün özünü tənzimləyir. Tərtibatçılar ehtiyaclardan asılı olaraq tətbiqlərin daha yaxşı işləməsi üçün GC parametrlərini incə tənzimləyə bilərlər.

Java Virtual Maşını (JVM) dəstinə bir neçə zibil yığıcısı daxildir. JVM zibil yığıcıları yaddaş istifadəsini optimallaşdırmaq üçün hazırlanıb. Onlar ötürmə qabiliyyəti və ya gecikmə, bəzən isə hər ikisi üçün optimallaşdırılır. Bu cür optimallaşdırmalar tətbiqlərin davranışına əhəmiyyətli dərəcədə təsir göstərə bilər.

JVM yığıcılarında yaddaşın idarə edilməsi strategiyası ondan ibarətdir ki, sahələrin ayrılması və paylanması yığıcı tərəfindən effektiv şəkildə həyata keçirilir. Bu, nəsilər və bir çox sahələr arasındakı balansdır. Tətbiq aşağı gecikmə tələb etdikdə bəzi yığıcılar daha uyğundur. Digərləri isə maksimum ötürmə qabiliyyətinə üstünlük verir. Seçim tətbiqdəki yükləndən və onun performans xüsusiyyətlərindən asılıdır [2].

Mövcud bəzi JVM zibil yığıcıları:

Serial GC. Kiçik tətbiqlər üçün sadə biraxınlı (single-threaded) yığıcıdır. Serial Garbage Collector ən təməl JVM yığıcısıdır. O, tək axınlı rejimdə işləyir. Serial GC yaddaş idarəetməsi üçün böyük əlavə xərclər tələb etməyən kiçik tətbiqlər üçün əlverişlidir.

Parallel GC. Parallel Garbage Collector fərqli yanaşma tətbiq edərək bir neçə axından istifadə edir. Bu, zibil yığımı tapşırıqlarını Serial GC-dən daha sürətli yerinə yetirməyə imkan verir. Ötürmə qabiliyyətini artırmaq üçün daha uzun fasilələrə (pauses) dözə bilən tətbiqlər tez-tez Parallel GC-ni seçirlər.

CMS GC. CMS Garbage Collector paralel işləmə və minimum fasilə müddətinə fokuslanması ilə seçilir. O, GC prosesinin bir hissəsini tətbiqin icrası ilə paralel yerinə yetirir. Bu, tətbiqin işindəki kəsilmələri azaldır ki, bu da daha rəvan işləmə tələb edən tətbiqlər üçün faydalıdır.

G1 GC (Garbage First). G1 Garbage Collector ötürmə qabiliyyəti və fasilə müddəti arasında balans qurmağa yönəlmiş müasir alternativdir. O, yaddaşı (he-

ap) regionlara bölərək zibili tədricən və effektiv şəkildə yığmağa imkan verir. G1 GC əhəmiyyətli yaddaş tələbləri olan irimiqyaslı tətbiqlər üçün faydalıdır.

Bir sıra göstəricilər zibil yığımının qeyri-effektivliyinə işarə edə bilər. Bunlardan ən geniş yayılanları uzanmış fasilələr və izah olunmayan yaddaş artımıdır. Tətbiqlər ləng işləmə və ya vaxtaşırı ləngimələr nümayiş etdirə bilər. Qeyri-effektiv zibil yığımının ümumi əlamətləri:

- Tez-tez baş verən və uzunmüddətli GC fasilələri tətbiqlərin cavabdehliyinə təsir edir.

- Yaddaşın həddindən artıq istifadəsi yüksək istehlaka səbəb olur.

- Kifayət qədər fiziki yaddaş olmasına baxmayaraq, "OutOfMemory" xətalının tezliyinin artması.

- İş yükündə dəyişiklik olmadan tətbiqin ötürmə qabiliyyətində anomaliyalar.

- Zibil yığımı dövrləri zamanı prosessorun qeyri-adi dərəcədə yüksək yüklənməsi.

Proses icra zamanı tətbiqin davranışını müşahidə etməklə başlayır. Təsadüfi fasilələr və ya ləng işləmə kimi simptomlar göstərici ola bilər. Performansla bağlı bu şikayətlər diqqətlə izlənməlidir. Sistem monitorinqi metrikaları da GC səmərəsizliyini aşkar etməyə kömək edir. GC dövrləri zamanı prosessor yükünün sıçrayışları geniş yayılmış simptomdur. Yaddaş istehlakı meyllərini izləmək, xüsusən normal yüklər zamanı anomaliyaları üzə çıxara bilər. Hətta yaxşı sınaqdan keçmiş kodda belə GC səmərəsizliyi yarana bilər. Tərtibatçılar GC fəaliyyətinin müntəzəm nəzarətini və qeydiyyatını (logging) təmin etməlidirlər. Bu loqlar zibil yığımı davranışının incəlikləri haqqında dəyərli məlumatlar verir. GC loqları zibil yığımı davranışını başa düşmək üçün zəruridir. Onlar hər bir yığım dövrü haqqında ətraflı məlumat ehtiva edir. Bu loqların dərindən təhlili səmərəsizliyi göstərən qanunauyğunluqları və dövrləri aşkar edə bilər [3].

Bundan əlavə, Java tətbiqlərində zibil yığımını idarə etmək üçün bəzi alətlərdən istifadə etmək olar. Onlar Java Virtual Maşınının (JVM) daxili iş prinsipi haqqında təsəvvür yaradır. Tərtibatçılar bu alətlər tərəfindən real vaxt rejimində təqdim olunan məlumatlardan faydalanırlar. Onlar GC dövrlərini, fasilə vaxtlarını və yaddaş istifadəsini vizuallaşdırmağa kömək edir.

Yaxşı bir başlanğıc nöqtəsi yaddaş həcmnin (heap size) idarə edilməsi və nəsilər üzrə effektiv zibil yığımıdır. JVM-də zibil yığımı davranışını tənzimləmək və təkmilləşdirmək üçün istifadə edilə bilən müxtəlif flaqlar mövcuddur. Yaddaş həcmi zibil yığımının effektivliyində kritik rol oynayır. Düzgün konfigurasiya yaddaş istifadəsini performans tələbləri ilə balanslaşdırmağa kömək edir. Nəsilərə əsaslanan zibil yığımı strategiyaları yaddaşdan daha yaxşı istifa-

də etmək üçün obyektlərin xidmət müddətini nəzərə alır.

Fərdiləşdirmə JVM flaqları vasitəsilə konkret davranışlara yönələ bilər. Onlar tərtibatçılara zibil yığıcı parametrlərini tənzimləməyə imkan verir. Düzgün konfigurasiya ilə bu cür tənzimləmə uzun fasilələr və yaddaş fragmentasiyası kimi problemləri aradan qaldıra bilər.

### Ədəbiyyat

1. Эванс Б., Гофф Дж., Ньюланд К. Оптимизация Java: практические методы повышения производительности приложений в JVM — М.: ДМК Пресс, 2019., 448 с.
2. Производительность Java: подробные советы по настройке виртуальной машины Java — СПб.: Питер, 2015., 448 с.
3. Джонс Р., Хоскинг А., Мосс Э. Справочник по сборке мусора: алгоритмы автоматического управления памятью — М.: Вильямс, 2014., 464 с.

## QEYRİ-LOKAL SƏRHƏD ŞƏRTLİ DİFERENSİAL VƏ İNTEQRO-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRLƏ TƏSVİR OLUNAN BİR OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ

**Zeynallı Fərəh Məmməd qızı**

(GDU, Riyaziyyat və informatika fakültəsi)

farahzeynalli@rambler.ru

**Xülasə:** Təbiətsünəşliyin bir sıra problemlərinin riyazi modelləri diferensial və inteqro-diferensial tənliklərlə təsvir olunur. Elə proseslər mövcuddur ki, onları xarakterizə edən parametrləri bilavasitə ölçmək olmur. Belə məsələlər qeyri-lokal şərtlə diferensial tənliklərlə təsvir olunur. Belə məsələlər ətraflı şəkildə A.M. Naxuşevin [1,5] kitablarında şərh edilmişdir. Diferensial və inteqro-diferensial tənliklərlə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələlərinə baxılmışdır.

**Açar sözlər:** diferensial tənlik, optimal idarəetmə, sərhəd məsələsi, inteqro-diferensial tənliklər, vektor funksiya.

**Məsələnin riyazi qoyuluşu.** İndi aşağıdakı şəkildə təsvir olunan bir optimal idarəetmə məsələsinə baxaq. Burada optimal idarəetmə məsələsi impuls təsirli və qeyri-lokal şərtlə inteqro-diferensial tənliklər sistemi ilə verilən sərhəd məsələsi ilə təsvir olunur.

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)) + \int_0^t g(t, \tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T, \quad t \neq t_i, \quad (1)$$

$$x(0) + Bx(T) = C, \quad (2)$$

$$\Delta x(t_i) = I_i(x(t_i), v_i), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_p < T, \quad (3)$$

$$(u(\cdot), [v]) \in U \times \Pi^p = \{u(t) \in L_2[0, T] : u(t) \in V, n.e.t \in [0, T], v_i \in \Pi\}, \quad (4)$$

burada  $x(t) \in R^n$ ,  $f(t, x, u)$  n-ölçüclü kəsilməz funksiyadır,  $B \in R^{n \times n}$ ,  $C \in R^{n \times 1}$  – verilmiş sabit matrislərdir,  $\Delta x(t_i) = x(t_i^+) - x(t_i^-)$ ,  $I_i(x, v)$  – verilmiş n-ölçülü müəyyən funksiyalardır,  $(u, [v])$  idarəedici parametrlərdir,  $V \in R^r$  və  $\Pi \in R^m$  – verilmiş qapalı, qabarıq, məhdud çoxluqlardır.

(1)-(4) sərhəd məsələsinin həlləri çoxluğunda

$$J(u, [v]) = \Phi(x(0), x(T)) \quad (5)$$

funksionalının minimallaşdırılması tələb olunur.

**Məsələnin analitik həlli.** Hər bir qeyd olunmuş  $(u(\cdot), [v]) \in U \times \Pi^p$  idarəedici parametrləri üçün (1)-(4) sərhəd məsələsinin həlli dedikdə  $[0, T]$ ,  $t \neq t_i$  aralığında təyin olunmuş elə mütləq kəsilməz  $x(t) : [0, T] \rightarrow R^n$  vektor funksiyaları başa düşəcəyik ki, bu funksiyalar  $t = t_i$   $i = 1, 2, \dots, p$  nöqtələrində soldan kəsilməzdirlər və sonlu  $x(t_i^+)$  sağ limitləri vardır. Belə funksiyalar fəzasını  $PC([0, T], R^n)$  işarə etsək, onda bu xətti fəza banax fəzasına çevrilər. Burada normanı aşağıdakı kimi təyin olunur [2,3].

$$\|x\|_{PC} = \max_{t \in [0, T]} |x(t)|,$$

Hər bir qeyd olunmuş  $(u(\cdot), [v]) \in U \times \Pi^p$  idarəedici parametrlərinə uyğun (2)-(4) sərhəd məsələsinin həllini  $x(t; u(t), [v])$  kimi işarə edəcəyik. Əgər  $(u(\cdot), [v]) \in U \times \Pi^p$  idarəediciləri cütü ona uyğun  $x(t; u(t), [v])$  (1)-(4) sərhəd məsələsinin həlli (5) funksionalına minimum qiymət verirsə, onda  $(u(\cdot), [v]) \in U \times \Pi^p$  idarəediciyinə optimal idarəedici deyəcəyik. (1)-(5) məsələsinin həlli olan  $\{(u(t), [v]), x(t; u(t), [v])\}$  mümkün prosesinə isə optimal proses deyəcəyik.

Baxılan sərhəd məsələsinin həllinin varlığı üçün aşağıdakı münasibətlər doğrudur.

$$1. \|B\| < 1,$$

$$2. f : [0, T] \times R^n \times R^r \rightarrow R^n, \quad g : [0, T] \times [0, T] R^n \times R^r \rightarrow R^n \quad \text{və} \quad I_i : R^n \times R^m \rightarrow R^n, \\ i = 1, 2, \dots, p \quad \text{funksiyaları} \quad \text{kəsilməzdirlər} \quad \text{və} \quad \text{elə} \quad K > 0, G > 0, \quad L_i > 0$$

$i = 1, 2, \dots, p$  sabitləri vardır ki,

$$|f(t, x, u) - f(t, y, u)| \leq K|x - y|, \quad t \in [0, T], \quad x, y \in R^n;$$

$$|g(t, \tau, x, u) - g(t, \tau, y, u)| \leq G|x - y|, \quad t, \tau \in [0, T], \quad x, y \in R^n;$$

$$|I_i(x, v) - I_i(y, v)| \leq L_i|x - y|, \quad x, y \in R^n;$$

bərabərsizlikləri ödənilir.

3.

$$L = (1 - \|B\|)^{-1} [KT + \frac{GT^2}{2} + \sum_{i=1}^p L_i] < 1.$$

### Ədəbiyyat

1. А.М. Нахушев Задачи со смещением для уравнений в частных производных, Москва, Наука, 2006, 287с.
2. А.М. Нахушев Уравнения математической биологии, Москва, Высш. шк., 1995, 301 с.
3. А.А. Самарский О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений, Дифференц. уравнения, 1980, том 16, номер 11, 1925–1935.
4. Ф.М. Зейналы. Принцип максимума Понтрягина для задач оптимального управления с нелокальными краевыми условиями, Journal of Contemporary Applied Mathematics V. 10, No 1, 2020, стр. 14-23.
5. Ф.М. Зейналы, Я.А. Шарифов. Условия оптимальности в задачах управления системами интегро-дифференциальных уравнений в импульсными воздействиями при нелокальных краевых условиях, Bakı Dövlət Universitetinin xəbərləri, 2, стр. 63-73.

## YARIM TƏRTİBLİ ADI DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN SPEKTRAL MƏSƏLƏ

**Zeynalov Ramin Mübariz oğlu**

(ARETN Riyaziyyat İnstitutu)

raminzeynalov1304@gmail.com

**Xülasə:** Bu işdə kəsr tərtib adi xətti bircins tənlik üçün Spektral məsələnin həlli araşdırılmışdır. Baxılan tənliyin həlli düzəliş aparılmış Mitteraq-Leffler sırası şəklində axtarılaraq məxsusi ədədlər üçün tənlik alınmış və məxsusi funksiyalar təyin edilmişdir.

**Açar sözlər:** Sərhəd şərti, məxsusi ədəd, məxsusi funksiya.

Aşağıdakı sərhəd məsələsinə baxaq:

$$D^{\frac{1}{2}}y(x) = \lambda^2 y(x), \quad x \in (1, 2), \quad (1)$$

$$y(1) = 0, \quad y(2) = 0, \quad (2)$$

burada  $\lambda$ - spektral parametrdir. (1) tənliyinin həllini professor Nihan Əliyev tərəfindən düzəliş aparılmış Mittaq-Leffler sırası şəklində axtaraq [1]:

$$y(x) \equiv y(x, \rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \frac{x^{-1+\frac{k+1}{4}}}{(-1+\frac{k+1}{4})!}, \quad (3)$$

burada  $\rho$ -naməlum parametrdir.

$$D^{\frac{1}{4}}y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \frac{x^{-1+\frac{k}{4}}}{(-1+\frac{k}{4})!} = \frac{x^{-1}}{(-1)!} + \rho \frac{x^{-\frac{3}{4}}}{(-\frac{3}{4})!} + \rho^2 \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{(-\frac{1}{2})!} + \dots = \rho y(x),$$

$$D^{\frac{1}{2}}y(x) = \rho^2 y(x),$$

$$\rho^2 = \lambda^2, \quad \rho_m = (-1)^m \lambda, \quad m = 1, 2, \quad (4)$$

$$y(x) = C_1 y(x, \rho_1) + C_2 y(x, \rho_2), \quad (5)$$

$$\begin{cases} C_1 y(1, \rho_1) + C_2 y(1, \rho_2) = 0, \\ C_1 y(2, \rho_1) + C_2 y(2, \rho_2) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

(6) sisteminin trivial olmayan həlinin varlığı üçün

$$\Delta = \begin{vmatrix} y(1, -\lambda) & y(1, \lambda) \\ y(2, -\lambda) & y(2, \lambda) \end{vmatrix} = 0, \quad (7)$$

şərti ödənilməlidir.

Beləliklə (1)-(2) spektral məsələsinin məxsusi ədədləri ( $\lambda_s$  –lər) (7) tənliyindən təyin edildikdən sonra, məxsusi funksiyalar

$$y_s(x) = \left\{ y(x_1 - \lambda_s) - \frac{y(1, -\lambda_s)}{y(1, \lambda_s)} y(x, \lambda_s) \right\} C_s, \quad (8)$$

burada  $C_s$ - ixtiyari sabitdir, onu seçməklə  $y_s(x)$  –i normallaşdırmaq olar.

**Teorem.** Kəsir tərtib törəməli (1) tənliyi üçün spektral məsələnin məxsusi ədədləri (7) tənliyindən, məxsusi funksiyaları isə (8) şəklində təyin edilmişdir.

Kəsir tərtib törəməli müxtəlif tənliklər üçün məsələlərlə saytdan tanış olmaq olar [2].

### Ədəbiyyat

1. Əliyev N.Ə., Zeynalov R.M., Kəsir tərtib törəməli tənlik üçün bir sərhəd məsələsi/ Diferensial və integral operatorlar mövzusunda II Respublika elmi konfransının materialları. Bakı Dövlət Universiteti, 03-04 dekabr 2024, s.62-63.
2. <http://nihan.jssoft.ws>

## О ПРЕДСТАВЛЕНИИ НЕКОТОРОГО ИНТЕГРАЛА ТИПА ПОТЕНЦИАЛА ПО ПОЛУПРОСТРАНСТВУ

**Бабаев Рауф Мусейб оглы**

(BDU, Mexanika-riyaziyyat fakültəsi)

*babayevrauf55@mail.ru*

**Резюме:** В работе исследуется оператор типа потенциала по полупространству и доказывается достаточное условие для представления таких операторов потенциалами Рисса по полупространству.

**Ключевые слова:** Полупространство, характеристическая функция, норма, гиперсингулярный интеграл, потенциал.

Рассмотрим потенциал Рисса

$$(K^\alpha \varphi) = \int_{R^n} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{|x - \tau|^{n-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < n, \quad x \in R^n.$$

Известно [1], [2], что оператор  $K^\alpha$  определен на  $L_p(R^n)$  (интеграл сходится абсолютно п.в. в  $R^n$ ) при  $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$  и является ограниченными

при  $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ , из  $L_p(R^n)$  в  $L_q(R^n)$ , где  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ . Как принято, обозначим  $\frac{1}{p_\alpha} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ , т.е.  $p_\alpha = \frac{np}{n - \alpha p}$ .

А теперь рассмотрим потенциал Рисса по полупространству [4], например, по  $R_+^n = \{x \in R^n : x = (x_1, \dots, x_n), x_n > 0\}$ , т.е.

$$(K_+^\alpha \varphi)(x) = \int_{R_+^n} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{|x - \tau|^{n-\alpha}}, \quad x \in R_+^n, \quad 0 < \alpha < n.$$

Из [4] следует, что оператор  $K_+^\alpha$  также определен в пространстве  $L_p(R^n)$  при  $1 \leq p < \frac{n}{\alpha}$  и является ограниченный при  $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ , из  $L_p(R_+^n)$  в  $L_q(R_+^n)$ , где  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ .

Обозначим

$$K_+^\alpha(L_p(R_+^n)) = \{f : f = K_+^\alpha \varphi, \varphi \in L_p(R_+^n)\}$$

Из 4 следует

**Лемма 1.**  $f \in K_+^\alpha(L_p(R_+^n))$  тогда и только тогда, если:

- 1) при  $\alpha < \frac{2}{p}$  выполняется  $f \in K_p^\alpha(R_+^n) \stackrel{\text{dif}}{=} P_{R_+^n}^\alpha(L_p(R_+^n))$ ;
- 2) при  $\alpha > \frac{2}{p}$ ,  $\left[\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{p}\right] \neq \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{p}$  выполнялись  $f \in K_p^\alpha(R_+^n)$  и  $t\tau_0 \partial_n^j D_-^{\alpha/2} f = 0$ ,  $j = 0, 1, \dots, \left[\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{p}\right]$ .

Здесь  $P_{R_+^n}^\alpha$  – оператор сужения на  $R_+^n$ ,  $P_{R_+^n}^\alpha K^\alpha(L_p(R_+^n))$  – класс сужения функций из  $K^\alpha(L_p(R_+^n))$  на  $R_+^n$ ;  $t\tau_0 f$  – след функции  $f$  на гиперплоскость  $x_n = 0$  ([4]), т.е.

$$t\tau_0 f \stackrel{\text{dif}}{=} \lim_{x_n \rightarrow 0+} L_q(R_+^{n-1}) f(x', x_n), \quad q = \frac{(n-1)p}{n - \alpha p}, \quad \alpha < \frac{n}{p};$$

$$(D_-^\beta f)(x) = \frac{1}{H_o(\beta, l)} \int_{R_+^n} \frac{(\Delta_y^l f)(x)}{y_n^\beta |y|^n} dy, \quad l > \beta, \quad H_o(\beta, l) = \frac{H(\beta, l)}{C_n}$$

$$C_n = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \pi^{\frac{n}{2}}, \quad H(\beta, l) = \int_0^{+\infty} (1-l^{-r})^l \eta^{-\beta-1} d\eta,$$

$$(\Delta_y^l f)(x) = \sum_{k=0}^l (-1)^k C_l^k f(x + ky)$$

конечная разность порядка  $l$  с векторным шагом  $-y$  и с центром в точке  $x$ .

Рассмотрим интеграл типа потенциала по полупространству, т.е.

$$(G_+^\alpha \varphi)(x) = \int_{R_+^n} \frac{c(x, \tau) \varphi(\tau) d\tau}{|x - \tau|^{n-\alpha}}, \quad x \in R_+^n. \quad (1)$$

Пусть  $0 < \alpha < 1$ ,  $\varphi \in L_p(R_+^n)$ ,  $1 < p < \frac{n}{\alpha}$ ,  $c(x, \tau)$  – ограниченная на

$$R_+^n \times R_+^n = \{(x, \tau) : x \in R_+^n, \tau \in R_+^n\}.$$

Пусть  $c(x, \tau)$  – характеристика, удовлетворяющая условию Гель-



дера, т.е.

$$|c(x, \tau) - c(x_1, \tau)| \frac{C|x - x_1|^\lambda}{(1 + |x|)^\lambda (1 + |x_1|)^\lambda},$$

где  $C$  – абсолютная постоянная (не зависящая от  $x, x_1, \tau$ )  $0 < \alpha < \lambda \leq 1$ .

Очевидно, что при ограниченной измеримой  $c(x, \tau)$ ,  $x \in R_+^n, \tau \in R_+^n$  интеграл (1) (при остальных условиях на  $\varphi$ ) сходится п.в. на  $R_+^n$ .

Имеем  $(G_+^\alpha \varphi)(x) = (T^\alpha \varphi)(x) + (T_1^\alpha \varphi)(x)$ ,  $x \in R_+^n$ , где

$$(T^\alpha \varphi)(x) = g(x) = \int_{R_+^n} \frac{[c(x, \tau) - c(\tau, \tau)]\varphi(\tau) d\tau}{|x - \tau|^{n-\alpha}},$$

$$(T_1^\alpha \varphi)(x) = g_1(x) = \int_{R_+^n} \frac{c(\tau, \tau)\varphi(\tau) d\tau}{|x - \tau|^{n-\alpha}}, \quad x \in R_+^n.$$

Верно

$$\begin{aligned} g(x) - g(x+t) &= \int_{R_+^n} [c(x, \tau) - c(\tau, \tau)] \left[ \frac{1}{|x - \tau|^{n-\alpha}} - \frac{1}{|x+t - \tau|^{n-\alpha}} \right] \varphi(\tau) d\tau + \\ &+ \int_{R_+^n} \frac{c(x, \tau) - c(x+t, \tau)}{|x+t - \tau|^{n-\alpha}} \varphi(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2)$$

Пусть

$$\begin{aligned} f_1(x, t) &= \int_{R_+^n} [c(x, \tau) - c(\tau, \tau)] \left[ \frac{1}{|x - \tau|^{n-\alpha}} - \frac{1}{|x+t - \tau|^{n-\alpha}} \right] \varphi(\tau) d\tau, \\ f_2(x, t) &= \int_{R_+^n} \frac{c(x, \tau) - c(x+t, \tau)}{|x+t - \tau|^{n-\alpha}} \varphi(\tau) d\tau, \quad x, t \in R_+^n. \end{aligned}$$

Имеем

**Лемма 2.** Интеграл

$$\int_{R_{\varepsilon+}^n} \frac{g(x) - g(x+t)}{t_n^\alpha |t|^n} dt, \quad (3)$$

где  $R_{\varepsilon+}^n = \{x \in R_+^n : x = (x_1, \dots, x_n), x_n > \varepsilon\}$ , сходится при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в  $L_p(R^n)$ .

Для доказательства леммы 2 предварительно докажем две леммы.

**Лемма 3.** Пусть  $\alpha < 1$ ,  $\alpha < \gamma$ ,  $0 < \gamma$ ,  $\beta < n$  и  $n - \beta - \gamma + \alpha > 0$ . Тогда имеем оценку

$$i_{\alpha,\beta,\gamma}(x) = \int_{R_+^n} \frac{dt}{t_n^\alpha |t|^{n-\gamma} |t+x|^{n-\beta}} \leq C(\alpha,\beta,\gamma,n) \cdot \begin{cases} \frac{\ln\left(2 + \frac{|x'|}{|x_n|}\right)}{|x|^{n-\gamma}}, & \beta = \alpha, \\ \frac{1}{|x|^{n+\gamma-\beta-\gamma}}, & \beta > \alpha, \\ \frac{1}{|x|^{n-\gamma} |x_n|^{\alpha-\beta}}, & \beta < \alpha, \end{cases}$$

где  $x = (x', x_n) \in R^n$  (т.е.  $x' \in R^{n-1}$ ,  $x_n \in (-\infty, +\infty)$ ),  $C(\alpha, \beta, \gamma, n)$  постоянная, зависящая лишь от  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $n$ .

**Доказательство.** Имеем [3]

$$i_{\alpha,\beta,\gamma}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt_n}{t_n^\alpha} \int_{R^{n-1}} \frac{dt'}{\left[|t'|^2 + t_n^2\right]^{\frac{n-\gamma}{2}} \left[|t' + x'|^2 + (t_n + x_n)^2\right]^{\frac{n-\beta}{2}}}$$

Учитывая, что

$$\int_{R^{n-1}} \frac{dt'}{\left[|t'|^2 + t_n^2\right]^{\frac{n-\gamma}{2}} \left[|t' + x'|^2 + (t_n + x_n)^2\right]^{\frac{n-\beta}{2}}} \leq j_{\beta,\gamma,n}(t_n, x)$$

где

$$j_{\beta,\gamma,n}(t_n, x) = C(\beta, \gamma, n) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{|t_n + x_n|^{n+1-\gamma-\beta}}, & t_n \in A_1(x', x_n), \\ \ln \frac{2(t_n^2 + |x'|^2)}{(t_n^2 + |x'|^2)^{\frac{n+1-\gamma-\beta}{2}}}, & \beta = 1, \\ \frac{1}{(t_n^2 + |x'|^2)^{\frac{n-\gamma}{2}} |t_n + x_n|^{1-\beta}}, & 0 < \beta < 1, \\ \frac{1}{(t_n^2 + |x'|^2)^{n+1-\gamma-\beta}}, & \beta > 1, \end{array} \right\} +$$

$t_n \in A_2(x', x_n)$

$$+ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{t_n^{n+1-\gamma-\beta}}, & t_n \in A_3(x', x_n), \\ \frac{\ln \frac{2[t_n + x_n]^2 + |x'|^2}{t_n^2}}{\left[ (t_n + x_n)^2 + |x'|^2 \right]^{\frac{n+1-\gamma-\beta}{2}}}, & \gamma = 1, \\ \frac{1}{\left[ (t_n + x_n)^2 + |x'|^2 \right]^{\frac{n-\beta}{2}} t_n^{1-\gamma}}, & 0 < \gamma < 1, \\ \frac{1}{\left[ (t_n + x_n)^2 + |x'|^2 \right]^{n+1-\gamma-\beta}}, & \gamma > 1 \end{array} \right\}_{t_n \in A_4(x', x_n)},$$

где

$$A_1(x', x_n) = \{t_n \in (0, +\infty) : t_n^2 + |x'|^2 < (t_n + x_n)^2\},$$

$$A_2(x', x_n) = \{t_n \in (0, +\infty) : t_n^2 + |x'|^2 \geq (t_n + x_n)^2\},$$

$$A_3(x', x_n) = \{t_n \in (0, +\infty) : (t_n + x_n)^2 + |x'|^2 < t_n^2\},$$

$$A_4(x', x_n) = \{t_n \in (0, +\infty) : (t_n + x_n)^2 + |x'|^2 \geq t_n^2\}.$$

Оценив интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{j_{\beta, \gamma, n}(t_n, x)}{t_n^\alpha} dt_n, \quad x \in R^n,$$

получим требуемую оценку.

**Лемма 4.**

$$\sup_{\varepsilon > 0} \left\| \int_{R_{\varepsilon+}^n} \frac{g(x) - g(x+t)}{t_n^\alpha |t|^n} dt \right\|_{L_p(R_+^n)} < +\infty.$$

**Доказательство.** Достаточно доказать

$$\sup_{\varepsilon > 0} \left\| \int_{R_{\varepsilon+}^n} \frac{|f_1(x, t)| dt}{t_n^\alpha |t|^n} \right\|_{L_p(R_+^n)} < +\infty,$$

$$\sup_{\varepsilon > 0} \left\| \int_{R_{\varepsilon+}^n} \frac{|f_2(x, t)| dt}{t_n^\alpha |t|^n} \right\|_{L_p(R_+^n)} < +\infty.$$

Пусть

$$A_\varepsilon(x) = \int_{R_\varepsilon^n} \frac{|f_1(x,t)|dt}{t_n^\alpha |t|^n}, \quad B_\varepsilon(x) = \int_{R_\varepsilon^n} \frac{|f_2(x,t)|dt}{t_n^\alpha |t|^n},$$

$$x \in R_+^n, \quad \varepsilon > 0.$$

Оценим  $A_\varepsilon(x)$ ,  $B_\varepsilon(x)$ ,  $x \in R_+^n$ . Имеем

$$|A_\varepsilon(x)| \leq \frac{C(\alpha, n)}{(1+|x|)^\lambda} \int_{R_+^n} \frac{f(x, r) |\varphi(\tau)| d\tau}{(1+|\tau|)^\lambda |x-\tau|^{n-\lambda}},$$

где

$$f(x, \tau) = \begin{cases} 1, & \frac{|x' - \tau'|}{|x_n - \tau_n|} \leq 2, \\ \ln \left( 2 + \frac{|x' - \tau'|}{|x_n - \tau_n|} \right), & \frac{|x' - \tau'|}{|x_n - \tau_n|} > 2, \end{cases} \quad x, \tau \in R_+^n$$

Пусть

$$g_\lambda(x) = \int_{R_+^n} \frac{f(x, r) |\varphi(\tau)| d\tau}{(1+|\tau|)^\lambda |x-\tau|^{n-\lambda}}, \quad x \in R_+^n$$

Легко показать, что  $\frac{g_\lambda(x)}{(1+|x|)^\lambda} \in L_p(R_+^n)$  и

$$\left( \int_{R_+^n} \frac{|g_\lambda(x)|^p dx}{(1+|x|)^{\lambda p}} \right)^{1/p} \leq C(\alpha, \lambda, n) \|\varphi\|_p$$

А теперь оценим  $B_\varepsilon(x)$ ,  $x \in R_+^n$  ( $\varepsilon > 0$ ). В результате имеем

$$|B_\varepsilon(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^\lambda} \int_{R_\varepsilon^n} \frac{\psi(x+t) dt}{t_n^\alpha |t|^{n-\alpha} (1+|x+t|)^\lambda}, \quad (4)$$

$$x \in R_+^n, \quad \text{где} \quad \psi(s) = \int_{R_+^n} \frac{|\varphi(\tau)| d\tau}{|s-\tau|^{n-\alpha}}, \quad s \in R_+^n \quad \text{и}$$

$$\psi \in L_{p_\alpha} R_+^n, \quad p_\alpha = \frac{np}{n-\alpha p}.$$

Применяя неравенство Минковского, из (4) получим

$$\|B_\varepsilon(x)\|_p \leq \int_{R_{\varepsilon+}^n} \frac{dt}{t_n^\alpha |t|^{n-\alpha}} \left( \int_{R_+^n} \frac{dx}{(1+|x|)^{\frac{\lambda n}{\alpha}} (1+|x+t|)^{\frac{\lambda n}{\alpha}}} \right)^{\alpha/n} \left( \int_{(t_n, +\infty)_n} \psi^{P_\alpha}(\tau) d\tau \right)^{1/P_\alpha}, \quad (5)$$

где  $(t_n, +\infty)_n = R^{n-1} \times (t_n, +\infty) = \{(\xi', \xi_n): \xi' \in R^{n-1}, \xi_n \in (t_n, +\infty)\}$ .

Так как

$$\left( \int_{R_+^n} \frac{dx}{(1+|x|)^{\frac{\lambda n}{\alpha}} (1+|x+t|)^{\frac{\lambda n}{\alpha}}} \right)^{\alpha/n} \leq \frac{C(\alpha, \lambda, n)}{(1+t_n)^\lambda}$$

то из (5) следует, что

$$\|B_\varepsilon(x)\|_p \leq C(\alpha, \lambda, n) \|\phi\|_p, \quad \varepsilon > 0, \quad (6)$$

Таким образом, имеем

$$\sup_{\varepsilon > 0} \|A_\varepsilon(x)\|_p < +\infty, \quad \sup_{\varepsilon > 0} \|B_\varepsilon(x)\|_p < +\infty, \quad (7)$$

т.е. лемма 4 доказана.

Докажем теперь лемму 2, т.е.

$$\int_{R_{\varepsilon+}^n} \frac{g(x) - g(x+t)}{t_n^\alpha |t|^n} dt$$

сходится при  $\varepsilon \rightarrow 0+$  в  $L_p(R_+^n)$ .

Имеем  $(\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0)$

$$\int_{R_{\varepsilon+}^n} \frac{g(x) - g(x+t)}{t_n^\alpha |t|^n} dt = \int_{R_{\varepsilon+}^n} \frac{f_1(x, t) dt}{t_n^\alpha |t|^n} + \int_{R_{\varepsilon+}^n} \frac{f_2(x, t) dt}{t_n^\alpha |t|^n} \quad (8)$$

$$\int_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)_n} \frac{g(x) - g(x+t)}{t_n^\alpha |t|^n} dt = \int_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)_n} \frac{f_1(x, t) dt}{t_n^\alpha |t|^n} + \int_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)_n} \frac{f_2(x, t) dt}{t_n^\alpha |t|^n} \quad (9)$$

Пользуясь теоремой Леви и полнотой пространства  $L_p(R_+^n)$  из (7), (8), (9) получим требуемое утверждение.

Таким образом, лемма 2 доказана.

Так как  $G_+^\alpha \varphi \in L_{p_\alpha}(R_+^n)$  при  $\varphi \in L_p(R_+^n)$  то из лемм 1 и 2 следует ([4]).

Теорема. Пусть  $0 < \alpha < 1$ ,  $1 < p < \frac{n}{2}$  и  $(G_+^\alpha \varphi)(x)$ ,  $\varphi \in L_p(R_+^n)$ ,

$x \in R_+^n$  – интеграл типа потенциала с ограниченной характеристикой по полупространству  $R_+^n$  и характеристика  $-c(x, \tau)$  удовлетворяет условию Гельдера с показателем  $\lambda$ ,  $\alpha < \lambda \leq 1$ , т.е.

$$|c(x, \tau) - c(x_1, \tau)| \leq \frac{C|x - x_1|^\lambda}{(1 + |x|)^\lambda (1 + |x_1|)^\lambda}, \quad x, x_1, \tau \in R_+^n$$

где  $C$  – абсолютная постоянная. Тогда

1. при  $\alpha < \frac{2}{p}$  выполняется  $G_+^\alpha(L_p(R_+^n)) \subset K_+^\alpha(L_p(R_+^n))$
2. при  $\alpha > \frac{2}{p}$  для того чтобы  $G_+^\alpha(L_p(R_+^n)) \subset K_+^\alpha(L_p(R_+^n))$

достаточно выполнение условия  $t\tau_0 D_-^{\alpha/2}(G_+^\alpha \varphi)(x) = 0$ .

### Литература

1. Самко С.Г. Гиперсингулярные интегралы и их приложения.- Изд-во Ростовского ун-та, 1984 г.
2. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. – М.: «Мир», 1973 г.
3. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. М.: «Наука», 1981 г.
4. Рубин Б.С. Метод односторонних потенциалов в теории некоторых классов дифференцируемых потенциалов по полупространству.- ВИНТИ, №1456-85Деп., 1985 г.

## НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЗАДАННОЙ РЕКУРРЕНТНЫМ СООТНОШЕНИЕМ

**Бабаев Рауф Мусейб оглы**  
(BDU, Mexanika-riyaziyyat fakültəsi)  
babayevrauf55@mail.ru

**Резюме:** В работе исследуются некоторые свойства последовательности с комплексными данными, заданными рекуррентным соотношением и найден предел этой последовательности.

**Ключевые слова:** Сходимость, последовательность, комплексные данные, предел, рекуррентное соотношение.

Пусть [1]

$$x_1, x_2, x_3, \in R, q_1, q_2, q_3 \in R, q_1 + q_2 + q_3 = 1, q_i \geq 0, i = \overline{1,3}$$

и

$$x_n = q_1 x_{n-3} + q_2 x_{n-2} + q_3 x_{n-1}, n \geq 4.$$

Верно равенство

$$x_{n+1} - x_n = -[(q_1 + q_2)(x_n - x_{n-1}) + q_1(x_{n-1} - x_{n-2})], n \geq 3$$

**Лемма1.** Для существования  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  необходимо и достаточно вы-

полнение условия  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$ , при этом верно равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{q_1 x_1 + (q_1 + q_2)x_2 + x_3}{1 + 2q_1 + q_2}$$

**Доказательство.** Достаточность. Имеем

$$x_{n+1} - x_n = -[(q_1 + q_2)(x_n - x_{n-1}) + q_1(x_{n-1} - x_{n-2})], n \geq 3 \quad (1)$$

Тогда на основе равенств

$$x_{n+1} = (x_{n+1} - x_n) + (x_n - x_{n-1}) + \dots + (x_5 - x_4) + (x_4 - x_3) + x_3 \quad (2)$$

и

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= -[(q_1 + q_2)(x_n - x_{n-1}) + q_1(x_{n-1} - x_{n-2})], \\ x_n - x_{n-1} &= -[(q_1 + q_2)(x_{n-1} - x_{n-2}) + q_1(x_{n-2} - x_{n-3})], \\ x_4 - x_3 &= -[(q_1 + q_2)(x_3 - x_2) + q_1(x_2 - x_1)], \quad x_3 = x_3 \end{aligned}$$

получим равенство

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -[(q_1 + q_2)x_n + q_1x_{n-1} - (q_1 + q_2)x_2 - q_1x_1] + x_3 = \\ &= -[(q_1 + q_2)x_{n+1} - (q_1 + q_2)(x_{n+1} - x_n) + q_1x_{n+1} - q_1(x_{n+1} - x_{n-1}) - (q_1 + q_2)x_2 - q_1x_1] + x_3, n \geq 3 \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} x_{n+1} + (q_1 + q_2)x_{n+1} + q_1x_{n+1} &= (q_1 + q_2)(x_{n+1} - x_n) + q_1(x_{n+1} - x_{n-1}) \\ &+ (q_1 + q_2)x_2 + q_1x_1 + x_3, n \geq 3. \end{aligned} \quad (3)$$

Правая сторона равенства (3) имеет предел при  $n \rightarrow +\infty$ , тогда и левая сторона равенства (3) имеет предел и верно равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \frac{q_1x_1 + (q_1 + q_2)x_2 + x_3}{1 + 2q_1 + q_2}.$$

Достаточность условия доказано. Необходимость условия очевидно. Лемма доказана.

**Лемма 2.** Верно равенство:

$$x_{n+1} - x_n = (-1)^p \sum_{k=0}^p C_p^k (q_1 + q_2)^{p-k} q_1^k (x_{n+1-(p-k)} - x_{n-(p+k)}), n = 3, 4, \dots, \text{ где}$$

$$1) \ p = 1, \frac{n-1}{2}, \text{ при нечетном } n,$$

$$2) \ p = 1, \frac{n-2}{2}, \text{ при четном } n.$$

Доказательство. Лемма доказывается методом математической индукции.

Утверждение верно при  $p=1$ .

Пусть утверждение верно при  $p=m$ . Докажем, что оно верно и при  $p=m+1$ .

По условиям верно равенство

$$x_{n+1} - x_n = (-1)^m \sum_{k=0}^m C_m^k (q_1 + q_2)^{m-k} q_1^k (x_{n+1-(m+k)} - x_{n-(m+k)}) \quad (4)$$

Из (4) и (1) следует, что

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= (-1)^{m+1} \left[ \sum_{k=0}^m C_m^k (q_1 + q_2)^{m-k+1} q_1^k (x_{n-(m+k)} - x_{n-1-(m+k)}) + \right. \\ &\left. + \sum_{k=0}^m C_m^k (q_1 + q_2)^{m-k} q_1^{k+1} (x_{n-1-(m+k)} - x_{n-2-(m+k)}) \right] = \end{aligned}$$



$$= (-1)^{m+1} \left[ \sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k (q_1 + q_2)^{m+1-k} q_1^k (x_{n+1-(m+1+k)} - x_{n-(m+1+k)}) \right].$$

Лемма доказана.

Очевидно, что для любого  $x_1, x_2, x_3 \in R$  верно неравенство

$$|x_n| \leq \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\} = M \langle +\infty, n \in N.$$

**Лемма 3.** Верно неравенство: при нечетном  $n$

$$|x_{n+1} - x_n| \leq 2M \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{C_{n-1}^k}{2} (q_1 + q_2)^{\frac{n-1}{2}-k} q_1^k = 2M(2q_1 + q_2)^{\frac{n-1}{2}},$$

при четном  $n$

$$|x_{n+1} - x_n| \leq 2M \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} \frac{C_{n-2}^k}{2} (q_1 + q_2)^{\frac{n-2}{2}-k} q_1^k = 2M(2q_1 + q_2)^{\frac{n-2}{2}}, n \geq 3$$

Из этой леммы следует, что при  $2q_1 + q_2 \langle 1$  имеем

$$|x_{n+1} - x_n| \leq 2M(2q_1 + q_2)^{\frac{n-2}{2}} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Очевидно, что  $2q_1 + q_2 \langle 1 \Leftrightarrow q_1 \langle q_3$ . Тогда верна

**Теорема.** Пусть  $q_i \geq 0, i = 1, 2, 3, q_1 + q_2 + q_3 = 1$ . Для сходимости последовательности

$x_n = q_1 x_{n-3} + q_2 x_{n-2} + q_3 x_{n-1}, n \geq 4, x_1, x_2, x_3 \in R$ , достаточно выполнения условия  $q_1 \langle q_3$ , при этом верно равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{q_1 x_1 + (q_1 + q_2) x_2 + x_3}{1 + 2q_1 + q_2}$$

Пусть  $z_1, z_2, z_3 \in C, q_1, q_2, q_3 \in C, q_1 + q_2 + q_3 = 1$  и

$$z_n = q_1 z_{n-3} + q_2 z_{n-2} + q_3 z_{n-1}, n \geq 4.$$

Аналогично действительному случаю имеем:

$$|z_{n-1} - z_n| \leq \begin{cases} (r|q_1| + |q_2|)^{\frac{n-2}{2}}, n - \text{четный}, \\ (2|q_1| + |q_2|)^{\frac{n-1}{2}}, n - \text{нечетный}, \end{cases}$$

$$n \geq 3, M = \max\{|z_1|, |z_2|, |z_3|\}.$$

Отсюда следует, что при  $2|q_1| + |q_2| < 1$  верно неравенство

$$|z_{n+1} - z_n| \leq 2M(2|q_1| + |q_2|)^{\frac{n-r}{2}}, n \geq 3$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_{n-1} - z_n) = 0.$$

Верна

**Теорема.** Пусть  $q_1 + q_2 + q_3 = 1$ . Для сходимости последовательности

$$z_n = q_1 z_{n-3} + q_2 z_{n-2} + q_3 z_{n-1}, n \geq 4 \quad z_1, z_2, z_3 \in C$$

достаточно выполнение  $2|q_1| + |q_2| < 1$ . При этом верно равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{q_1 z_1 + (q_1 + q_2) z_2 + z_3}{1 + 2q_1 + q_2}.$$

#### Литература

1. Ali M. Akhmedov and Rauf M. Babayev ON THE ITERATIVE SEQUENCES OF THE LINEAR BOUNDED OPERATORS AND APPLICATIONS, Bakı Universitetinin Xəbərləri. Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası, Bakı. 2020, s.5-11

## ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОГО РЕЕСТРА ДАННЫХ НА БАЗЕ .NET 9 И АРАСНЕ КАФКА ДЛЯ МИКРОСЕРВИСНЫХ АРХИТЕКТУР

**Бинаталиев Ибадулла Тельман оглы**

*(БГУ, факультет прикладной математики и кибернетики)*

*kronosxplay243@gmail.com*

**Резюме:** В данной работе рассматриваются вопросы разработки программного обеспечения распределённой реестровой системы с использованием платформы .NET 9 и технологии Apache Kafka. Предложенный авторами подход устраняет зависимость от сторонних блокчейн-платформ и обеспечивает высокоскоростной обмен данными.

**Ключевые слова:** распределенный реестр, .NET 9, Apache Kafka, микросервисы, целостность данных, SHA-256.

В рамках развития современных распределенных систем возникает потребность в создании механизмов аудита, которые гарантируют невозможность подмены данных [1]. Использование готовых блокчейн-платформ часто сопряжено с высокой сложностью интеграции и низким быстродействием. В данной работе предлагается архитектурное решение и

программная реализация собственного модуля «легковесного» распределенного реестра (Private Ledger), интегрированного в инфраструктуру микросервисов на базе .NET 9 и Apache Kafka.

Механизм обеспечения целостности. В предложенной системе брокер сообщений Apache Kafka выступает в роли транспортного уровня и упорядоченного хранилища событий. В отличие от традиционных систем очередей, Kafka позволяет хранить лог транзакций в неизменном виде (Immutable Log) [2]. Реализация логики «цепочки блоков» перенесена на уровень приложений:

1. Формирование блока. При обработке каждой транзакции микросервис на C# формирует структуру, включающую полезную нагрузку, временную метку и криптографический хеш текущего сообщения.
2. Связывание (Chaining). В структуру текущего сообщения записывается хеш-сумма предыдущего подтвержденного события, считанного из топика Kafka. Это создает непрерывную зависимость данных, где изменение любого элемента в прошлом приведет к невалидности всей последующей цепочки.
3. Консенсус по порядку. Использование партиционирования в Kafka гарантирует, что все потребители (Consumers) будут считывать и обрабатывать цепочку хешей в строго идентичном порядке [2].

Преимущества реализации на .NET 9. Выбор стека технологий обусловлен возможностями платформы по обработке высоконагруженных потоков данных:

- Использование высокопроизводительных типов `Span<byte>` и `Memory<byte>` для вычисления хешей SHA-256 без лишних аллокаций в памяти.
- Применение `IAsyncEnumerable` для асинхронного стриминга данных из Kafka, что минимизирует задержки (latency) при формировании реестра.
- Нативная интеграция с контейнеризированными средами, что упрощает развертывание реестра как отдельного инфраструктурного микросервиса.

Таким образом, в данной работе рассматриваются вопросы разработки программного обеспечения распределённой реестровой системы с использованием платформы .NET 9 и технологии Apache Kafka. Разработанный программный прототип демонстрирует, что реализация принципов блокчейна (криптографическая связность и неизменяемость лога) на базе брокера сообщений позволяет достичь производительности в де-

сятки тысяч транзакций в секунду. Это делает предложенный подход применимым в системах с высокими требованиями к скорости и надежности, где использование классических блокчейн-сетей технически нецелесообразно.

### **Литература**

1. Newman S. Building Microservices: Designing Fine-Grained Systems // O'Reilly Media. – 2015.
2. Shapira G., Palino T., Sivaram R., Petty K. Kafka: The Definitive Guide // O'Reilly Media. – 2017.

## **ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ В МОДЕЛИ ЗАГРЯЗЕНИЯ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ**

**Гамидов Сабир Иса оглы, Рзаева Айсель Тарлан гызы**  
(БГУ, факультет прикладной математики и кибернетики)  
*sabir818@yahoo.com, ayselrzayeva03@mail.ru*

**Резюме:** На уровне отдельных объектов и промышленных предприятий борьба с загрязнениями окружающей среды заключается в построении очистных сооружений, уменьшении выбросов вредных веществ в окружающую среду и прочих мероприятиях. Таким образом некоторая часть дохода промышленные предприятия вынуждены инвестировать на борьбу с загрязнением окружающей среды.

**Ключевые слова:** загрязнение окружающей среды, вредные вещества, мат. модели, основные фонды, траектории.

Построение эффективных математических моделей загрязнения окружающей среды на сегодняшний день является очень актуальной и важной задачей [1-4].

Введем следующие обозначения.

$x_i(t)$  — объем основных фондов  $i$ -го объекта ( $i = \overline{1, n}$ ),  $y_j(t)$  — показатель уровня загрязнения  $j$ -м видом вещества в момент  $t$ , ( $j = \overline{1, m}$ ),  $F_i(x_i, y)$  — производственная функция  $i$ -го предприятия ( $i = \overline{1, n}$ ), которая зависит только от  $x_i$  и от вектора  $y = (y_1, \dots, y_m)$ . Считается, что рабочая сила в предприятиях постоянно и не меняется, то есть,  $L_i = \text{const}$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Через  $P_i(x) = F_i(x_i(t), y(t))$  обозначим общий объем вы-

пуска  $i$ -го предприятия. Этот объем распределяется следующим образом:

$$P_i = F_i(x_i(t), y(t)) = I_i(t) + V_i(t) + C_i(t), \quad (i = \overline{1, n}).$$

где  $I_i(t)$  — инвестиции на расширение производства,  $C_i(t)$  — объем потребления,  $V_i(t)$  — средства выделяемое на борьбу с загрязнением.

Через  $V(t) = \sum_{i=1}^n V_i(t)$  обозначим общий объем средств, выделяемый на борьбу с загрязнением. Этот объем распределяется между предприятиями с помощью коэффициентов  $\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 1$ .

Через  $a_i(x_i(t), y(t))$  обозначим скорость выбытия основных фондов  $x_i(t)$  при заданном уровне загрязнения  $y(t)$ ,  $b_j$  ( $b_j > 0$ ) — скорость убывания  $j$ -го вида загрязнения в результате естественных причин,  $Q_j(x(t), y(t), V(t))$  означает повышение  $j$ -го вида уровня загрязнителя при заданных векторах  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ ,  $y(t)$  и  $V(t) = \sum_{i=1}^n V_i(t)$ .

Таким образом, модель задается следующими соотношениями:

$$\dot{x}_i = \alpha_i \sum_{k=1}^n (F_k(x_k, y) - C_k - V_k) - a_i(x_i, y), \quad (i = \overline{1, n}), \quad (1)$$

$$\dot{y}_j = Q_j(x, y, V) - b_j y_j, \quad (j = \overline{1, m}), \quad t \in [0, \infty), \quad (2)$$

при следующих ограничениях на управляющие  $\alpha_i, C_i, V_i$ :

$$\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \alpha_i \leq 1, C_i \geq \bar{C}_i \geq 0, V_i \geq 0, \quad (3)$$

$$C_i + V_i \leq F_i(x_i, y), \quad (i = \overline{1, n}), \quad (4)$$

Здесь  $\bar{C}_i$  — минимальный объем потребления по  $i$ -му продукту.

Эти модели характеризуются тем, что они могут быть представлены в виде дифференциального включения [1,3]

$$z' \in a(t), \quad t \in [0, \infty) \quad (5)$$

**Определение [3].** Траекторией (решением) системы (5) понимается непрерывная функция  $z(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))$ , удовлетворяющая на каждом конечном отрезке включению (5)

Пусть выполняются следующие условия:

1. При каждом  $z \in R^n$   $a(t)$  компактное множество в  $R^n$ .
2. Многозначное отображение  $a(t)$  непрерывно в метрике Хаусдорфа.
3. Система (5) имеет решение и каждое решение ограничено на  $[0, \infty)$ .
4. Если  $\dot{z}_k \in a(z_k)$ ,  $\lambda_k \geq 0$ ,  $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$  и  $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k z_k = 0$ , то существует такие  $\lambda_k \geq 0$ ,  $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$ , что

$$0 \in co a \left( \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k z_k \right),$$

(здесь  $co a$  — выпуклая оболочка множества  $a$ ).

Пусть  $z(t)$  является решением системы  $\dot{z}(t) \in a(z(t))$ .

Определим функционал

$$I(z(\cdot)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \inf u(z(t)) \quad (6)$$

Здесь  $u(t)$  — вогнутая функция. Этот функционал введен в [2].

**Определение [2].** Траектория  $z(t)$ , исходящая из точки  $z^0$ , называется асимптотически оптимальной, если она максимизирует функционал (6) среди всех траекторий, исходящих из  $z^0$ :

$$I(z(\cdot)) \rightarrow \max \quad (7)$$

**Лемма 1.** При  $n = 1$  из любой точки  $z^0$  исходит асимптотически оптимальная траектория.

**Лемма 2.** Пусть  $z(t)$  — любая траектория системы (5). Тогда

$$co l(z) \cap M \neq \emptyset.$$

**Теорема 1.** Пусть выполняется условие 1-4 и  $z^*(t)$  такая траектория, что  $I(t^*(\cdot)) = I^*$ . Тогда  $z^*(t)$  — асимптотически оптимальная траектория в задаче (5)-(7). Если дополнительно  $u(t)$  — строго вогнутая функция и  $M$  — выпуклое множество, то

$$z^*(t) \rightarrow z^*, t \rightarrow \infty.$$

**Заключение:** рассмотрена задача математического моделирования загрязнения окружающей среды. Модель описывается системой дифференциальных уравнений. Доказана теорема об асимптотике оптимальной траектории.

### Литература

1. Килер Э., Спенс М., Зекхаузер П. Оптимальный контроль над загрязнением окружающей среды. — В кн.: Математическая экономика. М.: Мир, 1974, с. 46-60.
2. Лагунов А.Н. Асимптотически-оптимальные траектории для вакуумных отображений. — В кн.: Оптимальные модели в системном анализе.
3. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. — М.: Наука, 1982.
4. Охрана окружающей среды: Модели управления чистотой природной среды. — М.: Экономика, 1977.

## **ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ**

**Гамидов Сабир Иса оглу, Исмаилов Мурад Гаджи оглу**

*(БГУ, Прикладная математика и кибернетика)*

*ismayilzaaada@gmail.com*

**Резюме:** В данной работе рассматривается задача исследования и синтеза систем оптимального управления с переменной структурой, функционирующих в условиях временного запаздывания. Проводится глубокий анализ математических моделей, описываемых дифференциально-разностными уравнениями с разрывной правой частью, что характерно для систем со скользящими режимами.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, переменная структура, запаздывание, скользящий режим, дифференциально-разностные уравнения, принцип максимума, устойчивость, функционал качества.

Современные задачи автоматизации требуют высокой точности управления в условиях неопределенности и внешних возмущений. Особую сложность представляют системы с запаздыванием, где наличие временного запаздывания в контуре обратной связи может привести к потере устойчивости. Одним из наиболее эффективных инструментов для таких систем являются системы с переменной структурой (СПС), способные переходить в скользящий режим.

В работе рассматривается динамический объект, поведение которого подчинено дифференциально-разностным уравнениям с отклоняющимся аргументом. Основная математическая сложность заключается в том, что текущее изменение состояния объекта зависит не только от действующих сил в данный момент, но и от ретроспективных данных системы. В качестве регулирующего воздействия выбрано разрывное управление. Ключевая задача исследования состоит в синтезе такого закона переключения, который минимизирует заданный функционал качества и гарантирует перевод системы на поверхность переключения, обеспечивая её устойчивое движение в скользящем режиме.

Особое внимание в работе уделяется исследованию нелинейности системы, возникающей в моменты переключения структур. Наличие запаздывания означает, что система обладает бесконечномерным пространством состояний, так как для определения её будущего поведения необходимо знать значения переменной состояния на всем предшествующем интервале. Это накладывает дополнительные требования к вычис-

лительной мощности алгоритмов управления и точности датчиков обратной связи.

Согласно классической теории скользящих режимов, развитой В. И. Уткиным [1], управление синтезируется таким образом, чтобы фазовая траектория принудительно направлялась к поверхности переключения. При наличии запаздывания математический аппарат требует интеграции методов теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Как показано в работах Л. Э. Эльсгольца [2], устойчивость таких систем напрямую зависит от выбора функционала, учитывающего состояние системы на интервале предыстории, определяемом величиной запаздывания.

Для оптимизации процесса управления применяется принцип максимума, адаптированный для систем с последствием. В соответствии с фундаментальными положениями Л. С. Понтрягина [3], необходимое условие оптимальности требует учета сопряженной системы уравнений, также содержащей запаздывающий аргумент, что усложняет аналитическое решение и требует применения численных методов.

В рамках исследования анализируется метод "эквивалентного управления", предложенный для того, чтобы исключить высокочастотные колебания (эффект чаттеринга), которые часто возникают в реальных физических системах с задержкой. Применение функционалов Ляпунова — Красовского позволяет не только гарантировать устойчивость, но и оценить границы допустимого запаздывания, при которых система сохраняет свои качественные характеристики. Синтез управления проводится с учетом того, что переключающая функция должна обеспечивать устойчивость движения системы в скользящем режиме вдоль заданной гиперплоскости.

В ходе исследования установлено, что применение переменной структуры позволяет компенсировать дестабилизирующее влияние запаздывания за счет инвариантности скользящего режима к определенным классам возмущений. Использование функционалов Ляпунова-Красовского позволяет гарантировать асимптотическую устойчивость системы в окрестности поверхности переключения.

Научная ценность полученных результатов заключается в обосновании возможности применения переменной структуры для компенсации достаточно больших величин запаздывания, которые ранее считались критическими для устойчивости. Полученные данные могут служить теоретической базой для разработки программного обеспечения



систем управления сложными техническими объектами, работающими в условиях нестационарной среды и сетевых задержек передачи данных.

### **Литература**

1. Уткин В. И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1981. — 368 с. (Основополагающий труд по теории систем с переменной структурой).
2. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971. — 296 с. (Базовый источник по математическому описанию систем с запаздыванием).
3. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1988. — 392 с. (Главный источник по принципу максимума и условиям оптимальности).

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ**

**Гасымов Эльмага Агагасым, Гасанли Назрин Хасрат**  
(БГУ, механико-математический факультет)  
*gasymov-elmagha@rambler.ru, hasanli\_nazrin074@mail.ru*

**Аннотация:** В данной работе проводится подробный анализ методических подходов к обучению решению тригонометрических уравнений и их систем. Рассматриваются психолого-педагогические аспекты усвоения материала, типичные ошибки учащихся при преобразовании тригонометрических выражений и предлагается система упражнений для формирования прочных навыков отбора корней. Исследование направлено на оптимизацию процесса обучения в соответствии с современными образовательными стандартами.

**Ключевые слова:** тригонометрические уравнения, системы уравнений, методика преподавания, тригонометрический круг, отбор корней, дидактические принципы.

Тригонометрия традиционно считается одним из наиболее сложных разделов школьного курса математики [1; 2; 6]. Это обусловлено высокой степенью абстракции понятий, многообразием формул и спецификой периодических функций. Актуальность темы исследования продиктована необходимостью поиска новых методических путей, которые позволили бы учащимся не просто заучивать алгоритмы, а осознанно приме-

нять их в нестандартных ситуациях, что крайне важно для подготовки к инженерным дисциплинам [2; 4].

### **Методические трудности при изучении тригонометрии**

Основная трудность при решении тригонометрических уравнений заключается в переходе от тригонометрической функции к аргументу. Часто учащиеся забывают о периодичности или неправильно интерпретируют область допустимых значений (ОДЗ) [6]. В ходе исследования были выделены следующие группы типичных ошибок:

1. Потеря корней при делении обеих частей уравнения на выражение, содержащее переменную.
2. Появление посторонних корней из-за расширения ОДЗ в процессе возведения в квадрат или использования универсальной тригонометрической подстановки.
3. Ошибки при записи общей серии решений и непонимание сущности параметра  $k \in \mathbb{Z}$  [7].

### **Системный подход к решению тригонометрических систем**

Особое место в работе уделено системам тригонометрических уравнений. В отличие от стандартных алгебраических систем, здесь требуется сочетание методов исключения переменных и специфических тригонометрических приемов [3]. Мы выделяем три основных типа систем:

- **Системы, в которых одно из уравнений является алгебраическим.** Здесь наиболее эффективен метод подстановки.
- **Системы, содержащие суммы или произведения функций.** Используются формулы преобразования произведения в сумму.
- **Симметричные системы.** Требуют введения новых переменных для упрощения структуры.

### **Методика отбора корней и визуализация**

Одной из центральных проблем является обучение учащихся грамотному отбору корней. Нами предлагается использовать три основных способа, опираясь на принцип наглядности:

1. **Арифметический способ:** последовательная подстановка значений параметра.
2. **Алгебраический способ:** решение неравенств относительно параметра, что считается наиболее строгим методом.
3. **Геометрический способ:** использование единичной окружности. Визуальное представление функций и их пересечений развивает пространственное мышление.

### **Использование информационных технологий и геймификация**

В современной школе внедрение цифровых инструментов (GeoGebra, Desmos) позволяет учащимся самостоятельно анализировать поведение функций и исследовать периодичность [3]. Элементы геймификации, такие как тематические квизы и командные соревнования, способствуют повышению уровня успешности решения заданий, который, согласно апробации, может вырасти на 25%.

### **Заключение**

Эффективность обучения напрямую зависит от реализации принципа системности. Предложенные рекомендации позволяют структурировать материал так, чтобы учащиеся овладели не только техническими приемами, но и стратегическим мышлением [5]. Предложенные подходы могут быть адаптированы как для очного, так и для дистанционного обучения.

### **Литература**

1. Колмогоров А.Н., Абрамов А.М. и др. Алгебра и начала анализа. 10–11 классы. — М.: Просвещение, 2021.
2. Морозов И.С. Методика преподавания математики в средней школе. — М.: Академия, 2020.
3. Семакин И.Г., Шестакова Л.А. Цифровые технологии в образовании. — М.: БИНОМ, 2022.
4. Выготский Л.С. Педагогическая психология. — М.: Айрис-пресс, 2020.
5. Шлыкова Т.А. Развитие математической интуиции у школьников. // Математика в школе, 2023, № 2.
6. Иванова Е.В. Геймификация в обучении математике. // Современная школа, 2024, № 5.
7. Потапов М.К., Олехник С.Н. Тригонометрические уравнения и неравенства. — М.: Физматлит, 2015.

## **МЕТОДЫ ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ К ЗАДАЧАМ МАТЕМАТИКИ**

**Гасымов Элимага Агагасым оглы, Керимова Арифа Мазахир гызы**

*(БГУ, механико-математический факультет)*

*gasymov-elmagha@rambler.ru, kerimovaarifa79@gmail.com*

**Аннотация:** В данной статье рассматриваются основные методы применения интегралов к задачам математики. Описаны ключевые приложения определённого и неопределённого интегралов: вычисление площадей плоских фигур, длин кривых, объёмов тел вращения, а также использование интегрирования при решении дифференциальных уравнений. Приведены конкретные математические

формулы и примеры. Статья предназначена для студентов высших учебных заведений, изучающих математический анализ, а также для преподавателей и всех, кто интересуется прикладными аспектами интегрального исчисления.

**Ключевые слова:** интеграл, определённый интеграл, неопределённый интеграл, площадь фигуры, длина дуги, объём тела вращения, первообразная, методы интегрирования, приложения интегрального исчисления.

### **Вычисление площадей плоских фигур**

Одним из классических применений определённого интеграла является нахождение площади плоской фигуры. Если функция  $f(x)$  неотрицательна и непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то площадь фигуры, ограниченной графиком функции, осью абсцисс и вертикальными прямыми  $x = a$  и  $x = b$ , вычисляется по формуле:  $S = \int [a; b] f(x) dx$ . В случае, когда необходимо найти площадь между двумя кривыми  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$ , где  $f(x) \geq g(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , применяется формула  $S = \int [a; b] (f(x) - g(x)) dx$ . Этот метод широко используется при решении задач планиметрии, а также в физике при расчёте работы переменной силы[1].

### **Вычисление длин кривых**

Интеграл позволяет вычислять длину дуги гладкой кривой. Для функции  $y = f(x)$ , непрерывно дифференцируемой на  $[a, b]$ , длина дуги определяется формулой:  $L = \int [a; b] \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ . Для параметрически заданных кривых  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [t^1, t^2]$ , длина дуги вычисляется как  $L = \int [t^1; t^2] \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ . Данный метод особенно полезен при работе с кривыми, заданными уравнениями, которые неудобно выразить в явном виде[2].

### **Объёмы тел вращения**

Интегральное исчисление является основным инструментом для нахождения объёмов тел, образованных вращением плоской фигуры вокруг координатной оси. При вращении фигуры вокруг оси  $Ox$  объём тела вычисляется по методу дисков:  $V = \pi \cdot \int [a; b] (f(x))^2 dx$ . Метод цилиндрических оболочек при вращении вокруг оси  $Oy$  даёт формулу  $V = 2\pi \cdot \int [a; b] x \cdot f(x) dx$ . Оба метода активно применяются в геометрии, механике и инженерных расчётах при определении характеристик деталей машин, сосудов и других объектов вращательной симметрии[3].

### **Применение интегралов в дифференциальных уравнениях**

Неопределённый интеграл является ключевым инструментом при

решении обыкновенных дифференциальных уравнений методом разделения переменных. Для уравнения вида  $dy/dx = f(x)/g(y)$  решение находится путём интегрирования обеих частей:  $\int g(y)dy = \int f(x)dx$ . Нахождение первообразных позволяет получить общее решение, а задание начального условия — частное решение. Помимо разделения переменных, интегральные операторы применяются в методе вариации произвольной постоянной, методе Лапласа, а также при построении решений краевых задач с использованием функций Грина. Всё это демонстрирует глубокую связь между теорией интегрирования и теорией дифференциальных уравнений[4].

### **Литература**

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. — СПб.: Лань, 2025. — Т. 2. — 800 с.
2. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — СПб.: Лань, 2024. — 624 с.
3. Зорич В. А. Математический анализ: в 2 ч. — М.: МЦНМО, 2019. — Ч. 1. — 564 с.
4. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. Т. 1. — М.: Физматлит, 2008. — 400 с.
5. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. — М.: Юрайт, 2019. — 402 с.

## **ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ, СОДЕРЖАЩИЙ СЛУЧАЙНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ**

**Джафарли Юсиф Ариф**

*(БГУ, Факультет прикладной математики и кибернетики)*

*jafarliys@gmail.com*

**Резюме :** Рассматривается смешанная задача для уравнения колебаний конечной струны [1] изготовленной из сплава стали со случайными физическими характеристиками. Проводится стохастический анализ решения задачи для случайного вектора параметров имеющих равномерное распределение в технически допустимых интервалах. Получены аналитические формулы и 3D графики математического ожидания и дисперсии решение задачи при случайно генерированных значениях параметров.

**Ключевые слова:** колебания струны, сплав стали, стационарный процесс, математическое ожидание, дисперсия, пакет Maple.

**Постановка задачи :** В работе исследуется смешанная задача для уравнения колебания струны ( $L=10$ ) с членом вязкого трения (диссипации), изготовленной из сплава стали

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(u(x,t)) = a \times \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u(x,t)) - b \times \frac{\partial}{\partial t}(u(x,t));$$

$$t > 0, 0 < x < 10, u(x,0) = \sin(\pi x), u_t(x,t)|_{t=0} = 0, u(0,t) = 0, u(10,t) = 0$$

Где  $a=N/\rho$  – отношение натяжения на линейную плотность,  $b = \beta/(2\rho)$  – отношение коэффициента сопротивления на удвоенную линейную плотность, вектор параметров  $(a,b)$  является случайным.

**Цель исследования:** Получить аналитические формулы для математического ожидания и дисперсии решения поставленной задачи.

**Гипотезы исследования :** Предполагается, что  $a$  и  $b$  независимы и имеют равномерное распределение:  $a' \sim U[25,26]$ ;  $b \sim U[0.007,0.05]$  (для большинства сплавов стали

$a \approx 25.5 \text{ GPa}$  – гигапаскаль ( $\text{г/см}^3$ )).

**Методы исследования:** Проводится случайная выборка (генерирование) параметров

$a$  и  $b$ . Для этих генерированных значениях используя метод Фурье находится решение смешанной задачи.

**Основные этапы :**

1) Генерация значений для параметров:

- $a = \text{GenerateUniform}(10,25,26)$  ;
- $b = \text{GenerateUniform}(10,0.007,0.05)$  ;

2) При выше генерированных значениях параметров в аналитическом выражении решения задачи выполнены стохастические исследования сечений случайного колебательного процесса ; найдены формулы, построены 3D-графики математического ожидания и дисперсии по области

$$(x, t) \in [0,10] \times [0,120].$$

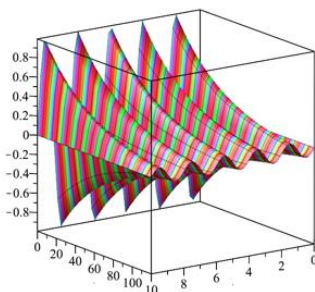
- $\text{assume}(d^4 - 4 \cdot \pi^2 \cdot c^2 < 0)$ ;
- $\text{pde1} := \text{diff}(u(x,t), t^2) = c^2 \cdot \text{diff}(u(x,t), x^2) - d^2 \cdot \text{diff}(u(x,t), t)$  ;  $\text{ibc1} := u(x,0) = \sin(\pi x)$  ;  $D[2](u)(x,0) = 0$  ;  $u(0,t) = 0$  ;  $u(10,t) = 0$  ;
- $U := \text{unapply}(\text{simplify}(\text{pdsolve}([\text{pde1}, \text{ibc1}]), x, t))$  ;
- $\text{simplify}(\text{subs}(\sqrt{4 \cdot \pi^2 \cdot c^2 - d^4} = \alpha, \text{convert}(U(x, t), \text{trig})))$  ;

$$u(x,t) = \frac{\sin(\pi x) \left( \cosh\left(\frac{d^2 t}{2}\right) - \sinh\left(\frac{d^2 t}{2}\right) \right) \times \left( \sin\left(\frac{\alpha t}{2}\right) d^2 + \cos\left(\frac{\alpha t}{2}\right) \alpha \right)}{\sqrt{4 \pi^2 c^2 - d^4}}$$

где  $c^2 \equiv a$ ,  $d^2 \equiv b$ ;  $\alpha \equiv \sqrt{4 \pi^2 c^2 - d^4}$

- $C := \text{array}(1..S) := \text{array} : S := \text{array}(1..10) : PS := \text{array}(1..10) : SD := \text{array}(1..10)$ ;

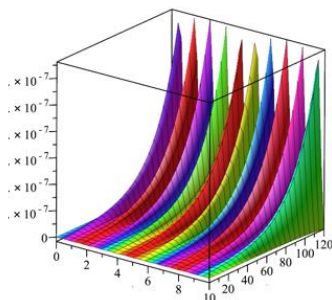
- for k from 1 to 10 do  $C[k] := \sqrt{-b[k]^2 + 4 \cdot \pi^2 \cdot a[k]}$  od:
- for k from 1 to 10 do  $S[k] := \text{unapply}((\sin(\pi \cdot x) / C[k]) \cdot (\cosh(b[k] \cdot t/2) - \sinh(b[k] \cdot t/2)) \cdot (b[k] \cdot \sin(C[k] \cdot t/2) + C[k] \cdot \cos(C[k] \cdot t/2)), x, t)$  : od:
- 3) На основе формулы моментов функции от случайного вектора (a, b), определяем м.о. и дисперсию случайной функции-решения  $S[3]$ .
- $ES := \text{unapply}(\text{simplify}(\text{int}(\text{int}(S[3](x, t, xc, xd) \cdot fcd(xc, xd), xc=25, xd=0.007..0.05)), x, t))$  :
- $ES := (x, t) \rightarrow \sin \cdot (\sin(15.89029888 \cdot t) - (15.89029888 \cdot f) - (0.001320523916 \cdot \cosh(0.02098351968 \cdot t) - \cosh(0.02098351968 \cdot t) - \sinh(0.001320523916 \cdot \sinh(1968 \cdot t)))$
- $\text{plot3d}(ES(x, t), x=0..10, t=0..120, \text{color}=\sin(t))$  ;



- $MS2 := \text{unapply}(\text{simplify}(\text{int}(\text{int}(S[3](x, t, xc, xd)^2 \cdot fcd(xc, xd), xc=25..26, xd=0.007..0.05)), t))$  ;
- $DS := \text{unapply}(\text{simplify}((MS2(x, t) - ES(x, t))^2), x, t)$  ;

$$DS = (x, t) \mapsto ((-1.633174 \cdot 10^{-9} - 5.4 \cdot 10^{-14} \cdot \cos(15.89029888 \cdot t) - 1.4 \cdot 10^{-11} \cdot \sin(15.89029888 \cdot t)) \cdot \cos(3.141592654 \cdot x)^2 + 5.4 \cdot 10^{-14} \cdot \cos(15.89029888 \cdot t)^2 + 1.633174 \cdot 10^{-9} + 1.4 \cdot 10^{-11} \cdot \sin(15.89029888 \cdot t) \cdot \cosh(0.02098351968 \cdot t)^2 + ((1.2 \cdot 10^{-14} \cdot \cos(15.89029888 \cdot t)^2 + 1.4 \cdot 10^{-11} \cdot \sin(15.89029888 \cdot t) - 1.6 \cdot 10^{-8}) \cdot \sinh(0.02098351968 \cdot t) \cdot \cos(3.141592654 \cdot x)^2 + (1.5566826 \cdot 10^{-8} - 1.4 \cdot 10^{-11} \cdot \sin(15.89029888 \cdot t) - 1.2 \cdot 10^{-14} \cdot \cos(15.89029888 \cdot t)^2) \cdot \sinh(0.02098351968 \cdot t) \cdot \cosh(0.02098351968 \cdot t) + (2.7 \cdot 10^{-14} \cdot \cos(15.89029888 \cdot t)^2 + 6 \cdot 10^{-12} \cdot \sin(15.89029888 \cdot t) + 5.16587 \cdot 10^{-10}) \cdot \cos(3.141592654 \cdot x)^2 - 6 \cdot 10^{-12} \cdot \sin(15.89029888 \cdot t) - 2.7 \cdot 10^{-14} \cdot \cos(15.89029888 \cdot t)^2 - 5.16587 \cdot 10^{-10})$$

- $\text{plot3d}(DS(x, t), x=0..10, t=0..120, \text{color}=\sin(x))$



### Литература

1. Голоскоков Д.П., Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple, 2004, 539 с.

## **КОРРЕЛЯЦИОННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ БЕСКОНЕЧНОЙ СТРУНЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ ДЕФЕКТАМИ**

**Джафарли Юсиф Ариф**

*(БГУ, Факультет прикладной математики и кибернетики)*

*jafarliys@gmail.com*

**Резюме:** В работе исследуются колебания бесконечной струны со случайными дефектами [2] её изготовления; начальные функции принимаются стационарными случайными функциями с известными корреляционными функциями. Получена аналитическая формула для корреляционной функции решения задачи Коши; построены таблицы и 3D – графики с помощью составленной программы в пакете Maple [1].

**Ключевые слова:** колебания струны, корреляционная функция, стационарный процесс, пакет Maple.

**Постановка задачи:** Рассматривается задача Коши для волнового уравнения :

$$U_{tt}(x,t) = a^2 U_{xx}(x,t), \quad t > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \\ U(x,0) = \varphi_1(x), \quad U_t(x,0) = \varphi_2(x),$$

где  $a$  – случайная величина,  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$  – независимые случайные начальные функции.

**Цель исследования:** Получить формулу для корреляционной функции решения задачи.

**Гипотезы исследования:** Предполагается, что

- 1) Струна изготовлена со случайными дефектами :  $a^2 = a_0^2 + \varphi_3(x)$ , где  $a_0 = \text{const}$ ,  $\varphi_3(x)$  – случайная функция с нулевым математическим ожиданием, большие значения ординат которой имеют весьма малую вероятность ;
- 2)  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$  и  $\varphi_3(x)$  – стационарные, корреляционные функции которых заданы:  $K \varphi_1(\tau), K \varphi_2(\tau), K \varphi_3(\tau)$ ;  $\tau \equiv x_2 - x_1$

**Методы исследования:** Решение задачи ищется в виде  $U(x,t) = U_0(x,t) + U_1(x,t)$ , где  $U_0(x,t)$  – решение задачи с коэффициентом  $a_0$ . Тогда при допущенных ограничениях,  $U_1(x,t)$  является решением уравнения

$$U_{1,tt}(x,t) - a_0^2 U_{1,xx}(x,t) = \varphi_3(x) \times U_{0,xx}(x,t)$$

**Основные этапы :**

- 1) Получены формулы для корреляционных функций  $U(x,t)$   $U_1(x,t)$  :



$$KU_0(x_1, x_2; t) = \frac{1}{2} K\varphi_1(\tau) + \frac{1}{2} [K\varphi_1(\tau + 2a_0t) + K\varphi_1(\tau - 2a_0t)] + \frac{1}{4a_0^2} \int_{-a_0t}^{a_0t} \int_{-a_0t}^{a_0t} K\varphi_2(\tau + y_2 - y_1) dy_1 dy_2.$$

$$KU_1(x_1, x_2; t) = \frac{1}{4a_0^2} E \left\{ \int_0^t \int_{x_1+a_0(t-t_1')}^{x_1+a_0(t-t_1'')} \varphi_3(y_1 - a_0t_1') \times \frac{\partial^2 U_0(y_1, t_1')}{\partial y_1^2} dy_1 dt_1' \right. \\ \left. \times \int_0^t \int_{x_2-a_0(t-t_2')}^{x_2+a_0(t-t_2'')} \varphi_3(y_2 - a_0t_2') \times \frac{\partial^2 U_0(y_2, t_2')}{\partial y_2^2} dy_2 dt_2' \right\}$$

2) В математическом пакете Maple составлена программа для исследования этих корреляционных функций ; при

$$K\varphi_1(\tau) = \exp(-0,1 \tau^2), K\varphi_2(\tau) = \exp(-0,2 \tau^2)$$

получена аналитическая формула

**KU0:=unapply(simplify(KF1(x2-x1)/2+(KF1(x2-x1+2\*a\*t)+KF1(x2-x1-2\*a\*t))/2+(1/4)\*int(int(KF2(x2-x1+y2-y1),y1=-a\*t..a\*t),y2=-a\*t..a\*t)),x1,x2,t,a);**

$$KU0 := (x1, x2, t, a) \mapsto 0.6250000000 \cdot e^{-0.2 \cdot (2 \cdot a \cdot t - x1 + x2)^2} + 0.5000000000 \cdot e^{-0.1 \cdot (2 \cdot a \cdot t - x1 + x2)^2} + 0.6250000000 \cdot e^{-0.2 \cdot (2 \cdot a \cdot t + x1 - x2)^2} + 0.5000000000 \cdot e^{-0.1 \cdot (2 \cdot a \cdot t + x1 - x2)^2} + (0.9908318245 \cdot a \cdot t + 0.4954159122 \cdot x1 - 0.4954159122 \cdot x2) \cdot \operatorname{erf}(0.8944271910 \cdot a \cdot t - 0.4472135955 \cdot x2 + 0.4472135955 \cdot x1) + (0.9908318245 \cdot a \cdot t - 0.4954159122 \cdot x1 + 0.4954159122 \cdot x2) \cdot \operatorname{erf}(0.8944271910 \cdot a \cdot t + 0.4472135955 \cdot x2 - 0.4472135955 \cdot x1) - 1.2500000000 \cdot e^{-0.2 \cdot (x1 - x2)^2} + 0.5000000000 \cdot e^{-0.1 \cdot (x1 - x2)^2} + (-0.9908318245 \cdot x1 + 0.9908318245 \cdot x2) \cdot \operatorname{erf}(-0.4472135955 \cdot x2 + 0.4472135955 \cdot x1)$$

Корреляционная матрица при  $a_0 = 1; 2; 3; 4; 5$  и  $t = 1; 2; 3; 4; 5$  :

**A:=array(1..5,1..5):**  
**for m from 1 to 5 do for n from 1 to 5 do A[m,n]:=KU0(1,2,n,m) od**  
**od;**  
**convert(A,matrix);**

$$\begin{bmatrix} 1.865812806 & 3.185855520 & 4.950522133 & 6.890961462 & 8.868903049 \\ 3.185855520 & 6.890961462 & 10.85041496 & 14.81373945 & 18.77706676 \\ 4.950522133 & 10.85041496 & 16.79540310 & 22.74039404 & 28.68538500 \\ 6.890961462 & 14.81373945 & 22.74039404 & 30.66704864 & 38.59370324 \\ 8.868903049 & 18.77706676 & 28.68538500 & 38.59370324 & 48.50202148 \end{bmatrix}$$

$$3D - (x1 = x, x2 = 2x, a = 1) \quad (x1 = x, x2 = 2x, a = 2)$$

А также построены 3D – поверхности для различных значений  $a_0$ .

### Литература

1. S.Cyganowski, P.Kloeden, J.Ombach, From elementary probability to stochastic differential equations with Maple, Springer, Berlin, 2002, 324 p. 2) G.R.Gasimov, A.M.Aliyev, Probability characteristics of the solution of a telegraph equation on a infinite wire made with random defects, COİA, Baku, 2020, v.1, pp 74-76

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ-НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

**Зейналлы Субхийя Маммад кызы**  
(*GDU, Riyaziyyat və informatika fakültəsi*)  
*zeynallisubhiyya@gmail.com*

**Резюме:** В работе рассматривается некорректная задача Коши-Неймана для эллиптического уравнения второго порядка при применении метода Фурье, имеет единственное обобщенное решение.

**Ключевые слова:** некорректная задача, метода Фурье, функционал, уравнение, производная, множество, поверхность.

### 1. Постановка задачи

В цилиндре  $Q_T = \Omega \times (0, T)$  рассматривается краевая задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Au = 0, (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu_A} \right|_{S_T} = 0, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi_0(x), \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi_1(x), \quad x \in \Omega. \quad (3)$$

Здесь  $\Omega \subset R^n$  - ограниченная область в  $R^n$  с гладкой границей  $\Gamma$ ,  $S_T = \Gamma \times (0, T)$  - боковая поверхность цилиндра  $Q_T$ ,  $f \in L_2(Q_T)$ ,  $\varphi_0 \in W_2^1(\Omega)$ ,  $\varphi_1 \in L_2(\Omega)$  - заданные функции;

$$Au \equiv \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - a_0(x)u,$$

причем  $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$ ,  $\forall \xi \in R^n$  и для всех  $x \in \overline{\Omega}$

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \alpha = \text{const} > 0,$$

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad a_0(x) \geq \alpha > 0;$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i) - \text{конормальная производная, } \nu - \text{внешняя}$$

нормаль к границе  $\Gamma$  области  $\Omega$ .

Предполагается, что  $\frac{\partial u(x, T)}{\partial t} \in U_\partial$ , где  $U_\partial$  - выпуклое замкну-

тое множество из  $L_2(\Omega)$ , которое содержит в себе нуль пространства  $L_2(\Omega)$ . Известно, что задача (1)-(3) является некорректно поставленной [1,3].

Задаче (1)-(3) поставим в соответствие следующую задачу оптимального управления: найти минимум функционала

$$J(\mathbf{V}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [u(x, 0) - u_0(x)]^2 dx, \quad (4)$$

в  $U_\partial$  при ограничениях (1) и (2)

Как известно, в теории оптимального управления задача (4), (1), (2) также является некорректной [4].

Отметим, что при  $f \in L_2(Q_T)$ ,  $\varphi_1 \in L_2(\Omega)$ ,  $\mathbf{V} \in L_2(\Omega)$  граничная задача (1), (2), (5) имеет единственное обобщенное решение из  $W_2^1(Q_T)$  [2].

### Литература

1. Искендеров А.Д. Об одной обратной задаче для квазилинейных параболических уравнений // Дифференц. уравнения, 1974, т.10, №5, с.890-898.
2. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сиб. науч. изд-во, 2009, 457 с.
3. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1969, 67 с.
4. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 408 с.

## **НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, ЛИНЕЙНОЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ФАЗОВОЙ КООРДИНАТЫ**

**Исламова Назрин Натик кызы**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*ibragim\_va03@mail.ru*

**Аннотация:** в работе рассматривается одна задача оптимального управления, линейная относительно фазовой координаты. Получен представление рассматриваемой задачи с помощью которого в дальнейшем найдены некоторые необходимые условия оптимальности. Далее получены необходимые и достаточные условия оптимальности в линейной задаче с линейным терминальным функционалом, а также доказано достаточное условие оптимальности в случае выпуклости функционала качества.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, принцип максимума, оптимальное управление, необходимые и достаточные условия оптимальности.

Предположим, что задано дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-h) + f(t), \quad t \in T = [t_0, t_1] \quad (1)$$

с краевым условием

$$x(t) = a(t), \quad t \in [t_0 - h, t_0]. \quad (2)$$

Здесь  $A(t)$  и  $B(t)$  – заданные  $n \times n$  – мерные непрерывные матричные функции,  $f(t)$  и  $a(t)$  заданные  $n$ -мерные непрерывные функции,  $h > 0$  постоянное запаздывание.

Используя известные факты [1,2], с помощью матрицы Коши доказывается, что задача (1)-(2) имеет следующее представление

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0-h}^{t_0} \Phi(x, \tau+h)B(\tau+h)a(\tau)d\tau + \int_{t_0}^t \Phi(x, \tau)f(\tau)d\tau. \quad (3)$$

Здесь матричная функция  $\Phi(t, \tau)$  является решением следующей задачи:

$$\begin{aligned} \Phi_t(t, \tau) &= -\Phi(t, \tau)A(\tau) - \Phi(t+h)B(\tau+h), \quad t_0 \leq \tau \leq t-h, \\ \Phi_t(t, \tau) &= -\Phi(t, \tau)A(\tau), \quad t-h \leq \tau \leq t, \\ \Phi(t, t) &= E, \end{aligned}$$

где  $E$  –  $n \times n$  мерная единичная матрица.

Далее рассматриваем линейную задачу оптимального управления, описываемую системой одномерных дифференциальных уравнений с

запаздыванием

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-h) + f(t, u(t)), \quad t \in T, \quad (4)$$

$$x(t) = a(t), \quad t \in [t_0 - h, t_0] = E_{t_0}. \quad (5)$$

Здесь  $x(t)$   $n$ -мерная вектор-функция, имеющая запаздывание на отрезке  $T = [t_0, t_1]$ ,  $A(t)$ ,  $B(t)$  заданные  $(n \times n)$  мерные непрерывные матричные функции,  $h > 0$  заданное постоянное, показывающее запаздывание,  $f(t, u)$  – заданная,  $n$ -мерная непрерывная вектор-функция, а  $u(t)$   $r$ -мерная кусочно-непрерывная и имеющая конечное число точек разрыва первого рода управляющая вектор-функция, принимающая свои значения из непустого и ограниченного множества  $U \in R^r$ , т.е.

$$u(t) \in U \in R^r, \quad t \in T. \quad (6)$$

На решениях, соответствующих всем допустимым управлениям рассматриваемой задачи определим линейный функционал

$$J(u) = c'x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} d'(x)x(t) dt. \quad (7)$$

Здесь  $c$ -заданный постоянный вектор,  $d(x)$  – заданный  $n$ -мерный непрерывный вектор.

Используя аналог метода приращений доказывается следующее утверждение

**Теорема 1.** Для оптимальности допустимого управления  $u(t)$  в рассматриваемой задаче оптимального управления с запаздыванием (4)-(7) необходимо и достаточно, чтобы неравенство

$$\int_{t_0}^{t_1} [H(t, \bar{u}(t), p(t)) - H(t, u(t), p(t))] dt \leq 0$$

выполнялось для всех  $u(t) \in U, t \in T$ .

Здесь

$$H(t, u, p) = p'f(t, u)$$

аналог функции Гамильтона-Понтрягина [3,4], а вектор-функция  $p(t)$  является решением следующей задачи:

$$\dot{p}(t) = -A'(t)p(t), \quad t_1 - h \leq t \leq t_1, \quad (8)$$

$$\dot{p}(t) = -B'(t)p(t) - B'(t+h)p(t+h), \quad t_0 \leq t \leq t_1 - h,$$

$$p(t_1) = -c. \quad (9)$$

Задача (8)-(9) называется сопряженной задачей.

Далее рассматривается следующая задача о минимуме функционала

$$J(u) = G(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} \varphi(x(t)) dt, \quad (10)$$

при ограничениях

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-h) + f(t, u(t)), t \in T = [t_0, t_1], \quad (11)$$

$$x(t) = a(t), t \in [t_0 - h, t_0]. \quad (12)$$

Здесь  $A(t), B(t)$  заданные и непрерывные  $(n \times n)$  мерные матричные функции,  $f(t, u)$  – непрерывная по совокупности аргументов вектор-функция,  $a(t)$  – заданная непрерывная вектор-функция,  $h = \text{const} > 0$  заданный постоянный вектор,  $G(x)$  и  $\varphi(x)$  – заданные непрерывно-дифференцируемые и выпуклые функции,  $u(t)$  –  $r$  мерная кусочно-непрерывная управляющая вектор-функция, такая, что принимает свои значения непустого и ограниченного множества  $U$ , т.е.

$$u(t) \in U \in R^r, t \in T = [t_0, t_1]. \quad (13)$$

Вектор-функция с вышеприведенными ограничениями назовем допустимым управлением.

Введя аналог Гамильтониана следующим образом

$$H(t, u, p) = p' f(t, u),$$

и учитывая, что вектор-функция  $p(t)$  является решением задачи

$$\dot{p}(t) = -A'(t)p(t) - p(t+h)B'(t+h) + \varphi_x, \quad t_0 \leq t \leq t_1 - h,$$

$$\dot{p}(t) = -A'(t)p(t) + \varphi_x, \quad t_1 - h \leq t \leq t_1,$$

$$p(t_1) = -G_x(x(t_1)),$$

доказывается

**Теорема 2.** Если скалярные функции  $\varphi(x)$  и  $G(x)$  дифференцируемые и выпуклы, то для оптимальности допустимого управления  $u^0(t)$  в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы неравенство

$$\int_{t_0}^{t_1} [H(t, \bar{u}(t), p(t)) - H(t, u(t), p(t))] dt \leq 0 \quad (14)$$

выполнялось для всех допустимых управлений  $u(t)$ .

Так как допустимое управление  $u(t)$  произвольная, его специальное приращение определим по формуле

$$\Delta u_\varepsilon(t) = \begin{cases} u, & t \in [\xi, \xi + \varepsilon), \\ u^0(t), & t \in T \setminus [\xi, \xi + \varepsilon) \end{cases}$$

Здесь  $\xi$  является произвольной точкой непрерывности управления  $u^0(t)$ ,  $\varepsilon > 0$  достаточно малое произвольное число,  $u \in U$  произвольный вектор.

Подставим приращение  $\Delta u_\varepsilon(t)$  в неравенстве (14). Имеем

$$\int_{\xi}^{\xi+\varepsilon} [H(t, \bar{u}(t), p(t)) - H(t, u(t), p(t))] dt \leq 0.$$

Из этого неравенства следует, что

$$\varepsilon[H(\xi, u, p(\xi)) - H(\xi, u^0(\xi), p(\xi))] + o(\varepsilon) \leq 0.$$

Следовательно,

$$H(\xi, u, p(\xi)) - H(\xi, u^0(\xi), p(\xi)) \leq 0. \quad (15)$$

**Теорема 3.** Для оптимальности допустимого управления  $u^0(t)$  в рассматриваемой задаче оптимального управления (10)-(13) достаточно, чтобы для произвольного  $\xi \in [t_0, t_1]$  выполнялось неравенство (15).

#### **Ədəbiyyat**

1. Габасов Р., Дмитрук Н. М., Кириллова Ф. М. Оптимальное управление с гарантией системами с запаздыванием, Тр. ИММ УрО РАН, 2006, том 12, № 2, 27–46.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. М.: URSS, 2011. 272 с.
3. Андреева Е.А. Оптимальное управление и вариационное исчисление. Тверь, 2004, 220 с.
4. Мансимов К.Б. К необходимым условиям оптимальности в системах с запаздыванием // Вестник Пермского Университета, Математика, Механика, информатика, 2021, вып. 4(55), с. 5-13.

### **УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ МОИСЕЕВА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И НЕЛИНЕЙНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА**

**Исламова Назрин Натик кызы**

*(BDU, Tətbiqi riyaziyyat və kibernetika fakültəsi)*

*ibragim\_va03@mail.ru*

**Аннотация:** в работе рассматривается одна задача Моисеева с запаздыванием, где критерий качества является нелинейным. Получено условие оптимальности в случае выпуклости и ограниченности области управления, линеаризованное условие оптимальности.

**Ключевые слова:** задача Моисеева с запаздыванием, оптимальное управление, линеаризованное условие оптимальности.

Рассмотрим задачу о нахождении минимального значения нелинейного функционала

$$S(u) = G(x(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} \varphi(x(t)) dt \quad (1)$$

при ограничениях

$$u(t) \in U \in R^r, \quad t \in T, \quad (2)$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-h) + f(t, u(t)), \quad t \in T = [t_0, t_1], \quad (3)$$

$$x(t) = a(t), \quad t \in [t_0 - h, t_0]. \quad (4)$$

Здесь  $A(t), B(t)$  – заданные  $(n \times n)$  мерные непрерывные матричные функции,  $f(t, u)$  – заданная и непрерывная по совокупности аргументов и имеющая непрерывные вторые производные по  $u$   $n$ -мерная вектор-функция,  $\varphi(x(t))$  – заданная дважды непрерывно-дифференцируемая скалярная функция,  $h > 0$  заданное постоянное запаздывание,  $u(t)$  –  $r$ -мерная кусочно-непрерывная управляющая вектор-функция. Предполагается, что область управления  $U$  заданное, непустое и ограниченное выпуклое множество.

Управляющая вектор-функция, удовлетворяющая этим ограничениям, будем называть допустимым управлением.

Введем аналог функции Гамильтона-Понтрягина следующим образом:

$$H(t, u, p) = p' f(t, u),$$

где векторная функция  $p(t)$  является решением следующей системы:

$$\dot{p}(t) = -A'(t)p(t) - p(t+h)B'(t+h) + \varphi_x, \quad t_0 \leq t \leq t_1 - h,$$

$$\dot{p}(t) = -A'(t)p(t) + \varphi_x, \quad t_1 - h \leq t \leq t_1,$$

$$p(t_1) = -G_x(x(t_1)).$$

Эта система называется сопряженной системой данной задачи оптимального управления.

Учитывая условие выпуклости области управления, доказывается следующее утверждение.

**Теорема 1.** Для оптимальности допустимого управления  $u^0(t)$  в рассматриваемой задаче оптимального управления (1) - (4) необходимо, чтобы неравенство

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H(t, u(t), p(t))}{\partial u} (u(t) - u^0(t)) dt \leq 0 \quad (5)$$

выполнялось для всех допустимых управлений  $u(t)$ .

А теперь используя произвольность допустимого управления  $u(t)$ , его специальное приращение определим следующим образом:

$$\Delta u(t) = \begin{cases} u, & t \in [\xi, \xi + \varepsilon), \\ u^0(t), & t \in T \setminus [\xi, \xi + \varepsilon). \end{cases}$$



Здесь  $\varepsilon > 0$  достаточно малое число,  $u \in U$  произвольный вектор, а  $\xi \in [t_0, t_1]$  является точкой непрерывности допустимого управления  $u^0(t)$ .

Тогда из неравенства (5) следует, что

$$\varepsilon \frac{\partial H'(\xi, u(\xi), p(\xi))}{\partial u} (u - u^0(\xi)) + o(\varepsilon) \leq 0.$$

Здесь используя произвольность  $u \in U$  и  $\xi \in [t_0, t_1]$  следует, что

$$\frac{\partial H'(\xi, u(\xi), p(\xi))}{\partial u} (u - u^0(\xi)) \leq 0. \quad (6)$$

Таким образом, доказывается следующее утверждение.

**Теорема 2.** Если удовлетворяются условия гладкости над данными рассматриваемой задачи, то для оптимальности допустимого управления  $u^0(t)$  необходимо, чтобы неравенство

$$\frac{\partial H'(\xi, u(\xi), p(\xi))}{\partial u} (u - u^0(\xi)) \leq 0$$

выполнялось для всех произвольных векторов  $u \in U, \xi \in [t_0, t_1]$ .

Неравенство (5) является аналогом линейризованного условия максимума, (см., например, [1, 2]), а условие оптимальности (6) является аналогом поточечного условия максимума (см., например, [3]).

**Определение 1.** Если для произвольного допустимого управления  $u^0(t) \in U, t \in [t_0, t_1]$  выполняется соотношение

$$\frac{\partial H'(\xi, v(\xi), p(\xi))}{\partial u} (u - u^0(\xi)) = 0,$$

то это допустимое управление  $u^0(t)$  будем называть квазиособым.

Для оптимальности квазиособого управления приращения функционала определяется следующим образом

$$\begin{aligned} \Delta S(u) = & - \int_{t_0}^{t_1} (u(t) - u^0(t))' \frac{\partial^2 H(t, u(t), p(t))}{\partial u^2} (u(t) - u^0(t)) + \\ & + q'(x_1) \frac{\partial^2 G(x(t_1))}{\partial x^2} q(x_1) + \int_{t_0}^{t_1} q'(t) \frac{\partial^2 \varphi(x(t))}{\partial x^2} q(t) dt \geq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Доказывается следующее утверждение.

**Теорема 3.** В рассматриваемой задаче для специального приращения  $\Delta x(t; \varepsilon)$  траектории  $x(t)$  справедливо соотношение

$$\Delta x(t; \varepsilon) = \varepsilon \delta x(t) + o_7(x; \varepsilon). \quad (8)$$

#### Ədəbiyyat

1. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М. Факториал, 2008, 812 с.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. М.: URSS, 2011. 272 с.
3. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: URSS, 2013. 256 с.

## СХЕМА ДЛЯ КОНГРУЭНЦ-МОДУЛЯРНОСТИ

**Мамедов Октай Мубарек оглы**

(Бакинский Гос. Унив., Механико-математический факультет)

[okmamedov@gmail.com](mailto:okmamedov@gmail.com)

**Аннотация:** В работе предложена конгруэнц-схема для произвольной универсальной алгебры, у которой решетка конгруэнций является модулярной.

**Ключевые слова:** схема, дистрибутивность, модулярность, конгруэнция.

Конгруэнц-схемы являются важными орудиями при изучении решёток конгруэнций (и толерантностей) алгебр; например, в [1] указана схема конгруэнц-дистрибутивности для конгруэнц-перестановочных алгебр, а в [2] – схема для конгруэнц-дистрибутивности любой алгебры.

Напомним, что решётка  $\mathcal{L} = \langle L, +, \cdot \rangle$  называется дистрибутивной, если

$$\forall x, y, z \in L \quad x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z);$$

решётка  $\mathcal{L}$  называется модулярной, если

$$\forall x, y, z \in L \quad x \cdot (x \cdot y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Эти свойства являются самодвойственными. Модулярной является решётка подпространств линейного пространства, решётка нормальных подгрупп любой группы, идеалов кольца, подмодулей модуля; но, вообще говоря, немодулярна решётка всех подгрупп группы. Неопределяемые – смотри [3].

(Конгруэнц) Схема  $S$  – это набор  $t_1, \dots, t_{n-1}, f$ , состоящий из  $m + 1$ -арных термов  $t_0, \dots, t_{n-1}$  и отображения  $f: \{0, \dots, n-1\} \rightarrow \{0, 1\}$ . Схема  $S$  выполняется для четвёрки  $a_0, a_1, b_0, b_1 \in A$  на алгебре  $\mathcal{A}$ , если существуют  $c_1, \dots, c_m \in A$  такие, что  $b_0 = t_0(a_{f(0)}, c_1, \dots, c_m)$ ,

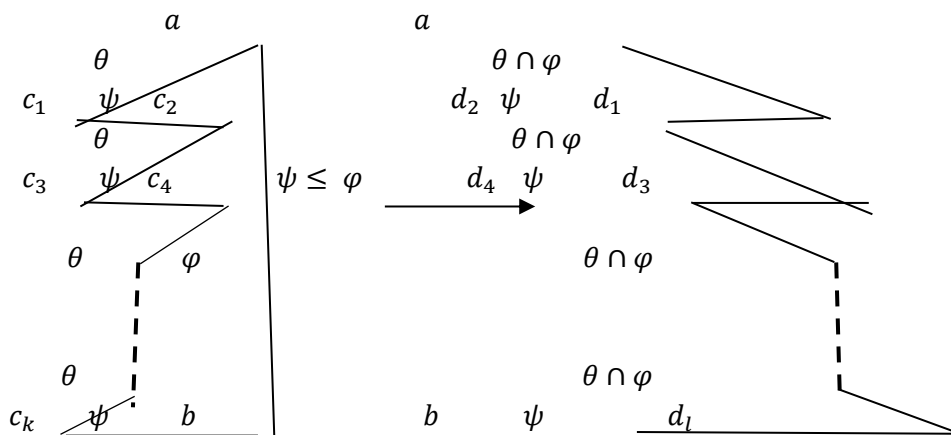
$$t_i(a_{1-f(i)}, c_1, \dots, c_m) = t_{i+1}(a_{f(i+1)}, c_1, \dots, c_m), \quad i = 1, \dots, n-2,$$

$$t_{n-1}(a_{1-f(n-1)}, c_1, \dots, c_m) = b_1,$$

Эта схема содержит много параметров; точнее, главные конгруэнции на алгебрах любого многообразия определяются  $L_{\omega_1, \omega}$ -формулами. Пусть  $\text{Con } \mathcal{A}$  обозначает решётку конгруэнций алгебры  $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$ .

**Теорема.** Решётка конгруэнций алгебры  $\mathcal{A} = \langle A, F \rangle$  является модулярной тогда и только тогда, когда для любых  $\theta, \varphi, \psi \in \text{Con } \mathcal{A}$ , любых  $a, b \in A$ , любых  $c_1, \dots, c_k \in A, k \geq 1$ , существуют такие  $d_1, \dots, d_l \in A, l \geq 1$ , что верна

### Схема :



### Литература

1. Chajda I., A note on the triangular scheme, East-West J. Math. 3 (2001), no 1, 79-80.
2. Chajda I., Radeleczki S., Congruence schemes and their applications, Comment. Math. Univ. Carolin., 46, no 1, (2005), 1-14.
3. Freese R.S., McKenzie R.N., McNulty G.F., Taylor W.F., Algebras, Lattices, Varieties, vol 3, AMS, 2022, xv+430 pp.

## ИНКРЕМЕНТАЛЬНАЯ ГЕНЕРАЦИЯ КОДА В .NET: ПОДХОДЫ И ИНСТРУМЕНТЫ

**Мехтиев Солтан Ульви**

(БГУ, факультет прикладной математики и кибернетики)

mehtiyevsoltan4@gmail.com

**Аннотация:** В данной работе рассматривается механизм инкрементальной генерации исходного кода в экосистеме .NET на основе интерфейса IncrementalGenerator. Анализируются ключевые отличия инкрементального подхода от классических Source Generators: модель конвейера преобразований, стратегия кэширования и влияние на производительность компилятора. Показано, что применение инкрементальных генераторов позволяет существенно сократить время повторной компиляции и снизить потребление памяти IDE при работе с крупными проектами.

**Ключевые слова:** Source Generator, IncrementalGenerator, Roslyn, .NET, компиляция, кэширование.

Генерация исходного кода на этапе компиляции является одним из ключевых инструментов снижения объёма ручного написания шаблонного кода в современных .NET-проектах. Начиная с .NET 5, платформа предоставляет механизм Source Generators, компонентов Roslyn-компилятора, способных анализировать синтаксическое дерево и метаданные проекта, автоматически добавляя новые файлы исходного кода в процессе сборки без участия разработчика [1]. Данный подход обеспечивает строгую типизацию и compile-time диагностику, что принципиально отличает его от генерации кода на основе рефлексии или шаблонизаторов времени выполнения.

**Ограничения классических Source Generators.** Первое поколение Source Generators (интерфейс `ISourceGenerator`) имеет существенный архитектурный недостаток, при каждом изменении в проекте генератор запускается полностью заново, независимо от того, затронуты ли входные данные генератора. Компилятор не располагает информацией о том, какие именно файлы влияют на вывод конкретного генератора, поэтому вынужден инвалидировать весь результат целиком. В крупных решениях с десятками генераторов это приводит к заметному замедлению, увеличению времени фоновой компиляции и росту потребления оперативной памяти [2].

**Инкрементальный подход: `IncrementalGenerator`.** В .NET 6 был введён интерфейс `IncrementalGenerator`, реализующий конвейерную модель обработки данных. Вместо прямого доступа к `GeneratorExecutionContext` разработчик декларативно описывает граф преобразований через `IncrementalValueProvider` ленивые узлы, результаты которых кэшируются между запусками. Конвейер строится из стандартных операторов: `Where`, `Select`, `Collect`, `Combine`. Повторное выполнение узла происходит только при изменении его входных данных, что обеспечивает гранулярную инвалидацию кэша на уровне отдельных синтаксических узлов [3].

**Стратегия кэширования и сравнение по значению.** Центральным механизмом инкрементальности является `value-based equality`: каждый узел конвейера сравнивает новый результат с предыдущим через `IEqualityComparer`. Если значение не изменилось, все `downstream`-узлы пропускаются автоматически. Это требует от разработчика явной реализации сравнения для пользовательских структур данных, но взамен даёт предсказуемое и минимальное число повторных вычислений. Для извлечения данных из синтаксического дерева рекомендуется использовать лёгкие структуры (`value types`), избегая захвата полных `SemanticModel`-объектов в узлах конвейера [3].

**Практические характеристики производительности.** Согласно данным команды Roslyn, переход с `ISourceGenerator` на `IncrementalGenerator` в типичных сценариях сокращает время повторного запуска генератора на 60-80 % при инкрементальных правках исходного кода. Дополнительным преимуществом является совместимость с режимом компиляции `Native AOT`, поскольку инкрементальные генераторы полностью завершают свою работу на этапе сборки и не оставляют зависимостей от рефлексии в рантайме [4].

**Заключение.** Инкрементальные генераторы представляют собой зрелый и рекомендованный Microsoft подход к `compile-time` генерации кода в .NET. Конвейерная архитектура с кэшированием по значению обеспечивает масштабируемость и минимизирует влияние на производительность компилятора и IDE. Переход на `IncrementalGenerator` является обоснованным решением для любых проектов, использующих `Source Generators` в `production`-среде, а понимание его внутренней модели, необходимой основой для разработки специализированных генераторов, автоматизирующих архитектурные паттерны корпоративного уровня.

#### **Литература**

1. Microsoft Docs. Source Generators. <https://learn.microsoft.com/en-us/dotnet/csharp/roslyn-sdk/source-generators-overview>
2. Hevery M. Incremental Roslyn source generators in .NET 6: A performance perspective. 2022.
3. Microsoft Docs. Incremental Generators. <https://github.com/dotnet/roslyn/blob/main/docs/features/incremental-generators.md>
4. Roslyn GitHub. Performance benchmarks for incremental source generation. <https://github.com/dotnet/roslyn>

## **DDOS-АТАКИ В ОБЛАЧНЫХ СРЕДАХ: МЕТОДЫ ОБНАРУЖЕНИЯ И СТРАТЕГИИ ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ**

**Мухаммедали Меликов Аладдин оглу**

(БГУ, Факультет Прикладной математики и кибернетики)

*mma.malikov0@gmail.com*

**Резюме:** В данной работе рассматриваются DDoS-атаки в облачных вычислительных средах, их классификация по типам (объёмные, протокольные и атаки на уровне приложений), а также современные методы их обнаружения, включая машинное обучение, энтропийный анализ и программно-определяемые

*сети. Особое внимание уделяется проблемам ложноположительных срабатываний и перспективам применения федеративного обучения для совместного обнаружения угроз в облачных инфраструктурах.*

**Ключевые слова:** *DDoS-атака, облачные вычисления, обнаружение аномалий, машинное обучение, программно-определяемые сети.*

Распределённые атаки типа «отказ в обслуживании» (DDoS) представляют одну из наиболее серьёзных и постоянных угроз для облачных вычислительных сред. По мере того как организации всё активнее переносят свою инфраструктуру в облако, риск нарушения работы сервисов существенно возрастает [1]. Экономический и репутационный ущерб от таких атак делает их обнаружение приоритетной задачей для поставщиков облачных услуг и их клиентов.

DDoS-атаки в облачных средах можно разделить на три основных типа: объёмные атаки, истощающие пропускную способность канала; протокольные атаки, эксплуатирующие уязвимости сетевого уровня; и атаки на уровне приложений, направленные против конкретных сервисов, таких как HTTP или DNS [2]. Облачные среды особенно уязвимы, поскольку злоумышленники могут использовать те же облачные ресурсы для усиления атак — явление, известное как облачные DDoS-атаки (CB-DDoS). Эластичность облачных систем может быть использована для увеличения финансового бремени жертв посредством атак на потребление ресурсов [3].

Обнаружение DDoS-атак в облачных средах требует многоуровневого подхода. Традиционные системы обнаружения на основе сигнатур недостаточно эффективны ввиду динамичного и постоянно меняющегося характера современных атак. Модели обнаружения на основе машинного обучения, включая метод опорных векторов (SVM), случайные леса и архитектуры глубокого обучения, получили широкое распространение [4]. Программно-определяемые сети (SDN) стали перспективной основой для обнаружения DDoS-атак в реальном времени и реагирования на них в облачных сетях, обеспечивая централизованный мониторинг трафика и динамическую настройку правил потоков [5].

Несмотря на достижения в области технологий обнаружения, ряд проблем остаётся нерешённым. Высокий уровень ложноположительных срабатываний в системах обнаружения аномалий способен нарушить легитимный трафик, а возрастающая изощрённость медленных атак затрудняет их выявление. DDoS-атаки в облачных средах представляют се-

рьёзную и постоянно эволюционирующую угрозу для специалистов в области информационной безопасности. Эффективное обнаружение требует интеграции машинного обучения, мониторинга на основе SDN и статистического анализа для выявления и нейтрализации угроз в режиме реального времени.

### **Литература**

1. Mirkovic J., Reiher P. A taxonomy of DDoS attack and DDoS defense mechanisms // ACM SIGCOMM Computer Communication Review. – 2004. – Vol. 34, No. 2. – P. 39–53.
2. Somani G., Gaur M.S., Sanghi D., Conti M., Buyya R. DDoS attacks in cloud computing: Issues, taxonomy, and future directions // Computer Communications. – 2017. – Vol. 107. – P. 30–48.
3. Zargar S.T., Joshi J., Tipper D. A survey of defense mechanisms against distributed denial of service (DDoS) flooding attacks // IEEE Communications Surveys & Tutorials. – 2013. – Vol. 15, No. 4. – P. 2046–2069.
4. Bhuyan M.H., Bhattacharyya D.K., Kalita J.K. Network anomaly detection: Methods, systems and tools // IEEE Communications Surveys & Tutorials. – 2014. – Vol. 16, No. 1. – P. 303–336.
5. Yan Q., Yu F.R., Gong Q., Li J. Software-defined networking (SDN) and distributed denial of service (DDoS) attacks in cloud computing environments // IEEE Communications Surveys & Tutorials. – 2016. – Vol. 18, No. 1. – P. 602–622.

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИСТОЧНИКА В ВОЛНОВОМ УРАВНЕНИИ СТРУНЫ**

**Насибзаде Вусала Назим кызы , Бахтиярова Асмар Мубариз кызы**

*(СГУ, Математический факультет)*

*vusala.nasibzada@sdu.edu.az, bextiyarova93@list.ru*

**Аннотация:** В работе рассматривается обратная задача определения правой части уравнения колебаний струны. Эта задача сводится к задаче минимизации функционала, построенного с помощью дополнительной информации. Выводится необходимое и достаточное условие оптимальности в новой задаче. Не то чтобы в [1-3] рассматривались какие-либо связанные проблемы.

**Ключевые слова:** обратная задача, уравнение колебаний, минимизация функционала, условие оптимальности.

### **1. Постановка задачи**

В области  $Q_T = \{(x, t) \mid 0 < x < \ell, 0 < t < T\}$  рассматривается краевая

задача:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = v(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad (2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\ell, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (3)$$

Здесь  $u_0 \in W_2^1(0, \ell)$ ,  $u_1 \in L_2(0, \ell)$  – заданные функции, а  $v \in L_2(Q_T)$  – неизвестная функция. Для того чтобы определить  $v(x, t)$ , мы воспользуемся дополнительной информацией

$$u(d(t), t) = f(t), \quad t \in (0, T), \quad 0 < d(t) < \ell, \quad (4)$$

где  $f(t) \in L_2(0, T)$  – заданная функция,  $x = d(t)$ ,  $t \in (0, T)$  – заданная кусочно-гладкая функция.

Мы приводим эту задачу к задаче оптимального управления, т.е. на решениях задачи (1)–(3) минимизируется функционал

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^T [u(d(t), t; v) - f(t)]^2 dt, \quad (5)$$

где  $u(x, t; v)$  – является решением задачи (1)–(3), которое соответствует функцию  $v(x, t)$ .

Функцию  $v(x, t)$  назовем управлением. Если мы найдем управление,  $v(x, t)$ , которое доставляет функционалу (5) нулевое значение, тогда дополнительное условие (4) выполняется. Отметим, что при каждом фиксированном управлении  $v(x, t)$  краевая задача (1)–(3) имеет единственное обобщенное решение из  $W_{2,0}^1(Q_T)$ .

В работе сначала доказывается, что

$$\inf_{v \in L_2(Q_T)} J(v) = 0.$$

Далее рассматривается функционал

$$J_\alpha(v) = J(v) + \frac{\alpha}{2} \iint_{Q_T} v^2(x, t) dx dt \quad (\alpha > 0) \quad (6)$$

в выпуклом замкнутом множестве  $V_d \subset L_2(Q_T)$  при ограничениях (1)–



(3). Вычисляется дифференциал функционала (6) и выводится условие оптимальности

$$\iint_{Q_T} (\psi_*(x, t) + \alpha v_*) (v(x, t) - u_*(x, t)) dx dt \geq 0 \quad \forall v \in V_d, \quad (7)$$

где  $\psi_*(x, t)$  решение следующей сопряженной задачи при  $v = v_*(x, t)$ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0, (x, t) \in Q_T, \quad (8)$$

$$\psi(x, T) = 0, \frac{\partial \psi(x, T)}{\partial t} = 0, 0 \leq x \leq \ell, \quad (9)$$

$$\psi(0, t) = \psi(\ell, t) = 0, 0 \leq t \leq T, \quad (10)$$

$$[\psi]_\Gamma = 0, [\psi_x]_\Gamma = u(d(t), t; v) - f(t), 0 \leq t \leq T, \quad (11)$$

где  $\Gamma$  — линия  $x = d(t), t \in (0, T)$ , которая разделяет  $Q_T$  на две области  $Q_1$  и  $Q_2$ . Символ  $[\omega]_\Gamma$  в (11) означает разность между предельными значениями  $\omega(x, t)$  в смысле  $L_2$  на  $\Gamma$ , вычисленными при подходе к  $\Gamma$  со стороны области  $Q_1$  и области  $Q_2$ .

#### Литература

1. Гласко В.Б. Обратные задачи математической физики, М.: МГУ, 1984.
2. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск, 2009.
3. Guliyev H.F., Seyfullayeva Kh.I. Optimal control problem with coefficients for the equation of vibrations of an elastic plate with discontinuous solution. International Journal of Applied Mathematics, Volume 36 No. 5, 2023, pp. 699-713.

### ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОЛОГИИ RED TEAM / BLUE TEAM ПРИ ЗАЩИТЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

**Расулова Севиндж Рамиз кызы**

(БГУ, Факультет Прикладной математики и кибернетики)

*rsevindc@mail.ru*

**Аннотация:** В условиях стремительного роста количества и сложности киберугроз традиционные методы обеспечения информационной безопасности не всегда позволяют адекватно оценить устойчивость информационных систем к реальным атакам. В данной работе мы рассмотрим виды атак с точки зрения хакеров и мошенников, а также способы защиты от них. Целью данного исследо-

вания является анализ эффективности методологии Red Team / Blue Team при защите информационных систем и формирование критериев оценки ее результативности.

**Ключевые слова:** Кибербезопасность, искусственный интеллект, машинное обучение, информационная безопасность.

Современные информационные системы функционируют в условиях постоянно усложняющейся киберугрозовой среды. Рост удалённой работы, облачных сервисов и мобильных технологий существенно расширяет поверхность атаки и повышает требования к надёжности механизмов защиты. Классические методы аудита информационной безопасности, основанные на регламентных проверках и формальном соответствии стандартам, не всегда отражают реальную устойчивость системы к целенаправленным атакам.

Одним из перспективных инструментов практической оценки защищённости является методология Red Team / Blue Team, основанная на моделировании действий атакующей и защищающей сторон. Red Team имитирует поведение злоумышленников, применяя техники социальной инженерии, сетевых атак и эксплуатации уязвимостей, в то время как Blue Team обеспечивает мониторинг, обнаружение и реагирование на инциденты. Совместное применение данных подходов позволяет выявить слабые места не только в технической инфраструктуре, но и в организационных процессах.

### **Методология Red Team / Blue Team**

Red Team представляет собой группу специалистов, моделирующих реальные сценарии атак с целью выявления уязвимостей, недочётов конфигурации, ошибок персонала и недостатков процедур реагирования. Основной задачей Red Team является достижение определённой цели (например, получение доступа к критическим данным) без предварительного информирования защитной стороны.

Blue Team отвечает за обеспечение устойчивости инфраструктуры: настройку средств мониторинга, корреляцию событий безопасности, анализ журналов, реагирование на инциденты и восстановление работоспособности системы. В процессе взаимодействия формируется объективная картина эффективности средств защиты и компетенций персонала[1].

Дополнительно может использоваться модель Purple Team, ориентированная на координацию действий Red и Blue команд с целью ускоренного обмена знаниями и повышения общего уровня защищённости.

### **Практическая значимость и преимущества**

Применение методологии Red Team / Blue Team обеспечивает повышение устойчивости информационных систем за счёт выявления скрытых уязвимостей, которые часто не обнаруживаются традиционными аудиторами. Практическая ценность заключается в возможности оценки реальной готовности персонала к инцидентам, улучшении взаимодействия между подразделениями и формировании культуры кибербезопасности [2].

Дополнительным преимуществом является возможность адаптации сценариев атак под конкретные бизнес-процессы, что позволяет учитывать отраслевую специфику и критичность активов. Полученные результаты могут быть использованы для оптимизации инвестиций в средства защиты и обучения сотрудников.

### **Ограничения и перспективы развития**

Несмотря на высокую эффективность, внедрение Red Team / Blue Team требует значительных ресурсов, квалифицированных специалистов и зрелой инфраструктуры мониторинга. Кроме того, результаты тестирования могут зависеть от выбранных сценариев и уровня подготовки команд.

Перспективными направлениями развития являются автоматизация процессов тестирования, использование искусственного интеллекта для анализа инцидентов, а также интеграция с фреймворками управления рисками и стандартами ISO/IEC 27001 и NIST.

### **Заключение**

Является эффективным инструментом оценки и повышения уровня защищённости информационных систем. Применение методологии Red Team / Blue Team позволяет выявлять технические и организационные уязвимости, повышать оперативность реагирования на инциденты и совершенствовать систему управления информационной безопасностью. Комплексный подход к оценке эффективности обеспечивает формирование устойчивой и адаптивной модели защиты в условиях современных киберугроз [3,4]. Таким образом, научное обоснование использования данного подхода заключается в его способности обеспечивать воспроизводимую и практико-ориентированную оценку эффективности системы информационной безопасности, что делает его фундаментальным инструментом для формирования стратегий защиты, разработки программ киберустойчивости и повышения зрелости процессов реагирования на инциденты.

### **Литература**

1. Барабанов А. В. Информационная безопасность: методы и средства защиты информации. — М.: Академия, 2021.
2. Шаньгин В. Ф. Комплексная защита информации в корпоративных системах. — М.: Форум, 2020.
3. Зайцев А. П., Королёв И. Н. Практика тестирования на проникновение и анализ защищённости информационных систем. — СПб.: Питер, 2019.
4. Поляков В. П. Управление рисками информационной безопасности. — М.: Бинном, 2022.

## **РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ ОЦЕНКИ РИСКА ДЛЯ СЕТЕВЫХ СЕРВИСОВ НА ОСНОВЕ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ**

**Садаев Азбер Шамы оглу, Надирова Фарида Бахруз гызы**

*(БГУ, Прикладная математика и кибернетика)*

*asadayev@mail.ru , fnadirova99@gmail.com*

**Резюме:** в данной работе рассматривается новый подход к оценке рисков сетевых сервисов на основе технологий машинного обучения. Также тут показывается ограничения традиционных статических методов и предлагается динамическая модель, которая учитывает топологию сети, поведенческие характеристики трафика и бизнес-значимость активов. Особое внимание уделяется применению графовых нейронных сетей (GNN) и методов объяснимого искусственного интеллекта (XAI). Она позволяет не только рассчитывать уровень риска в реальном времени, но и помогает понять результаты, чтобы принимать правильные управленческие решения.

**Ключевые слова:** оценка риска, сетевые сервисы, машинное обучение, графовые нейронные сети, объяснимый ИИ (XAI), анализ аномалий.

В современном обществе вопросы обеспечения информационной безопасности становится всё более важной задачей. Сетевые сервисы, которые являются важной частью информационных систем, обеспечивают взаимодействие пользователей, приложений и инфраструктуры. Количество сетевых сервисов постоянно растёт, а вместе с этим увеличивается и число кибератак. Хакеры стали действовать умнее: они маскируются под обычных пользователей и используют легальные инструменты для кражи данных. Поэтому важно не только защищать системы, но и заранее оценивать возможные риски [1].

Оценка риска помогает понять, какие угрозы действительно опасны, а какие являются «информационным шумом». Традиционно в информационной безопасности риск определяют как сочетание вероятности

атаки и величины возможного ущерба. Основные составляющие здесь — это активы, угрозы, уязвимости и последствия.

Существуют разные методы оценки. Самые простые — качественные методы. Они понятны, но слишком субъективны. Более сложные - количественные методы. Они точнее, но часто не успевают за скоростью изменений в сети. Главной проблемой классических подходов является то, что они видят подозрительную активность, но не понимают, насколько важен атакуемый узел для всей системы. Чтобы решить эти проблемы нужно разработать модель на основе машинного обучения для объединения всех факторов риска в единую динамическую систему. В основе лежит формула:

Риск=Вероятность атаки×Уязвимость сервиса×Значимость актива

Вместо того чтобы смотреть на каждый компьютер по отдельности, модель воспринимает сеть как «живой граф». Графовые нейронные сети помогают анализировать связи между сервисами. Это позволяет понять, как атака на один небольшой узел может вызвать сбой всей системы.

Модель работает за счёт нескольких ключевых идей. Она не изучает каждый компьютер отдельно, а строит карту всей сети — граф связей. Это помогает увидеть цепочки действий: если злоумышленник захватил один компьютер и пытается перейти к другим, такое распространение становится заметным. Поэтому риск оценивается не для одного устройства, а для всей цепочки. Модель также обучается на обычном поведении сети: кто, когда и сколько данных передаёт. Она замечает важные отклонения. Например, если бухгалтер вдруг начинает скачивать большие объёмы данных с другого сервера, это считается аномалией и повышает риск [2]. Кроме того, учитываются известные уязвимости. Если на сервисе есть новая проблема безопасности, риск сразу увеличивается. Также учитывается важность систем: например, платёжный сервер считается более критичным, чем обычный компьютер.

Объяснимый ИИ (XAI) делает работу модели понятной для человека. Обычный ИИ не объясняет свои выводы. Здесь модель не только сообщает об опасности, но и поясняет причину. Например: «Риск высокий, потому что есть попытка взлома через известную уязвимость на важном сервере». Это помогает быстрее и точнее принимать решения.

Вот программа, которая показывает, как компьютер может сам оценивать опасность кибератаки:

```
import networkx as nx
import numpy as np
from sklearn.ensemble import RandomForestRegressor
```

```
G = nx.DiGraph()
G.add_nodes_from([('Web', {'weight': 5, 'vuln': 0.7}),
                  ('DB', {'weight': 10, 'vuln': 0.9}),
                  ('PC', {'weight': 2, 'vuln': 0.1})])
G.add_edges_from([('Web', 'DB'), ('PC', 'Web')])
def train_risk_model():
    X = np.array([[5, 0.7, 0.2, 0.5], [10, 0.9, 0.8, 0.9], [2, 0.1, 0.1, 0.2]])
    y = np.array([45, 92, 8])
    model = RandomForestRegressor(n_estimators=50).fit(X, y)
    return model
def explain_risk(model, node_name, anomaly_score):
    node_data = G.nodes[node_name]
    features = [[node_data['weight'], node_data['vuln'],
                  anomaly_score, nx.pagerank(G)[node_name]]]
    risk = model.predict(features)[0]
    factors = ['вес актива', 'уязвимость', 'аномалия', 'важность в сети']
    main_factor = factors[np.argmax(features)]
    return f"Риск для {node_name}: {risk:.0f}/100. Обоснование: {main_factor}."
model = train_risk_model()
print(explain_risk(model, 'DB', anomaly_score=0.8))
# Вывод : Риск для DB: 89/100. Причина: высокий вес актива.
```

Эффективная оценка риска в наше время должна быть не только точной, но и гибкой. Угрозы эволюционируют каждый день, и система должна адаптироваться к ним без перенастройки вручную. Использование интеллектуальных технологий позволяет автоматизировать мониторинг и снизить влияние человеческого фактора [3].

В дальнейшем развитие этой модели будет направлено на создание полностью автономных систем, которые смогут не только оценивать риски, но и заранее изменять настройки защиты еще до того, как злоумышленник нанесёт реальный ущерб.

Поэтому использование машинного обучения для оценки рисков сетевых сервисов становится важным шагом в защите сложных систем. Анализ сетевого трафика и структуры сети помогает точнее управлять безопасностью и поддерживать стабильную работу сервисов даже при кибератаках.

### **Литература**

1. Андерсон Р., Безопасность информационных систем, Москва: Вильямс, 2021.
2. Bishop С.М., Pattern Recognition and Machine Learning, Springer, 2006.
3. Шаньгин В.Ф., Информационная безопасность компьютерных систем и сетей, Москва: 2017.

## **ИНКЛЮЗИВНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ КАК ОСНОВА СОВРЕМЕННОЙ ШКОЛЫ**

**Тахиров Бахадур Омар оглы, Алекберова Фарида Алекбер кызы**

*(БГУ, механико-математический факультет)*

*qarabah48@mail.ru, aleskerovafarida40@mail.ru*

**Аннотация:** *Инклюзивное образование имеет ключевое значение для учащихся, так как оно направлено на обеспечение равных возможностей обучения и развития детей, не зависимо от их физических, интеллектуальных, социальных, эмоциональных особенностей. Этот подход способствует созданию инклюзивного общества, где каждый человек может реализовать свой потенциал.*

**Ключевые слова:** *Подход, развитие, обучение, потенциал, система, способность.*

Инклюзивное образование в последние годы становится одним из ключевых направлений развития современной системы образования. Оно отражает гуманистические ценности общества, признающие право каждого ребёнка на получение качественного образования независимо от его физических, интеллектуальных, психологических или социальных особенностей. Инклюзия — это не просто совместное обучение детей с разными возможностями, а создание образовательной среды, в которой каждый ученик чувствует себя принятым, ценным и способным к развитию. Главная идея инклюзивного образования заключается в равенстве возможностей: школа перестаёт быть местом отбора и становится пространством поддержки и раскрытия потенциала каждого ребёнка. Инклюзивное образование основывается на принципе равного доступа к обучению. Каждый ребёнок имеет право посещать общеобразовательную школу по месту жительства и получать образование вместе со сверстниками. Такой подход помогает избежать социальной изоляции и способствует формированию у детей чувства принадлежности к обществу. Важным принципом является признание ценности разнообразия: различия между учениками рассматриваются не как проблема, а как естественная особенность человеческого общества. В инклюзивной школе формируется культура уважения, принятия и взаимной поддержки.

Одним из ключевых элементов инклюзии является индивидуальный подход к обучению. Педагоги адаптируют учебные программы, методы и формы работы с учётом возможностей и потребностей каждого ребёнка. Используются дифференцированные задания, визуальные материалы, практические упражнения и современные образовательные технологии. Индивидуализация обучения помогает каждому ученику двигаться в соб-

ственном темпе, достигать успеха и сохранять мотивацию к учёбе[1].

Инклюзивное образование играет важную роль не только для детей с особыми образовательными потребностями, но и для всех учащихся. Дети, обучающиеся в инклюзивной среде, учатся взаимодействовать друг с другом, развивают эмпатию, толерантность и уважение к различиям. Они приобретают навыки сотрудничества, взаимопомощи и социальной ответственности. В результате формируется более гуманное и открытое общество, в котором ценится уникальность каждого человека. Особая роль в реализации инклюзивного образования принадлежит учителю. Современный педагог должен обладать профессиональной гибкостью, умением применять разнообразные методы обучения и создавать благоприятный психологический климат в классе. Учитель становится не только источником знаний, но и наставником, который поддерживает учеников, помогает им раскрыть свои способности и поверить в собственные силы. Важным аспектом является сотрудничество педагога с родителями и специалистами сопровождения — психологами, логопедами и дефектологами[2].

Несмотря на очевидные преимущества, внедрение инклюзивного образования связано с определёнными трудностями. Среди них можно выделить недостаточную подготовку педагогических кадров, нехватку специалистов, ограниченные материальные ресурсы и существующие общественные стереотипы. Однако постепенное развитие образовательной системы, повышение квалификации учителей и внедрение современных технологий позволяют преодолевать эти барьеры

Перспективы развития инклюзивного образования связаны с созданием доступной образовательной среды, совершенствованием методик обучения и формированием культуры толерантности в обществе. Инклюзивная школа — это школа будущего, где каждый ребёнок чувствует себя нужным и важным[3].

Таким образом, инклюзивное образование представляет собой не только педагогическую практику, но и философию равенства и уважения. Оно способствует формированию общества, в котором каждый человек имеет возможность реализовать свой потенциал и быть полноценным участником социальной жизни.

#### **Литература**

1. Инклюзивное образование / Под ред. С.В. Алехиной. — М.: Просвещение, 2015.
2. Педагогика инклюзивного образования / Н.М. Назарова. — М.: Академия, 2016.
3. Основы специальной педагогики и психологии / Л.В. Кузнецова. — М.: Юрайт, 2018.



## ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ СРЕДНЕЕ И ЕГО СВОЙСТВА

**Тахиров Бахадур Омар оглы, Махмудова Наиля Ровшан кызы**

*(БДУ, факультет прикладной математики и кибернетики)*

*qarabah48@mal.ru*

**Аннотация:** в статье описаны основные свойства среднего логарифмического двух положительных чисел. Задачи на нахождение среднего логарифмического двух положительных чисел входят различных математических олимпиадах. Среднее логарифмическое двух чисел гораздо менее известно, но есть ряд технических специальностей. Во многих странах изучение среднего логарифмического входит в программу среднего образования. Среднее логарифмическое двух положительных чисел обладает рядом интересных свойств. В частности, оно лежит между средним арифметическим и средним геометрическим этих чисел.

**Ключевые слова:** среда, арифметическое, геометрическое, среднее, интеграл.

Определение. Средним логарифмическим  $L(a, b)$  двух чисел  $a$  и  $b$  называется число

$$L(a, b) = \frac{b-a}{\ln b - \ln a} \text{ при } a \neq b.$$

Обозначим  $A(a, b) = \frac{a+b}{2}$ ,  $G(a, b) = \sqrt{ab}$  соответственно среднее арифметическое и среднее геометрическое двух положительных чисел. Одно из основных неравенств, связывающих геометрическое, логарифмическое и арифметическое средние, таково:

$$G < L < A, \quad a \neq b.$$

Ниже приводится доказательство одного свойства логарифмического среднего.[1]

Задача. Доказать, что  $L < A$ , при  $a \neq b$ .

Решение. Воспользуемся алгебраическим неравенством

$$\frac{4}{(t+1)^2} < \frac{1}{t}, \quad t > 1. \quad [1]$$

Пусть  $b > a > 0$ . Проинтегрируем это неравенство на отрезке  $[1; \frac{b}{a}]$ :

$$\int_1^{\frac{b}{a}} \frac{4}{(t+1)^2} dt < \int_1^{\frac{b}{a}} \frac{dt}{t}.$$

Вычислим интегралы в обеих частях неравенства:

$$\int_1^{\frac{b}{a}} \frac{4}{(t+1)^2} dt = 2 - \frac{4}{\frac{b}{a}+1} = 2 - \frac{4a}{a+b} = 2 \cdot \frac{b-a}{a+b};$$

$$\int_1^{\frac{b}{a}} \frac{dt}{t} = \ln \frac{b}{a} = \ln b - \ln a.$$

В результате получим:

$$2 \cdot \frac{b-a}{a+b} < \ln b - \ln a \Rightarrow \frac{b-a}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}. \quad [2]$$

Таким образом, утверждение доказано.

В заключение отметим, что логарифмическое среднее находит применение в различных инженерных расчетах. Например, в теплотехнике, при подсчете средней разности температур в теплообменнике – техническом устройстве, в котором осуществляется теплообмен между двумя средами, имеющими различные температуры.

### **Литература**

- 1.Дорофеев Г. В., Седова Е. А. Концепция профильного курса математики// Математика в школе, 2006, №7. с.14–25.
- 2.Алгебра и начала анализа. 11 класс: учебник для общеобразовательных учреждений:/ К.М. Столбов ,А.Н. Головин.—М.:Просвещение, 2010. — 463 с.

## **АЛГОРИТМЫ НА ГРАФАХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ ПОТОКОВ В ТРАНСПОРТНЫХ СЕТЯХ**

**Худадова Алла Константиновна**

*(БГУ, факультет прикладной математики и кибернетики)*

*allaxudadova@gmail.com*

**Аннотация:** В работе исследовано применение алгоритмов на графах для решения задач оптимизации потоков в транспортных сетях. Предложен усовершенствованный алгоритм для задачи максимального потока минимальной стоимости, проведён анализ его вычислительной сложности и проверена эффективность на реальных сетях.

**Ключевые слова:** алгоритм на графах, сетевой поток, транспортная задача, оптимизация, комбинаторика.

Задачи оптимизации потоков в сетях занимают центральное место в комбинаторной оптимизации и находят широчайшее применение в транспортной логистике, телекоммуникационных сетях, управлении производством и распределении ресурсов. Классическая задача о максимальном потоке, сформулированная Фордом и Фалкерсоном в 1956 году, послужила основой для целого направления исследований в теории графов и комбинаторной оптимизации [1].

Рассматривается взвешенный ориентированный граф  $G = (V, E)$  с

множеством вершин  $V$ , множеством дуг  $E$ , пропускными способностями  $c(e) > 0$  и стоимостями транспортировки единицы потока  $d(e) \geq 0$ . Задача о потоке минимальной стоимости состоит в нахождении потока заданной величины  $f$  от источника  $s$  к стоку  $t$  при минимизации суммарной стоимости с соблюдением ограничений по пропускным способностям и условий сохранения потока в промежуточных узлах [2].

В работе предложен улучшенный алгоритм последовательных кратчайших путей (Successive Shortest Paths), использующий потенциалы Джонсона для устранения отрицательных весов дуг в остаточной сети. Это позволяет применять алгоритм Дейкстры вместо алгоритма Беллмана–Форда на каждой итерации, снижая временную сложность с  $O(nmU \log n)$  до  $O(mU \log n)$ , где  $n$  — число вершин,  $m$  — число дуг,  $U$  — максимальная пропускная способность [3].

Дополнительно реализована стратегия аугментации по наиболее длинному пути, позволяющая уменьшить число итераций за счёт более полного использования пропускных способностей на каждом шаге. Доказано, что комбинация потенциалов Джонсона с жадным выбором аугментирующего пути обеспечивает ускорение в среднем в 1,5–2,3 раза по сравнению с базовым алгоритмом последовательных кратчайших путей на случайных сетях умеренной плотности.

Отдельно рассматривается многотоварная задача о потоке, в которой одновременно транспортируется несколько типов товаров с собственными источниками, стоками и требованиями. Эта задача является NP-трудной в целочисленной постановке, однако её непрерывная релаксация решается полиномиально методами внутренней точки. Предложен алгоритм декомпозиции Данцига–Вулфа, позволяющий разбить многотоварную задачу на независимые одотоварные подзадачи, решаемые параллельно [4].

Вычислительные эксперименты проводились на тестовых наборах задач из библиотеки DIMACS и на реальных данных городской транспортной сети. Для тестовых задач с числом вершин от 1000 до 50000 и числом дуг от 5000 до 500000 предложенный алгоритм обеспечил ускорение в 2–4 раза по сравнению с реализацией алгоритма MCMF из библиотеки LEMON. Особенно значительное ускорение наблюдалось на разреженных сетях с неоднородными пропускными способностями.

На основе разработанного алгоритма создана система оперативного перепланирования маршрутов общественного транспорта в условиях динамических изменений спроса. Задача формулируется как серия

задач о потоке минимальной стоимости на временном графе развёртки, где каждый временной слой соответствует плановому интервалу. Тестирование на данных о пассажиропотоках показало, что система позволяет снизить среднее время ожидания пассажиров на 12–18% при тех же операционных издержках.

Перспективными направлениями дальнейших исследований являются разработка онлайн-алгоритмов для задач с динамически изменяющимися пропускными способностями, применение методов обучения с подкреплением для выбора стратегии аугментации, а также обобщение метода на задачи оптимизации потоков в многоуровневых иерархических сетях. Также планируется реализация алгоритма с использованием GPU для параллельной обработки больших транспортных графов.

### **Литература**

1. Ford L.R., Fulkerson D.R. Flows in Networks. — Princeton: Princeton University Press, 1962. — 194 p.
2. Ahuja R.K., Magnanti T.L., Orlin J.B. Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications. — Prentice Hall, 1993. — 846 p.
3. Johnson D.B. Efficient algorithms for shortest paths in sparse networks. — Journal of the ACM, 1977. — Vol. 24. — P. 1–13.
4. Dantzig G.B., Wolfe P. Decomposition principle for linear programs. — Operations Research, 1960. — Vol. 8. — P. 101–111.

## **НЕЧЁТКИЕ МНОЖЕСТВА И НЕЧЁТКАЯ ЛОГИКА В ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ**

**Худадова Алла Константиновна**

*(БГУ, факультет прикладной математики и кибернетики)*

*allaxudadova@gmail.com*

**Аннотация:** В работе исследовано применение теории нечётких множеств для решения задач принятия решений в условиях многокритериальной неопределённости. Разработана модель, основанная на нечётких отношениях предпочтения для упорядочения альтернатив, и проверена её эффективность на практических примерах.

**Ключевые слова:** нечёткая логика, неопределённость, многокритериальное решение, отношение предпочтения, теория множеств.

Принятие решений в условиях неопределённости является одной из центральных проблем современной прикладной математики и исследования операций. Классические теории полезности и вероятностные подходы предполагают точную количественную оценку предпочтений и вероятностей исходов, что нередко оказывается нереалистичным в условиях реальных управленческих и инженерных задач [1]. Теория нечётких множеств, введённая Л. Заде в 1965 году, предоставляет математический аппарат для моделирования неточных и лингвистически выраженных предпочтений.

Пусть задано конечное множество альтернатив  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  и конечное множество критериев  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ . Каждый критерий имеет вес  $W_j$ , задаваемый нечёткой переменной с треугольной или трапециевидной функцией принадлежности. Оценки альтернативы  $a_i$  по критерию  $C_j$  задаются нечёткими числами  $\tilde{x}_{ij}$ . Задача состоит в определении наилучшей альтернативы или упорядочении множества альтернатив с учётом нечёткости весов и оценок [2].

Для агрегирования нечётких оценок применяется взвешенное нечёткое среднее, а для дефазификации результата используется метод центра тяжести и метод наибольшей принадлежности. Предложен алгоритм ранжирования нечётких чисел, основанный на введении функции сравнения, учитывающей как ожидаемое значение, так и меру неопределённости (ширину носителя нечёткого числа). Это позволяет строить полное нечёткое упорядочение на множестве альтернатив даже в случаях существенного перекрытия функций принадлежности [3].

Разработанный метод обобщает классический метод TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution) на случай нечётких входных данных. Идеальное и антиидеальное решения определяются как нечёткие числа, а расстояние до них вычисляется с использованием нечёткого расстояния Хемминга. Итоговый индекс близости к идеальному решению также является нечётким числом, дефазификация которого даёт вещественный ранговый показатель каждой альтернативы.

Особое внимание уделяется задаче согласования групповых предпочтений, когда оценки выставляются несколькими экспертами с различной компетентностью. Компетентность экспертов моделируется лингвистическими переменными, переводимыми в нечёткие числа. Агрегирование экспертных оценок осуществляется с помощью взвешенного

оператора OWA (Ordered Weighted Averaging), обобщающего как усреднение, так и нахождение экстремальных значений [4].

Для верификации метода рассмотрены задачи выбора поставщика в логистических цепочках, оценки инвестиционных проектов и ранжирования претендентов в кадровых задачах. Сравнение с методами АНР, ELECTRE и VIKOR показало, что предложенный нечёткий TOPSIS обеспечивает более устойчивые результаты при изменении весовых коэффициентов критериев и допускает естественную интерпретацию результатов лицом, принимающим решение.

Исследована также чувствительность ранжирования альтернатив к выбору формы функции принадлежности весовых коэффициентов. Показано, что переход от треугольных к трапециевидным числам незначительно влияет на итоговый порядок альтернатив при умеренной неопределённости, однако может существенно изменять его в случаях, когда несколько альтернатив имеют близкие ранговые показатели. Предложен критерий устойчивости ранжирования, позволяющий автоматически выявлять такие критические случаи.

Разработанное программное обеспечение реализует полный цикл нечёткого многокритериального анализа: задание лингвистических шкал, перевод лингвистических оценок в нечёткие числа, агрегирование, ранжирование и визуализацию результатов. Перспективой дальнейших исследований является обобщение метода на интуиционистские нечёткие множества и тип-2 нечёткие множества для более точного моделирования неопределённости экспертных суждений.

### **Литература**

1. Zadeh L.A. Fuzzy sets. — Information and Control, 1965. — Vol. 8. — P. 338–353.
2. Bellman R.E., Zadeh L.A. Decision making in a fuzzy environment. — Management Science, 1970. — Vol. 17. — P. 141–164.
3. Hwang C.L., Yoon K. Multiple Attribute Decision Making. — Berlin: Springer, 1981. — 270 p.
4. Yager R.R. On ordered weighted averaging aggregation operators. — IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1988. — Vol. 18. — P. 183–190.

## ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОРПОРАТИВНЫХ СИСТЕМ

**Юзбашиев Фархад Рафаэль оглы**

*(БГУ, факультет прикладной математики и кибернетики)*

*fyuzbashiye@gmail.com*

**Аннотация:** В статье рассматриваются вопросы проектирования и практической реализации корпоративной информационной системы на базе языка программирования Python. Основное внимание уделяется выбору архитектуры, разработке модулей системы, обеспечению безопасности и оценке эффективности разработанного решения.

**Ключевые слова:** корпоративная система, Python, FastAPI, архитектура, разработка, безопасность.

В условиях цифровой трансформации предприятий особую значимость приобретает разработка эффективных корпоративных информационных систем (КИС), способных автоматизировать ключевые бизнес-процессы. В отличие от теоретических аспектов проектирования, практическая реализация КИС требует выбора конкретных технологий, инструментов и архитектурных решений, обеспечивающих надежность и масштабируемость системы [5].

На этапе проектирования определяется предметная область и формулируются требования к системе. В качестве примера рассматривается корпоративная система управления данными предприятия, включающая модули пользователей, данных и отчетности [1].

Архитектура системы выбирается с учетом современных требований и может быть реализована в виде многослойной модели с использованием REST API. Основными компонентами являются:

- уровень представления (интерфейс пользователя);
- уровень бизнес-логики;
- уровень данных [4].

При проектировании особое внимание уделяется принципам модульности, разделения ответственности и повторного использования компонентов, что позволяет упростить дальнейшее развитие системы.

- Для реализации системы используется следующий стек технологий:
- Back-end: Python (FastAPI);
- База данных: PostgreSQL;

- Контейнеризация: Docker;
- Документация API: Swagger [3].

Разработанная система включает следующие модули:

- модуль аутентификации и авторизации пользователей;
- модуль управления данными;
- модуль отчетности.

Взаимодействие между компонентами осуществляется через REST API, что обеспечивает гибкость интеграции с внешними сервисами.

В процессе разработки особое внимание уделяется вопросам безопасности. Реализуются механизмы аутентификации и авторизации на основе JWT, используется защищенное соединение (HTTPS), а также осуществляется контроль доступа на уровне ролей пользователей.

Для оценки качества системы проводится функциональное и нагрузочное тестирование, что позволяет выявить узкие места и повысить производительность приложения.

Таким образом, практическая реализация корпоративной информационной системы на Python демонстрирует эффективность использования современных технологий и архитектурных подходов. Разработанный прототип может служить основой для внедрения в реальных организациях и дальнейшего масштабирования. Применение Python в разработке КИС позволяет создавать гибкие, безопасные и производительные решения, соответствующие требованиям современной цифровой экономики [2].

### **Литература**

1. Братковский А.М. Информационные системы и технологии управления предприятием. — М., Академия, 2021., 326с.
2. Sommerville I. Software Engineering. — Pearson, 2020.
3. Django Documentation. URL: <https://docs.djangoproject.com>
4. FastAPI Documentation. URL: <https://fastapi.tiangolo.com>
5. PEP 8 — Style Guide for Python Code.



## **ANALYSIS OF THE STABILITY OF ADEQUACY CRITERIA FOR IMAGE RECOGNITION METHODS UNDER STRUCTURAL DISTORTIONS**

**Aliyev Orkhan Aydin**

*(BSU, Faculty of Applied Mathematics and Cybernetics)*

*orkhanali@bk.ru*

**Summary:** *The analysis of the stability of matching criteria for image recognition methods under structural distortions is investigated.*

**Keywords:** *image recognition, adequacy criteria, artificial image families, wavelet transform, structural distortions, stability, sector analysis.*

In recent years, the problem of assessing the adequacy of image recognition methods has become increasingly relevant due to the expanding application of intelligent data analysis systems. Traditional integrated recognition quality metrics, such as accuracy, precision, or recall, allow one to evaluate the overall effectiveness of an algorithm, but do not always reflect its behavior under controlled changes in the structure of the input data [1]. Previous studies focused on experimentally verified adequacy criteria  $C_1$ – $C_4$  based on artificially generated families of signals and images [2]. The analysis showed that the use of artificial families enables a transition from heuristic assessment of recognition quality to a quantitative analysis of algorithm performance under controlled conditions.

Previous studies focused on investigating the adequacy of recognition methods for sequential spatial displacements and regular image transformations [6, 7]. For this purpose, artificially generated families of state emblem images were used, obtained by sectorizing the original images relative to their geometric center. After normalization and segmentation, local features were linearized, allowing the images to be represented as one-dimensional signals. A continuous wavelet transform was used to extract features, and Euclidean distances between feature vectors were used as a similarity measure [3, 4].

This paper examines the robustness of the proposed adequacy criteria when exposed to structural distortions of various types. Unlike previous studies, where spatial displacement was the primary factor of variation, various types of distortions are additionally introduced into the artificial families: (i) additive Gaussian noise; (ii) impulse noise; (iii) blur; (iv) affine transformations; (v) partial occlusion; (vi) JPEG compression artifacts [5].

Let the original image be denoted as  $I(x, y)$ , and the structural distortion

operator be defined by the expression

$$I'(x, y) = T(I(x, y), \mu)$$

where:  $T$  is the distortion operator;  $\eta$  is the distortion intensity parameter.

After the formation of the artificial family, the image is divided into sectors, local features are constructed, and the image is converted into a one-dimensional signal:  $S=\{s_1, s_2, ..., s_n\}$ .

To analyze similarity, the Euclidean distance between feature vectors is used:  $D(s_i, s_j) = \sqrt{\sum_{k=1}^m (x_{ik} - x_{jk})^2}$ .

The obtained values are used to calculate adequacy criteria  $C_1$ – $C_4$ .

*Criterion  $C_1$*  (uniformity) characterizes the uniformity of distance variation within the artificial family and is defined as  $C_1 = \sqrt{\frac{1}{N_s-1} \sum_{i=1}^{N_s-1} (\Delta_i^{(k)} - \bar{\Delta}^{(k)})^2}$ , where  $\Delta_i^{(k)} = d_{i+1}^{(k)} - d_i^{(k)}$ ,  $i=1, ..., N_s$ .

*Criterion  $C_2$*  (symmetry) evaluates the symmetry of neighboring distances:  $C_2 = \max |r_i^{(k)} - \bar{r}^{(k)}|$ , where  $r_i^{(k)} = \frac{D_k(s_i, s_{i+1})}{D_k(s_i, s_{i-1})}$ ,  $i=1, ..., N_s-1$ .

*Criterion  $C_3$*  (convergence rate) reflects the convergence stability of the recognition process:  $C_3 = \sqrt{\frac{1}{N_s-1} \sum_{i=1}^{N_s-1} (v_i^{(k)} - \bar{v}^{(k)})^2}$ , where  $v_i^{(k)} = \frac{d_i^{(k)} - d_{i+1}^{(k)}}{d_{i+1}^{(k)}}$ ,  $i=1, ..., N_s-1$ .

*Criterion  $C_4$*  (sensitivity) evaluates sensitivity to variations in the parameters of artificial family formation:  $u_{lk}^{(h_1, h_2)} = \frac{G_{lk}(h_2)}{G_{lk}(h_1)}$ , where  $G_{lk}(h)$  is the deviation measure.

Lower values of  $C_1$ – $C_4$  correspond to higher adequacy and robustness of the recognition method under structural distortions. Table 1 presents representative values of adequacy criteria under different types of structural distortions.

**Table 1.** Representative values of adequacy criteria under different types of structural distortions

| Distortion     | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ |
|----------------|-------|-------|-------|-------|
| Gaussian noise | 0.014 | 0.62  | 0.71  | 1.12  |
| Blur           | 0.021 | 0.84  | 0.93  | 1.56  |
| Occlusion      | 0.037 | 1.11  | 1.28  | 2.04  |

The obtained results demonstrate that local sector-based representations preserve adequacy under moderate distortions more effectively than global similarity measures.

In order to obtain an integral quantitative estimate of stability under

structural distortions, a generalized robustness coefficient was additionally introduced:

$$R = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 C_i.$$

The coefficient  $R$  characterizes the aggregated sensitivity of the recognition method to variations in the structure of the input image. Lower values of  $R$  correspond to higher robustness and structural stability of the considered feature representation. For the considered experimental setup, the generalized robustness coefficient increased significantly under partial occlusion and affine distortions, indicating reduced structural stability of the recognition process. The proposed coefficient is used as an auxiliary integral indicator for comparative robustness analysis.

Experimental analysis demonstrated that the sector-based representation combined with wavelet feature extraction provides lower values of the generalized robustness coefficient compared to conventional global similarity measures under moderate distortion levels.

A general outline of the stability analysis procedure is given in Fig. 1.

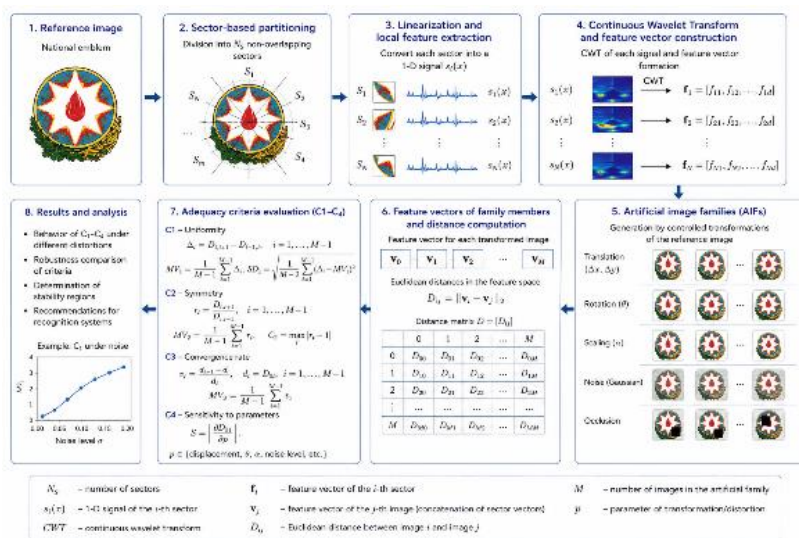


**Fig. 1.** General scheme of formation and analysis of artificial image families

The obtained results confirm the significant advantage of local sector analysis over global image comparison methods. Even in the presence of significant distortions, local sector representations retain the ability to identify structurally consistent image elements, which is consistent with earlier observations obtained for artificial image families [2, 6]. This is especially important for recognition systems operating under conditions of incomplete information or

in the presence of various types of interference.

It should be noted that the approach under consideration is of interest not only for image recognition tasks but also for a broader class of intelligent data analysis systems. The use of artificially generated families and adequacy criteria makes it possible to construct reproducible procedures for analyzing the stability of recognition methods under controlled changes in environmental parameters.

Further development in this area involves expanding the experimental base, using more complex image classes, and investigating the statistical properties of adequacy criteria. Of particular interest is the possibility of constructing integrated stability indicators that take into account the impact of various types of structural distortions on recognition quality.

### **Reference**

1. Wang Z., Bovik A.C., Sheikh H.R., Simoncelli E.P. Image quality assessment: From error visibility to structural similarity // *IEEE Transactions on Image Processing*. 2004. Vol. 13, No. 4. P. 600–612.
2. Rzayev R.R., Kerimov A.B., Garibli U.G., Salmanov F.M. Criteria for Assessing the Adequacy of Image Recognition Methods and Their Verification Using Examples of Artificial Series of Signals // *Problems of Information Society*. 2024. Vol. 15, No. 1. P. 10–17.
3. Islam S.M., Debnath R. A comparative evaluation of feature extraction and similarity measurement methods for content-based image retrieval // *International Journal of Image, Graphics and Signal Processing*. 2020. Vol. 12, No. 6. P. 19–32.
4. Rehman A., Gao Y., Wang Z., Wang Q. Image classification based on complex wavelet structural similarity // *Pattern Recognition*. 2013. Vol. 46. P. 542–554.
5. Mohammadi P., Ebrahimi-Moghadam A., Shirani S. Subjective and objective quality assessment of image: A survey // *arXiv preprint arXiv:1406.7799*. 2014.
6. Rzayev R.R., Kerimov A.B., Aliyev O.A. Empirical Analysis of the Adequacy of Recognition Methods on Various Families of Images // *Intelligent Computing. Proceedings of the 2025 Computing Conference*. Vol. 3. Springer Nature Switzerland AG, 2025. P. 73–87.
7. Aliyev O.A. Development of New Approaches to Color Interpretation in Images Using Computational Experimentation // *Baku State University Journal of Mathematics & Computer Sciences*. 2025. Vol. 2, No. 3. P. 27–40.

## **DESIGN AND EVALUATION OF A SECURE AND INTELLIGENT IOT-BASED REMOTE PATIENT MONITORING SYSTEM FOR EARLY DETECTION OF ALZHEIMER'S DISEASE USING EDGE AI AND FEDERATED LEARNING**

**Azizova Sabina Rafail, Ghadyani Mohammadmahdi Shokrollah**

*(BSU, Faculty of applied math and cybernetics)*

*(Ege University, Faculty of Medicine)*

*sabinaazizova2000@mail.ru*

*01230000011@ogrenci.ege.edu.tr*

**Abstract:** *Alzheimer's disease is a progressive neurodegenerative disorder that is generally pandemically mentioned as one of the burdens for the health system. Symptoms are usually delayed with a timely diagnosis to increase the patient's life quality. We present an overview of a secure Internet of Things (IoT)-based RPM model toward an early-stage Alzheimer's detection tool. This model helps us make the best use of the environmental and wearable sensors generating data from physiological signals and deviations in behavior. The processing of data in real-time at the device level and, therefore, anomaly detection through Edge AI will minimize latency and allow for a quick reaction. To address privacy and security concerns, Federated Learning (FL) has been incorporated to provide decentralized model training without transferring raw patient data. A hybrid anomaly detection model based on time series behavioral analysis is introduced to identify early cognitive decline patterns. Simulation-based evaluation shows that the proposed framework significantly improves detection accuracy, reduces latency by up to 40–50%, and enhances data privacy compared to traditional cloud-based systems. The architecture offers a scalable, efficient, and privacy-sensitive solution for next-generation intelligent healthcare systems.*

**Keywords:** *Alzheimer's Disease, Internet of Things, Edge AI, Federated Learning, Data Privacy*

### **1. Introduction**

#### **Alzheimer's Disease and Early Detection**

It can take years for Alzheimer's to develop. The stages of Alzheimer's range from minimal impairment to terminal dementia. It has symptoms that may seem like poor memory and motor skills, changing sleeping patterns, erratic behavior. One would need consistent observation to pick up the symptoms of Alzheimer's disease[1].

#### **Usage of IoT in health systems**

IoT has revolutionized healthcare with: Continuous patient monitoring, Real-time data collection, Remote diagnostics

In Alzheimer's applications, IoT devices can monitor patient behavior over extended periods and provide valuable insights into disease progression.

#### Edge AI and Federated Learning

Edge AI enables device-level data processing, reducing latency and allowing for faster decision-making. Federated Learning enhances privacy by ensuring sensitive patient data remains on local devices while only model updates are shared. The integration of these technologies creates a powerful foundation for intelligent healthcare systems.

#### Related Work

Recent studies have explored IoT-based monitoring systems for chronic diseases. However, most current systems are cloud-centric and lack real-time capabilities.

Edge Computing was developed to increase the efficiency of the system by conducting processing at a closer proximity to the source of the information. Similarly, federated learning has attracted much interest due to its ability to protect the privacy of the information in a distributed environment. However, few papers have focused on the identification of Alzheimer's disease.

#### Proposed Structure

The structure proposed in this section is based on a multi-level system

##### Sensor Layer

The Sensor Level consists of: Wearable sensors (as in smartwatches, health meters), Environmental sensors (as in motion, environmental monitoring)

These sensors collect: Physiological data (such as heart rate and activity level), Behavioral data (as in motion and sleep patterns)

##### Edge AI Layer

Edge AI layer consists of:

Nodes that can process data (e.g., by preprocessing incoming data, extracting features, etc.)

Real-time anomaly detection capabilities at these edge nodes to reduce the number of data transmitted to the cloud, as well as to provide timely analysis and responses.

##### Federated Learning Layer

Federated Learning allows multiple devices to collaborate on developing a shared model without needing each device to share its own copy of the training dataset(s). This creates a more secure and private approach to data management by eliminating the need to send all local train datasets to any central location.

### Cloud Layer

The Cloud Layer serves the following purposes: Aggregate global models, Perform longitudinal analyses of global models, Support clinical decision-making processes.

### Security Layer

Security is ensured through: End-to-end encryption, Authentication mechanisms, Access control policies.

### Methodology

#### Data Processing and Feature Extraction

Time-series analysis techniques are used to process collected data, which have Indicators such as activity frequency, sleep duration, and movement irregularities are extracted.

#### Behavioral Modeling

Each patient has a personalized behavioral baseline, which AI models learn normal patterns from and detect deviations from.

#### Anomaly Detection Model

A blended AI model will be used to identify unusual behaviours from the collected data. The model analyzes deviations from baseline behavior and detects early signs of cognitive decline.

Federated Learning Workflow – Local model training on edge devices, Transmission of model updates, Aggregation in cloud server, Redistribution of global model [2].

### Experimental Evaluation

#### Simulation Setup

A simulated dataset representing patient behavior was used to evaluate the system.

Performance Metrics: Accuracy, Latency, Privacy level, Energy consumption.

Results: The proposed system achieved: 40–50% reduction in latency, Improved detection accuracy, Enhanced data privacy.

Compared to traditional systems, the framework demonstrated superior performance.

### Discussion

The integration of Edge AI and Federated Learning provides a powerful solution for intelligent healthcare systems.

Key advantages: Real-time monitoring, Privacy preservation, Scalability.

Challenges: Sensor reliability, User adoption, Lack of standardization.

### 8. Future Work

Future research directions include: Integration with blockchain,

Explainable AI models, Clinical validation with real patient data.

### **Conclusion**

The article defines a safe and intelligent IoT RPM framework for the early detection of Alzheimer's. The incorporation of Edge AI and Federated Learning will provide real-time monitoring, decreased latency, and the protection of patient data privacy. This system will facilitate the development of intelligent health care solutions that are expected to lead to the advancement of future intelligent healthcare solutions.

### **References**

1. WHO (2023). Digital health strategy.
2. Konečný, J. (2024). Federated Learning. IEEE.

## **SMART HOME TECHNOLOGIES: BALANCING ENERGY OPTIMIZATION AND CYBERSECURITY CHALLENGES IN IOT ENVIRONMENTS**

**Azizova Sabina Rafail, Ghadyani Shokrollah Abdollah**

*(BSU, Faculty of applied math and cybernetics)*

*(Tekdata Co.)*

*sabinaazizova2000@mail.ru, ghadyaniiiii@gmail.com*

**Abstract:** *Smart home systems not only provide home comfort, but also prevent energy waste, reduce environmental load and serve sustainable development goals. In the world experience, as a result of the application of smart home systems in the USA, Japan, Germany and Scandinavian countries, it is noted that 15-30% savings in energy consumption have been achieved. The study shows that widespread adoption of smart home systems contributes to both energy independence and environmental sustainability. However, increasing network connections, the proliferation of IoT devices, and cloud-based data processing processes are creating new cybersecurity risks. In general, the aim of the research is to determine the scientific, technological and social aspects of smart home models that increase energy saving, security level and user well-being, as well as to evaluate the development prospects of this field in the conditions of Azerbaijan.*

**Keywords:** *Smart home, energy efficiency, security system, internet of things (IoT), artificial intelligence (AI)*

### **1. Introduction**

The 21st century is characterized as an era where the global energy crisis and digital transformation intersect. Growing energy demand, climate change,



urban congestion and limited natural resources force humanity to look for smarter and more efficient technological solutions [1]. If the 20th century was the period of the industrial revolution, the 21st century can be evaluated as the stage of "digital and energy revolution". At the center of these changes is the concept of "smart home" — it is not just a technological innovation, but also a key component of social and environmental transformation. Smart homes connect home equipment, devices and systems through information and communication technologies, optimizing energy use and providing user comfort [2]. These systems automatically manage heating, lighting, security, household appliances and even water resources. According to UN data for 2024, 35% of the world's energy consumption is accounted for by residential buildings, and 28% of carbon emissions are formed in this sector [3].

### **SMART HOME CONCEPT AND TECHNOLOGICAL BASICS**

The technological infrastructure of smart homes is mainly based on the Internet of Things (IoT), artificial intelligence (AI), sensor technologies, cloud services and automated control systems [4]. These systems operate at three interconnected levels and collect and analyze data in real time.

**Physical level:** At this stage, data is collected through various sensors and devices. Temperature sensors, motion detectors, light sensors, energy monitoring devices and security cameras monitor the activity of the house. For example, a temperature sensor adjusts the temperature according to weather changes, a motion sensor turns off the lights when no one is in the room, and an energy monitoring device monitors consumption. Thanks to these technologies, energy consumption is reduced to a minimum and the level of comfort increases.

**Network layer:** Data is transmitted through IoT communication protocols (ZigBee, LoRaWAN, MQTT, Z-Wave). ZigBee provides short-range communication with low power consumption, while LoRaWAN is suitable for longer distances and finds wide application in rural areas. The MQTT protocol allows reliable data exchange with low bandwidth. Thanks to these systems, all devices in the house can be connected to a central control panel or mobile application.

**Cloud layer:** Cloud technologies process the collected data and analyze it with AI models.

**The role of artificial intelligence:** Artificial intelligence and machine learning algorithms analyze user behavior to ensure optimal energy management. For example, the system learns the time the user leaves the house every day and automatically reduces the heat, thus reducing energy consumption by up to 25%. AI also optimally adjusts the indoor climate, taking into account weather forecasts. International experience shows that households saved 15%

annually on gas and electricity due to the application of "Nest Learning Thermostat" in the USA [1]. As a result of the "E-Energy" project implemented in Germany, energy efficiency in buildings has been increased up to 40%. In the reality of Azerbaijan, the implementation of these systems is taking place gradually. The smart meter system implemented by "Azerishiq" OJSC facilitates monitoring of energy consumption and prevents illegal use [5]. Smart lighting, heating and security systems are installed in new residential complexes in the capital and regions, which serve to save energy and improve the quality of life.

### **CYBER SECURITY AND DATA PROTECTION**

In addition to the wide spread of smart home systems, information security issues are becoming more and more relevant. The proliferation of IoT devices makes home networks a potential target for cyberattacks.

The main risks are:

An in-depth analysis of key cybersecurity risks in smart homes Although the technologies applied in smart homes make everyday life easier, these systems also create new cyber security challenges.

#### **How to Connect Smart Home Elements?**

**Wi-Fi** is considered the most popular communication protocol for IoT devices.

**Bluetooth**, Although less common than Wi-Fi, Bluetooth devices are cheaper and consume less energy. Its biggest disadvantage is low connection capacity. All IoT elements need to be positioned closer to each other, and users cannot control IoT systems outside the home.

**Z-Wave**, It is a low power consumption mesh network technology that provides high connection speed and allows adding any number of devices to the network.

**Zigbee** is another affordable, low-power network technology used to connect smart home devices. Zigbee provides secure data transmission using 128-bit encryption keys and controls devices at a distance of 10-100 meters indoors.

#### **Recommendations:**

- Promoting local "smart device" production: Developing local manufacturers will not only diversify the economy but also reduce dependence on foreign supply chains.
- Expanding energy audit and certification: An energy efficiency certificate requirement should be applied for all new buildings and old buildings undergoing major renovation.
- Applying national cybersecurity standards: Minimum security requirements for smart home devices should be defined, and compliance with these requirements should be made mandatory.

- Creating artificial intelligence centers: Centers specialized in AI research and application should be created in universities and research institutes.
- Formation of educational programs and curricula on smart home technologies: Specialties in the installation, management, and repair of smart home systems should be taught in vocational schools and universities.
- Security awareness campaigns for users: Users should be familiarized with safe usage rules of smart devices through mass media, social networks, and training seminars.

### **Conclusion**

Smart home technologies are one of the most efficient solutions responding to the energy, safety, and ecological challenges of the modern world. They play a crucial role in energy savings, creating a safe environment, and ensuring ecological sustainability [1]. In the future, smart homes will become one of the main infrastructure elements ensuring not only energy savings but also social welfare, safety, and sustainable development [3].

### **References**

1. International Energy Agency (IEA). "Energy Efficiency 2023: Buildings and Smart Systems Report". Paris, 2023.
2. State Committee for Urban Planning and Architecture of the Republic of Azerbaijan. Official website, 2024.
3. United Nations Environment Programme (UNEP). "Sustainable Housing and Energy
4. Qasimov E. "Artificial Intelligence and Smart Technologies". Elm Publishing House, Baku, 2024.
5. "Azərişiq" OJSC. "Experience in applying smart meter systems". Baku, 2023.

## **EFFICIENT LARGE LANGUAGE MODELS FOR GRAPH-RAG SENTIMENT ANALYSIS: RETRIEVAL, COMPRESSION AND REINFORCEMENT LEARNING**

**Gasimov Aydin Eldaniz**

*(ASOIU, Information Technologies and Control)*

*aydin.gasimov@protonmail.com*

**Abstract:** *This material reviews practical methods for improving the performance and efficiency of large language models without relying only on larger model scales. The proposed view treats efficiency as a stack: retrieval and Graph-RAG reduce the need to store domain knowledge in parameters; quantization and parameter-efficient adaptation reduce model and training memory; KV-cache compression improves long-context infer-*

*ence; and reinforcement or preference learning improves answer quality per unit of compute. The discussion is tied to Graph-RAG enhanced sentiment analysis, where evidence, entities, aspects and time must be reasoned over together.*

**Keywords:** *large language models; Graph-RAG; quantization; KV-cache compression; reinforcement learning; sentiment analysis.*

**Introduction.** Large language models (LLMs) are increasingly judged not only by peak benchmark accuracy, but also by latency, memory use, throughput, updatability and evidence quality. The central problem is that the largest models often spend compute on three different burdens: carrying knowledge in parameters, moving very large weights through memory, and re-reading long contexts at generation time. A useful research direction is therefore to improve performance through architecture and training choices that make each token more informative. In this material, LLM efficiency is organized into four connected layers: retrieval, model compression, inference-memory compression and feedback-based learning.

**Retrieval and Graph-RAG.** Retrieval-augmented generation (RAG) separates reasoning from knowledge storage by retrieving external passages and conditioning generation on them [1]. This improves factuality, provenance and update speed because the knowledge base can be edited without retraining the model. However, ordinary vector RAG is often weak for global or relational questions. Graph-RAG addresses this by constructing an entity graph and summarizing communities before answering, which supports sensemaking over large private corpora [2]. For sentiment analysis, this is especially useful: polarity is rarely isolated in one sentence, and often depends on the target entity, the discussed aspect, prior events, contrast, sarcasm, source reliability and time. A Graph-RAG sentiment pipeline can represent people, products, services, events, topics and opinions as connected nodes; retrieve both local evidence and graph-neighborhood summaries; and ask the LLM to classify sentiment with grounded rationales.

**Quantization and efficient adaptation.** The next layer reduces the memory and bandwidth cost of the model itself. Post-training quantization methods such as GPTQ compress weights to very low precision while preserving quality through approximate second-order information [3]. AWQ improves low-bit deployment by identifying activation-salient channels and protecting them through equivalent scaling, enabling practical 4-bit serving on desktop and mobile hardware [4]. QLoRA combines a frozen 4-bit base model with low-rank adapters so that large models can be fine-tuned on limited hardware while

preserving much of full-precision performance [5]. For a sentiment-analysis PhD workflow, this suggests a disciplined strategy: keep the base LLM quantized, train small adapters for domain language, and evaluate not only accuracy or F1, but also calibration, and minority-class behavior.

**KV-cache compression and long-context inference.** During autoregressive inference, the key-value (KV) cache stores prior attention states so the model does not recompute them for every new token. This cache grows with sequence length, batch size and model depth, becoming a major obstacle for long-context RAG. KIVI shows that KV-cache quantization can be made tuning-free by quantizing keys per-channel and values per-token, reducing memory while maintaining quality on Llama, Falcon and Mistral models [6]. SnapKV takes a selection approach, using prompt attention patterns to keep the positions that matter most for generation and discard less useful cache entries [7]. More recent online vector quantization work such as TurboQuant reports quality-neutral KV-cache compression at very low bit-widths for tested long-context settings [8]. In Graph-RAG, these methods matter because graph evidence can be broad: cache compression lets the system keep more retrieved claims, community summaries and conversation history inside the serving budget.

**Reinforcement and preference learning.** Efficiency is also behavioral. A model that gives grounded, concise and correct answers on the first attempt is cheaper than one that requires many retries. RLHF demonstrated that models can better follow user intent when supervised fine-tuning is followed by reward-model-based reinforcement learning [9]. Direct Preference Optimization (DPO) simplifies preference learning by avoiding an explicit reinforcement learning loop and optimizing directly on chosen/rejected response pairs; notably, it has been evaluated on sentiment-control tasks [10]. Reasoning-oriented RL, as in DeepSeek-R1, further shows that verifiable rewards can incentivize self-reflection and verification patterns, with distillation transferring reasoning behavior to smaller models [11]. For Graph-RAG sentiment analysis, rewards can encourage evidence-grounded labels, correct aspect-target pairing, refusal to overstate uncertain sentiment and concise explanations linked to retrieved graph evidence.

**Proposed integrated framework.** A practical system can combine these methods in one pipeline. First, domain documents, reviews, news and social-media posts are converted into a hybrid index: dense vectors for semantic similarity and a graph for entities, aspects, relations and temporal events. Second, a Graph-RAG retriever selects local passages and graph-community summaries. Third, a quantized LLM with LoRA or QLoRA adapters performs sentiment clas-

sification and explanation under KV-cache compression. Finally, preference or reinforcement learning tunes the model toward faithful evidence use and stable sentiment decisions. The evaluation should report macro-F1, latency, peak VRAM, throughput, cost per 1,000 classified items, citation faithfulness and error cases by sentiment target. This connects technical efficiency with research validity: the best model is not simply the largest one, but the one that produces trustworthy sentiment judgments under realistic resource constraints.

**Conclusion.** The strongest path to efficient LLMs is compositional. RAG and Graph-RAG make knowledge external and auditable; quantization and adapter tuning make models cheaper to train and serve; KV-cache compression makes long-context evidence practical; and reinforcement or preference learning improves useful output per token. For sentiment analysis, this combination can support systems that are more accurate, explainable and economical than parameter-only baselines.

### References

1. P.Lewis, E.Perez, A.Piktus et al., Retrieval-Augmented Generation for Knowledge-Intensive NLP Tasks, NeurIPS, 2020.
2. D.Edge, H.Trinh, N.Cheng et al., From Local to Global: A Graph RAG Approach to Query-Focused Summarization, arXiv:2404.16130, 2024.
3. E.Frantar, S.Ashkboos, T.Hoefler, D.Alistarh, GPTQ: Accurate Post-Training Quantization for Generative Pre-trained Transformers, ICLR, 2023.
4. J.Lin, J.Tang, H.Tang et al., AWQ: Activation-aware Weight Quantization for LLM Compression and Acceleration, MLSys, 2024.
5. T.Dettmers, A.Pagnoni, A.Holtzman, L.Zettlemoyer, QLoRA: Efficient Finetuning of Quantized LLMs, arXiv:2305.14314, 2023.
6. Z.Liu, J.Yuan, H.Jin et al., KIVI: A Tuning-Free Asymmetric 2bit Quantization for KV Cache, ICML, 2024.
7. Y.Li, Y.Huang, B.Yang et al., SnapKV: LLM Knows What You are Looking for Before Generation, arXiv:2404.14469, 2024.
8. A.Zandieh, M.Daliri, M.Hadian, V.Mirrokn, TurboQuant: Online Vector Quantization with Near-optimal Distortion Rate, arXiv:2504.19874, 2025.
9. L.Ouyang, J.Wu, X.Jiang et al., Training Language Models to Follow Instructions with Human Feedback, arXiv:2203.02155, 2022.
10. R.Rafailov, A.Sharma, E.Mitchell et al., Direct Preference Optimization: Your Language Model is Secretly a Reward Model, NeurIPS, 2023.
11. DeepSeek-AI, D.Guo, D.Yang et al., DeepSeek-R1: Incentivizing Reasoning Capability in LLMs via Reinforcement Learning, Nature, 2025.

## SINGULAR PERTURBATIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR DIFFERENTIAL OPERATOR EQUATIONS WITH A SMALL PARAMETER

**Musaev Hummet Kazim, Nabieva Aytac Amirastan**

(BDU, Mexanika və Riyaziyyat fakültəsi)  
gkm55@mail.ru, aytacnebiyeva97@mail.ru

**Abstract:** In this paper, the existence of the solution to the Cauchy problem for given differential equation with small positive parameter has been rigorously investigated and proven. the estimates have been derived for this solution in the homogeneous case.

**Keywords:** singular perturbation, cosine and sine operator functions, the Cauchy problem, the convergence problem.

In this work, we study the singular perturbation of the Cauchy problem associated with a second-order differential operator equation containing a small parameter, as well as its limiting first-order form

$$\begin{cases} -\varepsilon u''(t; \varepsilon) + u'(t; \varepsilon) + Au(t; \varepsilon) = f(t; \varepsilon), t \geq 0, \\ u(0; \varepsilon) = u_0(\varepsilon), u'(0; \varepsilon) = u_1(\varepsilon), \end{cases} \quad (1)$$

and

$$\begin{cases} u'(t) + Au(t) = f(t), t \geq 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (2)$$

Here,  $A$  is a densely defined, self-adjoint and nonnegative operator in a complex Banach space  $E$ .

To solve equation (1), let us introduce a new unknown function by making the substitution  $u(t; \varepsilon) = e^{t/2\varepsilon} v\left(\frac{t}{\varepsilon}; \varepsilon\right)$  [1]. Then the Cauchy problem (1) is expressed by the following equation with initial conditions:

$$\begin{cases} -\frac{1}{\varepsilon} v''(t; \varepsilon) + \left(\frac{1}{4\varepsilon} + A\right) v(t; \varepsilon) = e^{-\frac{t}{2\varepsilon}} f(\varepsilon t; \varepsilon), \\ v(0; \varepsilon) = u_0(\varepsilon), \\ v'(0; \varepsilon) = \varepsilon u_1(\varepsilon) - \frac{1}{2} u_0(\varepsilon). \end{cases} \quad (3)$$

By using the problem (3), the general solution of the problem (1) is as follows:

$$\begin{aligned} u(t; \varepsilon) = & e^{t/2\varepsilon} C(t; \varepsilon) u_0(\varepsilon) + e^{t/2\varepsilon} S(t; \varepsilon) \left[ \varepsilon u_1(\varepsilon) - \frac{1}{2} u_0(\varepsilon) \right] + \\ & + e^{t/2\varepsilon} \int_0^t S(t-s; \varepsilon) e^{-\frac{s}{2\varepsilon}} f(\varepsilon s; \varepsilon) ds. \end{aligned} \quad (4)$$

The solution is expressed in terms of cosine and sine operator functions. We establish uniform estimates and the convergence of the solution as  $\varepsilon \rightarrow 0$  [3].

Estimate of the problem (1) is expressed with the following inequality in the homogeneous case. So,

$$\|u(t; \varepsilon)\| \leq C_0 e^{\omega^2 t} (\|u_0(\varepsilon)\| + \varepsilon \|u_1(\varepsilon)\|). \quad (5)$$

To investigate the convergence of  $u(t; \varepsilon)$ , we use the asymptotic expansion of the Bessel function series [4]. For this convergence problem, the following theorem is proved [2]:

**Theorem 1.** Suppose that  $u_0(\varepsilon), u_1(\varepsilon) \in E$ . Thus,

$$u_0(\varepsilon) \rightarrow v, \varepsilon u_1(\varepsilon) \rightarrow u_0 - v \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Assume that  $u(t; \varepsilon)$  is the generalized solution of the equation (1) and the condition  $\frac{t_n}{\varepsilon_n} \rightarrow \infty$  is satisfied in the case  $t(\varepsilon) > 0$ . Then the following expression is convergent in  $t \geq t(\varepsilon)$ ;

$$u(t; \varepsilon) \rightarrow u(t). \quad (6)$$

Here, the function  $u(t)$  is a generalized solution of the equation (2). If  $\|u_0\|, \|v\|$  are bounded, then this convergence is uniform with respect to  $u_0, v$ .

### References

1. H. O. Fattorini, Singular Perturbation and Boundary Layer for an Abstract Cauchy Problem, *Journal of Math. Anal. and Appl.* 97 (1983), 529-571.
2. Hummet K. Musaev, Aytac A. Nabieva, ESTIMATE OF THE SOLUTION FOR DIFFERENTIAL OPERATOR EQUATION WITH SMALL PARAMETER, *Proceedings of IAM*, V.14, N.2, 2025, pp.203-213.
3. Musaev H.K., Maximal regularity of parameter dependent differential-operator equations on the halfline, *Baku, Journal of Contemporary Applied Mathematics*, 2019, V.9, N1, p.10-22.
4. M. Sova, Perturbations numeriques des evolutions parabolique et hyperbolique, *Casopis Pest. Mat.* 96 (1971 ), 406-425.

## PREDICTIVE ANALYTICS AND EARLY WARNING SYSTEMS IN HIGHER EDUCATION: A DATA SCIENCE FRAMEWORK FOR FORECASTING STUDENT ACHIEVEMENT

**Zeynalov İsmayil Bakhish oğlu**

*(BSU, Applied Mathematics and Cybernetics)*

*ismayil.zeynalov,bakhish@bsu.edu.az*

**Summary:** Modern higher education institutions generate unprecedented volumes of data through digital learning platforms, student information systems (SIS) and learning management systems. Systematic analysis of this data has led to the emergence of



*data-driven decision making (DDDM) as a methodological paradigm in education [1]. This work proposes a four-layer integrative data science framework for predicting student achievement and identifying at-risk students at an early stage in higher education. The framework combines data ingestion, processing, modelling and decision-support layers, synthesising international practice (Purdue Course Signals, Open University Analyse) and applying modern machine learning methods such as random forest, gradient boosting and deep learning [2,4,5]. Empirical evidence from international case studies indicates that systematic implementation can raise student retention rates by up to 12 percentage points, increase course completion rates from 72% to 84% and improve early identification of at-risk students from 40% to 78% [4,5]. The thesis also systematically addresses ethical and technical challenges including data privacy, algorithmic bias and institutional constraints [6,7].*

**Keywords:** *data-driven decision making, learning analytics, predictive analytics, machine learning, early warning systems, higher education, student retention.*

**Problem Statement.** Student dropout and academic underperformance remain among the most persistent challenges faced by higher education institutions worldwide. According to the OECD's Education at a Glance report, the average dropout rate at the bachelor level across OECD countries approaches 30% [3]. This has significant negative consequences for both individual career prospects and institutional efficiency. At the same time, the proliferation of digital education platforms (LMS, MOOC, SIS, xAPI-based behavioural systems) has produced unprecedented volumes of learning data; however, much of this data remains fragmented across isolated systems and is rarely used for analytical purposes [1,2]. Traditional reactive management approaches are no longer sufficient under such conditions.

This work addresses the gap between available institutional data and actionable insight by formulating the central research problem as follows: how can a data science framework be designed that processes data collected from existing digital systems in higher education to predict student achievement reliably and to identify at-risk students at an early stage, while remaining ethically responsible and institutionally sustainable?

**Objectives.** The main objectives of this study are: (1) to systematically analyse the theoretical foundations of DDDM in higher education and synthesise the relevant international practice [1,3]; (2) to identify the principal data sources (SIS, LMS, attendance, assessment) and to compare modern machine learning methods applicable to predicting student performance [2,5]; (3) to propose a four-layer integrative data science framework that can be implemented at the institutional level; (4) to evaluate the expected effectiveness of the

framework by synthesising empirical results from international pilot deployments such as Purdue Course Signals and Open University Analyse [4]; and (5) to identify the ethical (data privacy, algorithmic bias) and technical constraints that arise during implementation [6,7].

**Methodology.** The study follows a systematic literature review and international case-study synthesis methodology and is structured in four stages. In the first stage, the theoretical foundations of DDDM and the data collection mechanisms across institutional sources (SIS, LMS, attendance systems, assessment platforms, xAPI-based behavioural data) are analysed [1,2]. In the second stage, machine learning methods used in predictive analytics in education - including classification, regression, clustering, deep learning and natural language processing - are systematically compared on the basis of recent empirical literature [5,8].

In the third stage, a four-layer integrative framework is proposed: (a) Data Layer - automated collection from heterogeneous sources via ETL pipelines and integration into a centralised data warehouse; (b) Processing Layer - data cleaning, missing-value imputation, normalisation and feature engineering; (c) Modelling Layer - construction of machine learning models, validation, ensemble approaches and integration of explainable AI methods such as SHAP and LIME for interpretability; and (d) Decision Support Layer - interactive dashboards, automated early warning notifications and human-centred recommendation tools for instructors and academic advisors [2,4,8].

In the fourth stage, empirical results from international deployments - Purdue Course Signals, the Open University Analyse system and the comparative study by Yağcı [5] - are evaluated. Model performance is compared using classification accuracy, precision, recall, F1-score and ROC-AUC metrics. Ethical and institutional aspects are examined within the context of GDPR, FERPA and applicable national legislation [6,7].

**Expected Contributions.** Empirical evidence from international practice indicates that the effective implementation of predictive analytics in higher education can raise student retention rates from 68% to 80% (a 12 percentage point increase), improve course completion rates from 72% to 84% and increase the accuracy of early identification of at-risk students from 40% to 78% [4,5]. Machine learning methods, particularly random forest and gradient boosting models, achieve classification accuracy in the range of 70–85% in higher education contexts; ensemble approaches and explainable AI methods further enhance reliability and faculty acceptance [5,8].

The expected contributions of this work are threefold. Conceptually, the

study provides an integrative framework that links DDDM theory, data infrastructure and data governance principles into a unified institutional model [1,3]. Technically, it documents a modular architecture, data flow design and concrete technology stack that other institutions can adapt, lowering the barrier to building data science-ready educational platforms [2,8]. Practically, the framework emphasises adaptation to the Azerbaijani higher education context and integrates ethical considerations - privacy, algorithmic fairness and transparency - as core design principles, in line with current discussions on responsible AI in education [6,7].

### Reference

1. K.P.Boudett, E.A.City, R.J.Murnane Data Wise: A Step by Step Guide to Using Assessment Results to Improve Teaching and Learning, Harvard Education Press, 2005.
2. A.G.Picciano The Evolution of Big Data and Learning Analytics in American Higher Education, Routledge, 2012.
3. OECD Education at a Glance 2020: OECD Indicators, OECD Publishing, 2020.
4. K.E.Arnold, M.D.Pistilli "Course Signals at Purdue: Using Learning Analytics to Increase Student Success," Proceedings of the 2nd International Conference on Learning Analytics and Knowledge, 267-270, 2012.
5. M.Yağcı "Educational Data Mining: Prediction of Students' Academic Performance Using Machine Learning Algorithms," Smart Learning Environments, 9, 11, 2022.
6. A.Pardo, G.Siemens "Ethical and Privacy Principles for Learning Analytics," British Journal of Educational Technology, 45(3), 438-450, 2014.
7. W.Holmes, K.Porayska-Pomsta, K.Holstein, et al. "Ethics of AI in Education: Towards a Community-Wide Framework," International Journal of Artificial Intelligence in Education, 32, 504-526, 2022.
8. Z.Ersözlü, S.Taheri, I.Koch "A Review of Machine Learning Methods Used for Educational Data," Education and Information Technologies, 29, 22125-22145, 2024.

## İSTİLİKKEÇİRMƏ TƏNLİYİ ÜÇÜN OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ İDARƏEDİCİNİN VARLIĞI BARƏDƏ

**Tağıyev Hikmət Tahir oğlu, Hüseynov Səyyar Nəsimi oğlu**

*(Bakı Dövlət Universiteti, BDU, Sabah fakültəsi)*

*tagiyevht@gmail.com, huseynovsayyar@gmail.com*

**Xülasə:** *İşdə istilikkeçirmə tənliyi ilə təsvir olunan paylanmış parametrlı sistem üçün optimal idarəetmə məsələsində optimal idarəedicinin mövcudluğu araşdırılmışdır. Məsələnin riyazi qoyuluşu verilmiş, admissible idarəedicilər çoxluğu müəyyən edilmiş və*

məqsəd funksionalı əsasında optimal həllin mövcudluq şərtləri tədqiq olunmuşdur. Konvekslik, aşağıdan məhdudluq və zəif kompaktlıq xüsusiyyətlərindən istifadə etməklə optimal idarəedicinin varlığı əsaslandırılmışdır.

**Açar sözlər:** Optimal idarəetmə, istilikkeçirmə tənliyi, paylanmış parametrlı sistem, məqsəd funksionalı, mövcudluq teoremi.

Parabolik tip tənliklərlə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələləri həm nəzəri, həm də tətbiqi baxımdan geniş tədqiq olunur [1–3]. İstilik yayılması proseslərinin idarə olunması zamanı əsas məqsəd sistemin vəziyyətini əvvəlcədən verilmiş arzuolunan vəziyyətə yaxınlaşdırmaqdır.

İstilikkeçirmə prosesi aşağıdakı tənliklə təsvir olunur:

$$u_t - k u_{xx} = v(x, t), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T)$$

burada  $(u(x, t))$  sistemin vəziyyət funksiyası,  $(v(x, t))$  isə idarəedici funksiyadır.

Başlangıç və sərhəd şərtləri aşağıdakı kimi verilsin:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

İdarəedicilər çoxluğu aşağıdakı kimi müəyyən edilir:

$$U_{ad} = \{v(x, t) \in L^2(Q): v_{\min} \leq v(x, t) \leq v_{\max}\}$$

Məqsəd funksionalı:

$$J(v) = \int_0^T \int_0^l (u - u_d)^2 dx dt + \alpha \int_0^T \int_0^l v^2 dx dt \rightarrow \min$$

Burada  $(u_d(x, t))$  arzu olunan vəziyyət funksiyası,  $(\alpha > 0)$  isə tənzimləyici parametrdir.

Optimal idarəedicinin mövcudluğunu göstərmək üçün funksionalın əsas xassələri araşdırılır. Funksional aşağıdan məhduddur və konveksdir. Bundan əlavə, admissible idarəedicilər çoxluğu qapalı və məhduddur. Bu xüsusiyyətlər funksional analiz nəticələri ilə birlikdə minimumun mövcudluğunu təmin edir [2,4].

**Teorem.** Əgər  $(U_{ad})$  boş olmayan, qapalı və konveks çoxluqdirsə,  $(J(v))$  funksionalı isə aşağıdan məhdud və zəif yarımfasiləsizdirsə, onda ən azı bir optimal idarəedici  $(v^*(x, t) \in U_{ad})$  mövcuddur.

**İsbat.**  $(J(v))$  funksionalı aşağıdan məhdud olduğuna görə minimallaşdıran ardıcılıq mövcuddur.  $(U_{ad})$  çoxluğunun zəif kompaktlığına əsasən bu ardıcılıqdan zəif yığılan altardıcılıq seçmək mümkündür. Funksionalın zəif yarımfasiləsizliyi nəticəsində limit element üçün minimum qiymət alınır. Deməli, optimal idarəedici mövcuddur.

Beləliklə, istilikkeçirmə tənliyi üçün qoyulmuş optimal idarəetmə məsələsində idarəedicinin varlığı ciddi riyazi əsaslarla təsdiq olunur və bu nəticə sonrakı optimalıq şərtlərinin qurulması üçün baza rolunu oynayır.

### Ədəbiyyat

1. Həsənov K.Q., Quliyev H.F., Yaqubov M.H., Yusubov Ş.Ş. *Optimallaşdırma üsulları*. Bakı, 2017, 592 s.
2. Егоров А.И. *Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами*. М.: Наука, 1978, 464 с.
3. Лионс Ж.Л. *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными*. М.: Мир, 1972, 416 с.
4. Лурье К.А. *Оптимальное управление в задачах математической физики*. М.: Наука, 1975, 480 с.
5. Вайнберг М.М. *Вариационный метод и метод монотонных операторов*. М.: Наука, 1972, 416 с.

## İSTİLİKKEÇİRMƏ TƏNLIYI ÜÇÜN OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ ZƏRURİ ŞƏRTİN ÇIXARILMASI BARƏDƏ

**Tagiyev Hikmət Tahir oğlu, Hüseynov Səyyar Nəsimi oğlu**

*(Bakı Dövlət Universiteti, BDU, Sabah fakültəsi)*

*tagiyevht@gmail.com, huseynovsayyar@gmail.com*

**Xülasə:** *İşdə istilikkeçirmə tənliyi ilə təsvir olunan optimal idarəetmə məsələsi üçün optimalıq şərtləri araşdırılmışdır. Məqsəd funksionalı və sistemin dinamikası nəzərə alınaraq Laqranj funksiyası qurulmuş, köməkçi (adjoint) məsələ çıxarılmış və optimal idarəedicinin ödəməli olduğu zəruri şərt əldə edilmişdir. Alınmış nəticələr paylanmış parametrlı sistemlərin optimal idarə olunmasında mühüm nəzəri əhəmiyyət daşıyır.*

**Açar sözlər:** *Optimal idarəetmə, istilikkeçirmə tənliyi, zəruri şərt, Laqranj funksiyası, qoşma məsələ, variasiya üsulu*

Parabolik tip tənliklərlə təsvir olunan sistemlər üçün optimal idarəetmə məsələlərinin həllində optimalıq şərtlərinin çıxarılması əsas mərhələlərdən biridir [1–3]. İstilikkeçirmə prosesi aşağıdakı tənliklə verilsin:

$$u_t - ku_{xx} = v(x, t), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T)$$

Başlanğıc və sərhəd şərtləri:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0$$

Məqsəd funksionalı aşağıdakı kimi götürülür:

$$J(v) = \int_0^T \int_0^l ((u - u_d)^2 + \alpha v^2) dx dt$$

Optimalıq şərtini çıxarmaq üçün Laqranj funksiyası qurulur:

$$\mathcal{L}(u, v, p) = J(v) + \int_0^T \int_0^1 p(x, t)(u_t - ku_{xx} - v(x, t)) dx dt$$

Burada  $(p(x, t))$  köməkçi funksiyadır.

Variasiya yanaşmasına əsasən köməkçi məsələ aşağıdakı formada alınır:

$$-p_t - kp_{xx} = 2(u - u_d)$$

Son şərt:

$$p(x, T) = 0$$

Laqranj funksiyasının idarəedici funksiyaya görə variasiyasını sifra bərabərləşdirsək:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} = 2\alpha v - p = 0$$

Buradan optimal idarəedici üçün zəruri şərt alınır:

$$v^*(x, t) = \frac{p(x, t)}{2\alpha}$$

Bu ifadə göstərir ki, optimal idarəetmə funksiyası köməkçi funksiyanın qiymətləri vasitəsilə müəyyən olunur və sistemin vəziyyəti ilə birbaşa əlaqəlidir [2,4].

Beləliklə, istilikkeçirmə tənliyi üçün optimal idarəetmə məsələsində zəruri optimalıq şərti variasiya üsulu vasitəsilə əldə edilir və optimal idarəedici-nin qurulmasında əsas rol oynayır.

### Ədəbiyyat

1. Həsənov K.Q., Quliyev H.F., Yaqubov M.H., Yusubov Ş.Ş. *Optimallaşdırma üsulları*. Bakı, 2017, 592 s.
2. Егоров А.И. *Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами*. М.: Наука, 1978, 464 с.
3. Лионс Ж.Л. *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными*. М.: Мир, 1972, 416 с.
4. Лурье К.А. *Оптимальное управление в задачах математической физики*. М.: Наука, 1975, 480 с.
5. Вайнберг М.М. *Вариационный метод и метод монотонных операторов*. М.: Наука, 1972, 416 с.

## MÜNDƏRİCAT

### **Z.D.Abbasov**

QEYRİ-BİRCİNS MÜHİTDƏ İSTİLİK DALĞALARININ YAYILMASININ  
 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  FƏZASINA GÖRƏ RİYAZİ MODELƏŞDİRİLMƏSİ .....5

### **S.Q.Abbasova, A.İ.Xəlilova, M.Ə.Abasov**

AZƏRBAYCANDA ƏHALİ QOCALMASI: DEMOQRAFİK KEÇİD VƏ  
SOSIAL-İQTİSADI ADAPTASIYA .....8

### **S.Q.Abbasova, M.Ə.Abasov**

AZƏRBAYCANDA ƏHALİNİN DOĞUM ƏMSALININ TƏHLİLİ .....10

### **Ş.A.Abbasova, N.C.Şahmarova**

MİLLİ İQTİSADI TƏHLÜKƏSİZLİK: RƏQƏMSAL MÜHİTDƏ  
QIYMƏTLƏNDİRMƏ VƏ İDARƏETMƏ.....12

### **T.N.Abdurahmanova**

SİMİN RƏQS TƏNLIYI ÜÇÜN GECİKƏN ARQUMENTLİ OPTİMAL  
İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ.....14

### **Ə.R.Abidli**

KANONİK HİPERBOLİK İNTEQRO-DİFERENSİAL TƏNLIKLƏ TƏSVİR  
OLUNAN BİR OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ  
ÜÇÜN ZƏRURİ VƏ KAFİ ŞƏRT .....16

### **Ə.R.Abidli**

XƏTTİ OLMAYAN OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ  
OPTİMALLIQ ÜÇÜN ZƏRURİ ŞƏRTLƏR .....19

### **F.A.Ağayeva**

RƏQƏMSAL TRANSFORMASIYA ŞƏRAİTİNDƏ SÜNİ İNTELLEKTİN  
TƏHSİL VƏ CƏMIYYƏTƏ TƏSİRİNİN ELMİ TƏHLİLİ .....21

### **F.A.Ağayeva**

IoT VƏ BIG DATA EKOSİSTEMİNİN QARŞILIQLI ƏLAQƏSİ.....23

### **F.A.Ağayeva, İ.M.Kazımova**

BIG DATA ANALİTİKASI VƏ SÜNİ İNTELLEKTİN İNTEQRASIYASI.....25

### **M.H.Ağayeva, T.A.Ələkbərov**

MODELƏŞDİRMƏNİN SIĞORTA VƏ MALİYYƏ MÜHİTİNDƏ BAŞ  
VERƏN BƏZİ EKSTREMAL HADİSƏLƏRƏ TƏTBİQİ .....28

### **M.H.Ağayeva, T.A.Ələkbərov**

SIĞORTA RİSKLƏRİNİN QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİNDƏ EKSTREMAL  
MODELƏRİN TƏTBİQİ .....31

**M.H.Ağayeva, S.E.Əsədova**

SİĞORTA ŞİRKƏTLƏRİNDƏ KAPİTAL ADEKVATLIĞI VƏ AKTİV-PASSİV İDARƏETMƏSİ: DİNAMİK MALİYYƏ ANALİZİ YANAŞMASI .....34

**M.H.Ağayeva, S.E.Əsədova**

SİĞORTA ŞİRKƏTLƏRİNDƏ DİNAMİK MALİYYƏ MODELİNİN TƏTBİQİ.....36

**M.H.Ağayeva, K.Ə.Həməyəva**

SİĞORTADA AZADOLMA MƏBLƏĞİNİN OPTİMAL SƏVİYYƏSİNİN MÜƏYYƏN EDİLMƏSİ .....37

**M.H.Ağayeva, K.Ə.Həməyəva, R.O.Hacıyeva**

RİSKLƏRİN OPTİMAL PAYLANMASI VƏ TƏKRAR SİĞORTA MODELİNİN QURULMASI .....40

**X.İ.Ağayeva**

XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMA MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİNİN XASSƏLƏRİ.....42

**M.Ç.Ağazadə**

BUL DƏYİŞƏNLİ XƏTTİ TƏNLİKLƏR SİSTEMİNİN BİR EKVİVALENT TƏNLİYƏ GƏTİRİLMƏSİ.....45

**M.Ç.Ağazadə**

XƏTTİ TAMƏDƏDLİ TƏNLİKLƏR SİSTEMİ ƏVƏZİNƏ ONA EKVİVALENT OLAN BİR TƏNLİYİN QURULMASI .....47

**A.A.Allahverdi**

KƏSİLMƏ ŞƏRTLƏRİ OLAN HİPERBOLİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİR MƏSƏLƏ HAQQINDA.....49

**S.N.Alverdiyeva**

HARMONİK OSSİLYATORUN MƏXSUSİ FUNKSİYALARI ÜZRƏ AYRILIŞ DÜSTURU.....51

**C.H.Axundzadə**

SÜNİ İNTELLEKT ƏSASLI MÜDAXİLƏ AŞKARLAMA SİSTEMLƏRİNİN EFFEKTİVLİYİ.....53

**A.M.Ataşiyeva, V.Ə.Bayramov**

BƏRPA FUNKSİYASININ ASİMPTOTİK AYRILIŞINDAKI QALIQ HƏDDİN ÜÇÜNCÜ DƏRƏCƏLİ POLİNOMIAL ÇƏKİLİ VARIANTININ İNTEQRALLANMASI.....55

**N.M.Baxışov, Z.R.Bəkirova, G.K.Mahmudova**

SİĞORTA ŞİRKƏTLƏRİNDƏ SİĞORTA FƏALİYYƏTİNİN EKONOMETRİK TƏHLİLİ VƏ MALİYYƏ DAYANAQLIĞININ QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ .....56



**A.Z.Baxşiyeva**

|                                                                                                                                               |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| İSTEHSALATDA BƏDBƏXT HADİSƏLƏR VƏ PEŞƏ XƏSTƏLİKLƏRİ<br>ÜZRƏ SIĞORTA TARİFLƏRİNİN AKTUAR ƏSASLARLA<br>HESABLANMASI VƏ TƏKMİLLƏŞDİRİLMƏSİ ..... | 59 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

**A.Z.Baxşiyeva**

|                                                                                        |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| İSTEHSALATDA SIĞORTA TARİFLƏRİNİN<br>DİFERENSİALLAŞDIRIL-MASININ AKTUAR MODELƏRİ ..... | 63 |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----|

**L.S.Bayramova, F.H.Rəhimov**

|                                                     |    |
|-----------------------------------------------------|----|
| BƏRPA FUNKSİYASI VƏ ONUN ASİMPTOTİK XASSƏLƏRİ ..... | 64 |
|-----------------------------------------------------|----|

**L.S.Bayramova, F.H.Rəhimov**

|                                                                                        |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| TƏSADÜFİ DOLAŞMA VƏ ONUN XƏTTİ SƏRHƏD<br>FUNKSİYONALLARININ ASİMPTOTİK XASSƏLƏRİ ..... | 65 |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----|

**Ş.İ.Cəbrayilov, H.M.Ələsgərov**

|                                                                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ATMOSFERİN ÇİRKLƏNMƏSİ DİNAMİKASININ RİYAZİ MODELİNİN<br>QURULMASI VƏ SONLU FƏRQLƏR ÜSULU İLƏ ƏDƏDİ HƏLLİ ..... | 66 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

**Ş.İ.Cəbrayilov, H.M.Ələsgərov**

|                                                                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| MAŞIN TƏLİMİ ÜSULLARINDAN İSTİFADƏ ETMƏKLƏ İQLİM<br>DƏYİŞİKLİKLƏRİNİN ANALİZ EDİLMƏSİ VƏ<br>PROQNOZLAŞ-DIRILMASI ..... | 68 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

**İ.B.Dadaşova**

|                                        |    |
|----------------------------------------|----|
| İNSAN-SÜNİ İNTELLEKT ƏMƏKDAŞLIĞI ..... | 70 |
|----------------------------------------|----|

**A.S.Eyvazlı, O.M.Məmmədov**

|                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------|----|
| MÜXTƏLİFLİKLƏRİN İNTERPRETASIYALAR QƏFƏSİNDƏ POST<br>MÜXTƏLİFLİYİ..... | 74 |
|------------------------------------------------------------------------|----|

**H.İ.Əhmədov, S.H.Həsənov**

|                                                                                        |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| DÜZBUCAQLI OBLASTDA ORLİC-SOBOLEV FƏZALARINDA BİR<br>QEYRİ-LOKAL MƏSƏLƏ HAQQINDA ..... | 76 |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----|

**S.Z.Əhmədov, A.X.Xankişiyev**

|                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------|----|
| ÜÇ NÖQTƏLİ BİR SPEKTRAL MƏSƏLƏ ÜÇÜN AYRILIŞ DÜSTURU ..... | 77 |
|-----------------------------------------------------------|----|

**Ç.F.Əhmədova**

|                                                                                                                   |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| İNTEVALLI BİR MƏHDUDİYYƏTLİ XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMA<br>MƏSƏLƏSİNİN OPTİMİST VƏ PESSİMİST HƏLLƏRİNİN TAPILMASI ..... | 78 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

**Ç.F.Əhmədova**

|                                                                                                                     |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| VERİLƏNLƏRİ İNTEVALLARDA OLAN XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMA<br>MƏSƏLƏSİNİN OPTİMİST VƏ PESSİMİST HƏLLƏRİNİN TAPILMASI ..... | 80 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

**J.B.Əhmədova, A.T.Ağazadə**

|                                                                                                 |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| GECİKMƏYƏ MALİK BİR QEYRİ-XƏTTİ OPTİMAL İDARƏETMƏ<br>MƏSƏLƏSİNDƏ EYLER TƏNLIYİNİN ANALOQU ..... | 83 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

**J.B.Əhmədova, A.T.Ağazadə**

PAYLANMIŞ PARAMETRLİ GECİKMƏYƏ MALİK BİR XƏTTİ OPTİMAL  
İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ÜÇÜN ZƏRURİ VƏ KAFİ  
ŞƏRT .....86

**A.Ə.Əkbərov, R.O.Hacıyeva, L.E.Cəfərova**

HÜSEYNOV FƏZALARI TİPLİ  $H_{\alpha\beta}^{\gamma}(R_m^+)$  FƏZALARININ ÇƏKİLİ  
HÖLDER FƏZALARI KİMİ TƏSVİRİ .....89

**R.T.Əliyev, F.Ş.Ağayeva**

SABİT İNTENSİVLİK FUNKSİYALI PUASSON MODELİNDƏ TOPLAM  
ZƏRƏR MİQDARININ MOMENTLƏRİNİN MÜQAYİSƏLİ TƏHLİLİ.....90

**R.T.Əliyev, F.Ş.Ağayeva**

DƏYİŞƏN İNTENSİVLİK FUNKSİYALI PUASSON MODELİNDƏ  
TOPLAM ZƏRƏR MİQDARININ MOMENTLƏRİNİN TƏDQIQI.....93

**R.T.Əliyev, G.M.Dadaşova**

MARSHALL-OLKİN SXEMİ İLƏ ÜMUMİLƏŞDİRİLMİŞ PARETO  
PAYLANMASI ÜÇÜN ORTA QALAN ÖMÜR MÜDDƏTİNİN TƏDQIQI.....95

**R.T.Əliyev, G.M.Dadaşova**

GÖZLƏNİLƏN İTKİSİNİN MİQDARI VEYBUL PAYLANMASINA  
MALİK OLAN SİĞORTA PORTFELİ ÜÇÜN RİSK ALTINDAKI DƏYƏRİN  
TƏDQIQI.....97

**R.T.Əliyev, A.A.Kazımxadə**

ETİBARLILIQ NƏZƏRİYYƏSİNDƏ MARKOV PROSESİNƏ ƏSASLANAN  
EHTİMAL MODELƏRİNİN TƏHLİLİ.....100

**R.T.Əliyev, A.A.Kazımxadə**

ETİBARLILIQ NƏZƏRİYYƏSİNDƏ PALMA AXINI VƏ TƏSADÜFİ  
PROSESLƏR ƏSASINDA TƏHLİL .....102

**R.T.Əliyev, A.Ş.Məhərrəmov**

XƏTTİ REQRESSİYA MODELİNDƏ QEYRİ-SƏLİS QIYMƏTLƏNDİRMƏ .....105

**R.T.Əliyev, A.Ş.Məhərrəmov**

QEYRİ-SƏLİS REQRESSİYA MODELİNDƏ ƏN KİÇİK KVADRATLAR  
ÜSULU İLƏ PARAMETR QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ .....107

**R.T.Əliyev, P.V.Vəliyeva**

TƏSADÜFİ TƏLƏB VƏ TƏKLİFLİ NƏQLİYYAT MƏSƏLƏSİNİN  
TƏDQIQI.....110

**R.T.Əliyev, P.V.Vəliyeva**

TƏSADÜFİ XƏRC ƏMSALLI NƏQLİYYAT MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİ  
HAQQINDA.....111

**B.Ə.Əliyeva**

HƏYAT SIĞORTASINDA ÖLÜM CƏDVƏLLƏRİNİN NƏZƏRİ ƏSASLARI  
VƏ TƏTBİQİ XÜSUSİYYƏTLƏRİ .....113

**P.E.Əlizadə, K.S.Ələkbərzadə**

POPULYASIYA DİNAMİKASININ RİYAZİ MODELİ VƏ ONUN ŞƏBƏKƏ  
ÜSULLARI ƏSASINDA HƏLLİ .....116

**P.E.Əlizadə, K.S.Ələkbərzadə**

QEYRİ-MƏHDUD TƏK POPULYASIYANIN DİSKRET MODELİNİN  
QURULMASI .....119

**F.S.Əsədova**

BİR GECİKMƏYƏ MALİK VOLTERRA TİP FƏRQ TƏNLİKLƏRİ İLƏ  
TƏSVİR OLUNAN OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ  
OPTİMALLIQ ŞƏRTİ .....120

**F.S.Əsədova**

BİR GECİKMƏYƏ MALİK VOLTERRA TİP FƏRQ TƏNLİKLƏRİ İLƏ  
TƏSVİR OLUNAN QEYRİ-XƏTTİ OPTİMAL İDARƏETMƏ  
MƏSƏLƏSİNDƏ I və II TƏRTİB ZƏRURİ ŞƏRTLƏR .....123

**İ.R.Əsgərova**

İQTİSADİ MƏSƏLƏNİN HƏLLİNDƏ MÜVAFİQ OPTİMALLAŞDIRMA  
ÜSULUNUN SEÇİLMƏSİ .....126

**İ.R.Əyyubova, S.Z.Əhmədov**

BİR SPEKTRAL MƏSƏLƏNİN QRİN FUNKSIYASININ  
QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ HAQQINDA .....128

**H.E.Fərzəliyeva**

AXIN PARAMETRLƏRİNİN TƏYİNİNİN ƏDƏDİ MODELLEŞDİRİLMƏSİ .....130

**H.E.Fərzəliyeva**

SÜZÜLMƏ PROSESİNDƏ PARAMETRLƏRİN İDENTİFİKASIYALI  
TƏYİNİ .....133

**S.S.Hacıyeva**

TƏSADÜFİ GƏRGİNLİK ALTINDA OLAN SİLİNDRDƏ İSTİLİKKEÇİRMƏ  
MƏSƏLƏSİNİN STOXASTİK TƏHLİLİ .....136

**S.S.Hacıyeva**

TƏSADÜFİ TEMPERATURLU MÜHİTDƏ YERLƏŞƏN SİLİNDRİN  
OXUNDAN KEÇƏN MÜSTƏVİLƏRDƏ İSTİLİYİN YAYILMASI .....138

**V.M.Həbibov, Ə.Ə.Bəşirli**

KOMPÜTER MODELLEŞDİRİLMƏSİ VASİTƏSİLƏ RİYAZİYYAT  
BİLİKLƏRİNİN PEŞƏ FƏNLƏRİ İLƏ İNTEQRASIYASININ TƏDRİSDƏ  
TƏTBİQİ .....140

**V.M.Həbibov, A.İ.Əliyeva**

ÜMUMTƏHSİL MƏKTƏBİNDƏ FUNKSIYA ANLAYIŞININ  
FORMALAŞDIRILMASINA MÜXTƏLİF YANAŞMALAR .....141

**R.A.Həmidov, Ş.Ə.Həbibov**

RIYAZİYYATIN TƏDRİSİNDƏ KEYS TEXNOLOGİYASINDAN İSTİFADƏ .....143

**R.H.Həmidov, T.R.Qurbanlı**

ÜMUMİLƏŞMİŞ LEONTİYEV MODELİNƏ GÖRƏ QURULMUŞ QƏRAR  
QƏBULETMƏNİN ÇOXKRİTERİYALI MƏSƏLƏSİ VƏ ONUN HƏLLİ .....147

**R.H.Həmidov, T.R.Qurbanlı**

QƏRAR QƏBULETMƏNİN İKİ KRİTERİYALI BİR MƏSƏLƏSİ VƏ ONUN  
HƏLLİ .....148

**Ç.E.Hərbizadə**

QEYRİ-HƏYAT SIĞORTASINDA SIĞORTA EHTİYATLARININ  
STATİSTİK QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ VƏ EHTİYAT RİSKİNİN NƏZƏRİ  
MODELLƏSDİRİLMƏSİ .....149

**N.Ə.Həsənova, S.Ə.Hüseynova**

İNFÖRMASIYA SİSTEMLƏRİNDƏ KİBERTƏHLÜKƏSİZLİK  
İNSİDENTLƏRİNİN İDARƏ EDİLMƏSİ .....152

**N.Ə.Həsənova, C.K. Quliyev**

VEB RESURLARDA İSTİFADƏÇİ AUTENTİFİKASIYASI İLƏ  
İNFÖRMASIYA TƏHLÜKƏSİZLİYİNİN TƏMİN EDİLMƏSİ .....155

**N.N.Həsənova**

GARCH, EGARCH VƏ TGARCH MODELƏRİNİN QURULMASI VƏ  
MÜQAYİSƏLİ QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ: EUR/USD MƏZƏNNƏSİ  
ƏSASINDA EMPİRİKİ TƏHLİL .....158

**S.A.Həşimov, X.İ.Ağayeva**

XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMADA İKİLİ QIYMƏTLƏNDİRMƏLƏRİN  
DAYANIQLIQ ANALİZİ .....161

**S.A.Həşimov, İ.R.Əsgərova**

MƏNFƏƏTİN MAKSİMUMLAŞDIRILMASI MƏSƏLƏNİN İQTİSADI-  
RIYAZİ MODELİNİN QURULMASI .....164

**Y.İ.Hüseynova, İ.M.Kazımova, S.Ə.Cavadzadə**

MAŞIN ÖYRƏNMƏSİ ALQORİTMLƏRİNİN SƏS TANIMADA  
EFFEKTİVLİYİ .....167

**Y.İ.Hüseynova, A.E.Məmmədli**

SƏS SİQNALLARININ TANINMASINDA ƏLAMƏT SEÇİMİ  
METODLARININ EFFEKTİVLİYİNİN TƏDQİQİ .....169

**Y.İ.Hüseynova, K.N.Məmmədova**

RƏQƏMSAL SÜRƏT: HESABLAMA METODLARINDAN ALQORİTMİK  
DÜŞÜNCƏYƏ.....171

**Y.İ.Hüseynova, N.B.Rəsulov**

SWIFT PROQRAMLAŞDIRMA DİLİ ƏSASINDA iOS TƏTBİQLƏRİNİN  
TƏHLÜKƏSİZ VƏ EFFEKTİV HAZIRLANMASI .....174

**K.İ.İbrahimova**

REKURSİV FUNKSİYALARIN İŞLƏMƏ PRİNSİPİNİN MÜQAYİSƏLİ  
TƏHLİLİ .....178

**R.K.İsgəndərov, N.R.Kərimli**

TİBBİ SİĞORTA PORTFELİNİN ZƏRƏRLİLİK DƏRƏCƏSİNİN  
DEMOQRAFİK FAKTORLAR ƏSASINDA QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ .....181

**N.C.Kamilzadə**

AYRILMAYAN SƏRHƏD ŞƏRTLİ DİFFUZİYA OPERATORUNUN  
MƏXSUSİ ƏDƏDLƏRİNİN ASİMPOTOTİKASI.....183

**A.A.Kazımsadə**

FRAKSİONAL TÖRƏMƏLİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ƏSASINDA  
YADDAŞ EFFEKTİV TEXNİKİ SİSTEMLƏRİN ETİBARLILIQ  
MODELLƏRİNİN QURULMASI.....185

**A.A.Kazımsadə**

ETİBARLILIQ NƏZƏRİYYƏSİNDƏ PALMA AXINI VƏ TƏSADÜFİ  
PROSESLƏR ƏSASINDA TƏHLİL .....188

**R.A.Qasimov, F.S.Adıgözülova**

VEKTOR METODUNUN HƏNDƏSƏ MƏSƏLƏLƏRİN HƏLLİNƏ  
TƏTBİQİ METODİKASI .....191

**Ş.F.Qəhrəmanov**

ÜMUMİLƏŞDİRİLMİŞ XƏTTİ MODELƏRİN MAHİYYƏTİ VƏ NƏZƏRİ  
ƏSASLARI.....194

**Ş.F.Qəhrəmanov**

QEYRİ-HƏYAT SİĞORTASINDA SİĞORTA HAQLARININ  
HESABLANMASINDA ÜMUMİLƏŞDİRİLMİŞ XƏTTİ MODELƏR.....196

**N.Ə.Quliyeva, L.E.İsmayilzadə**

AZƏRBAYCANDA AĞIR XƏSTƏLİKLƏRƏ TUTULMALARIN  
STATİSTİKASINA DAİR ARAŞDIRMA.....199

**N.Ə.Quliyeva, L.E.İsmayilzadə**

YAŞ VƏ CİNS ÜZRƏ SAĞALMAZ XƏSTƏLİKLƏRİN AZƏRBAYCAN  
ƏHALİSİNİN DEMOQRAFİK GÖSTƏRİCİLƏRİNƏ TƏSİRİ.....201

**A.M.Quliyeva, A.M.Ocaqverdiyeva**

HİBRİD ÜSULU İLƏ RUNQE-KUTTA ÜSULLARININ BİR MÜQAYİSƏSİ .....204

**N.Ə.Quliyeva, Ş.M.Rəhimzadə**

SÜNİ İNTELLEKTİN BİZNESDƏ TƏTBİQİ VƏ EFFEKTİVLİYİ .....205

**İ.Ə.Qurbanov, F.A.Abbasova**

EPİDEMİOLOJİ PROSESLƏRİN STOXAŞTİK MODELƏR ƏSASINDA  
STATİSTİK ANALİZİ VƏ EHTİMAL PROQNOZLAŞDIRILMASI .....207

**İ.Ə.Qurbanov, F.A.Abbasova**

YOLUXUCU XƏSTƏLİKLƏRİN YAYILMA DİNAMİKASININ SIR MODELİ  
ƏSASINDA ƏDƏDİ ANALİZİ VƏ PROQNOZLAŞDIRILMASI.....209

**Z.O.Mahmudov**

BƏZİ İQTİSADİ MODELƏRDƏ İNTEQRALIN TƏTBİQİ .....212

**T.M.Mahmudzadə**

ÜST QATI MÜXTƏLİF ELASTİK MATERIALDAN İBARƏT  
YARIMMÜSTƏVİDƏ NÖQTƏVİ İMPULS TƏSİRİNİN TƏDQİQİ .....214

**A.Ə.Mehdiyev, G.N.Mustafayeva**

BİR DÖRDTƏRTİBLİ XÜSUSİ TÖRƏMƏLİ TƏNLİK ÜÇÜN  
QEYRİ- LOKAL SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ.....216

**H.B.Mehdiyev, Z.İ.Həsənova**

BANK SİSTEMİNDƏ API TƏHLÜKƏSİZLİYİN TƏMİN OLUNMASI .....217

**H.B.Mehdiyev, Z.İ.Həsənova**

BANK SİSTEMİNDƏ TƏTBİQ OLUNAN SİSTEM ARXİTEKTURASI .....219

**İ.N.Məmmədov**

MÜASİR TEXNOLOGİYALARIN TƏTBİQİ İLƏ LAYİHƏLƏRDƏ RİSK  
İDARƏETMƏSİNİN EFFEKTİVLİYİNİN ARTIRILMASI.....221

**İ.N.Məmmədov**

BEYNƏLXALQ STANDARTLAR ƏSASINDA LAYİHƏ İDARƏETMƏ  
SİSTEMLƏRİNİN STRUKTURUNUN TƏHLİLİ .....223

**İ.N.Məmmədov, N.Ə.Həsənova**

AVTONOM SÜNİ İNTELLEKT AGENTLƏRİNİN PAYLANAN  
SİSTEMLƏRDƏ PARALEL KOORDİNASİYASI: MULTİ-AGENT  
YANAŞMA .....226

**A.Q.Məmmədova**

AZƏRBAYCANDA AVTOMOBİL SİĞORTASI SİSTEMİNİN HÜQUQİ  
ƏSASLARI VƏ İNKİŞAF XÜSUSİYYƏTLƏRİ.....228

**A.Q.Məmmədova**

AVTOMOBİL SİĞORTASINDA RİSK ƏSASLI TARİF STRATEGİYASININ  
EFFEKTİVLİYİNİN AKTUAR-STATİSTİK QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ .....231

**A.E.Məmmədova**

QEYRİ-LOKAL İNTEQRAL ŞƏRTLİ HİPERBOLİK TƏNLİYİN TƏQRİBİ  
HƏLLİNİN ƏDƏDİ EKSPERİMENTLƏRLƏ TƏDQIQI.....234

**A.N.Məmmədova**

DÜZGÜN ÜÇBUCAQLI OBLASTDA KOŞI-RİMAN TƏNLİYİ ÜÇÜN  
SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİNİN ARAŞDIRILMASI .....236

**A.N.Məmmədova**

BƏRABƏRTƏRƏFLİ ÜÇBUCAQLI OBLASTDA KOŞI-RİMAN TƏNLİYİ  
ÜÇÜN QEYRİ-LOKAL SƏRHƏD ŞƏRTLİ MƏSƏLƏNİN  
FREDHOLMLUĞU .....238

**A.K.Məmmədova, G.Ş.Səfərova**

ELLİPTİK TƏNLİK ÜÇÜN PERİODİK ŞƏRTLİ SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN  
FƏRQ APROKSİMASIYASININ YİĞİLMASI.....241

**E.B.Məmmədova, A.F.İzzətova**

İQTİSADİYYATDA EHTİMAL HESABLAMA MODELƏRİ HAQQINDA.....245

**E.B.Məmmədova, M.T.Xəlilova**

QEYRİ-MÜƏYYƏNLİK ŞƏRAİTİNDƏ MÜƏSSİSƏNİN İSTEHSAL  
HƏCMİNİN RİYAZİ PLANLAŞDIRILMASI.....247

**N.Q.Məmmədova, Q.H.Mehdiyeva**

DÜZBUCAQLI MEMBRANIN RƏQSLƏRİ ÜÇÜN BİR QARIŞIQ  
MƏSƏLƏYƏ ÇIXIQLAR ÜSULUNUN TƏTBİQİ.....249

**N.Q.Məmmədova, F.R.Mustafayeva**

QAZMA BORU-KƏMƏRİ ÜÇÜN BİR QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN HƏLLİ.....250

**Z.R.Məmmədova**

İSTİLİKKEÇİRMƏ TƏNLİYİ ÜÇÜN FAZA MƏHDUDİYYƏTLİ OPTİMAL  
İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİNƏ CƏRİMƏ FUNKSIYALARI  
ÜSULUNUN TƏTBİQİ .....252

**G.M.Mikayılova**

BİRİNCİ TƏRTİB DİFFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN ÇOXNÖQTƏLİ  
SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN TƏDQIQI .....255

**N.F.Mikayılova**

BİR DİSKRET PAYLANMIŞ VƏ TOPLANMIŞ PARAMETRLİ OPTİMAL  
İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ŞƏRTİ.....257

**N.F.Mikayılova**

BİR DİSKRET PAYLANMIŞ VƏ TOPLANMIŞ PARAMETRLİ OPTİMAL  
İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ I və II TƏRTİB ZƏRURİ ŞƏRTLƏR.....259

**S.N.Mirzai, S.R.Əzizova**

MALİYYƏ ƏMƏLİYYATLARINDA DƏLƏDUZLUĞUN AŞKAR EDİLMƏSİ  
ÜÇÜN ANOMALİYALARIN MÜƏYYƏNLƏŞDİRİLMƏSİ VƏ MƏLUMAT  
BALANSININ İDARƏ OLUNMASI.....262

**F.Ə.Mirzəyev, N.R.Kərimli**

PUASSON VƏ MƏNFİ BİNOMİAL MODELRLƏ SIĞORTA  
HADİSƏLƏRİNİN TEZLİYİNİN QIYMƏTLƏNDİRİLMƏSİ .....265

**F.Ə.Mirzəyev, Q.Ş.Mədətova**

İNDEKS VƏ STANDARTLAŞDIRMA METODLARININ ÜMUMİ ÖLÜM  
GÖSTƏRİCİLƏRİNİN EHTİMAL-STATİSTİK TƏHLİLİNDƏ TƏTBİQİ .....268

**X.M.Mirzəyeva**

BİR İNTEQRO-DİFERENSİAL XƏTTİ OPTİMAL İDARƏETMƏ  
MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ ÜÇÜN ZƏRURİ VƏ KAFİ ŞƏRT .....271

**X.M.Mirzəyeva**

İNTEQRO DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRLƏ TƏSVİR OLUNAN BİR İKİ  
MƏRHƏLƏLİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ MƏXSUSİ  
İDARƏNİN TƏDQIQI .....273

**S.M.Mirzəyeva, H.X.Cəbrayılı**

PROQRAMLAŞDIRILMIŞ TƏLİM TEXNOLOGİYALARININ TƏHSİLDƏ  
ROLU, MÜQAYİSƏLİ ANALİZ VƏ QIYMƏTLƏNDİRMƏ  
METODOLOGİYASI.....275

**M.F.Muradov, A.F.Qədirli**

İNTERAKTİV TƏLİM MÜHİTİNİN QURULMASINDA MULTİMƏDİA  
TEXNOLOGİYALARININ İMKANLARI.....278

**D.Q.Muradova, K.Ə.Əsədova, N.A.Ağayeva, A.H.Ələkbərli**

ELMİ TƏDQIQATLARDA İNFORMASIYA-KOMMUNİKASIYA  
TEXNOLOGİYALARININ ROLU .....281

**G.A.Musayeva**

VAHİD KVADRATDA KOŞI-RİMAN TƏNLİYİ ÜÇÜN SƏRHƏD  
MƏSƏLƏSİNİN ZƏRURİ ŞƏRTLƏRİ VƏ FREDHOLMLUĞU .....285

**G.A.Musayeva**

VAHİD KVADRATDA KOŞI-RİMAN TƏNLİYİ ÜÇÜN SƏRHƏD  
MƏSƏLƏSİNİN HƏLLİNİN ARAŞDIRILMASI.....288

**F.A.Mustafayeva**

BİR TİPİK OLMAYAN KEYFİYYƏT MEYARLI PAYLANMIŞ  
PARAMETRLİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ OPTİMALLIQ  
ŞƏRTİ.....290



**F.A.Mustafayeva**

|                                                                                                                             |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| BİR TİPİK OLMAYAN KEYFİYYƏT MEYARLI PAYLANMIŞ<br>PARAMETRLİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ EYLER<br>TƏNLİYİNİN ANALOQU ..... | 292 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

**Ə.T.Namazova**

|                                                                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| MAGİSTR TƏLƏBƏ MƏLUMATLARININ İDARƏ EDİLMƏSİ ÜÇÜN<br>İNFORMASIYA-AXTARIŞ SİSTEMİNİN STRUKTUR-FUNKSIONAL<br>MODELİ ..... | 294 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

**K.Ə.Niftalıyeva, A.V.Kərimova**

|                                                                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| QEYRİ-XƏTTİ KEYFİYYƏT MEYARLI DİSKRET OPTİMAL<br>İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİNDƏ YƏHƏRARI NÖQTƏNİN VARLIĞI ÜÇÜN<br>ZƏRURİ ŞƏRT ..... | 296 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

**T.V.Orucova, S.C. Cəfərov**

|                                                                                              |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ŞƏBƏKƏ TƏHLÜKƏSİZLİYİNDƏ RİSKLƏRİN ANALİZİ VƏ<br>İNTEQRASIYA OLUNMUŞ MÜDAFİƏ METODLARI ..... | 298 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

**T.V.Orucova, E.D.Mikayılov**

|                                                                                                 |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ELEKTRON TƏDRİS SİSTEMLƏRİNDƏ CLIENT-SERVER<br>ARXİTEKTURASI VƏ RESTFUL API-LƏRİN TƏTBİQİ ..... | 299 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

**N.B.Rəsulov**

|                                                                                                        |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| MÜASİR MOBİL PROQRAMLAŞDIRMADA SWİFT DİLİNİN iOS<br>EKOSİSTEMİNDƏ ROLU VƏ İNKİŞAF PERSPEKTİVLƏRİ ..... | 301 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

**F.M.Rüstəmov**

|                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------|-----|
| RƏQƏMSAL DÖVRDƏ SÜNİ İNTELLEKTİN İQTİSADİYYATA TƏSİRİ ..... | 304 |
|-------------------------------------------------------------|-----|

**İ.Y.Rzayeva**

|                                                                                                    |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| KÜRƏVİ LAYDA LAPLAS OPERATORUNUN QRİN FUNKSİYASININ<br>MƏXSUSİ FUNKSİYALARA NƏZƏRƏN AYRILIŞI ..... | 307 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

**Ə.Ş.Sadəyev, M.Q.Əliyev**

|                                                                                                         |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| İOT SİSTEMLƏRİNDƏ BİOMETRİK ƏSASLI CİHAZ VƏ İSTİFADƏÇİ<br>İDENTİFİKASIYASI: ÇƏTİNLİKLƏR VƏ TƏTBİQ ..... | 311 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

**Ə.Ş.Sadəyev, S.A.Lətifli**

|                                                   |     |
|---------------------------------------------------|-----|
| TƏHSİL SEKTORUNDA DATA ANALİTİKANIN TƏDQIQI ..... | 313 |
|---------------------------------------------------|-----|

**X.İ.Seyfullayeva, N.N.Alızadə**

|                                                                       |     |
|-----------------------------------------------------------------------|-----|
| HİPERBOLİK TİP TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİR OPTİMAL İDARƏETMƏ<br>MƏSƏLƏSİ ..... | 316 |
|-----------------------------------------------------------------------|-----|

**N.D.Seyidbəyli**

|                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------|-----|
| DOĞURAN FUNKSİYALARIN ŞAXƏLƏNƏN PROSESLƏRDƏ TƏTBİQİ ..... | 318 |
|-----------------------------------------------------------|-----|

**N.D.Seyidbəyli**

|                                                                   |     |
|-------------------------------------------------------------------|-----|
| DOĞURAN FUNKSİYALARIN LİMİT TEOREMLƏRİN İSBATINDA<br>TƏTBİQİ..... | 320 |
|-------------------------------------------------------------------|-----|

**Z.K.Süleymanlı**

|                                                                                                                                                       |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| İSTİLİKKEÇİRMƏ PROSESİ ÜÇÜN OPTİMAL İDARƏETMƏ<br>MƏSƏLƏSİNİN TƏQRİBİ HƏLLİNƏ QRADİYENTİN PROYEKSİYASI VƏ<br>ŞƏRTİ QRADİYENT ÜSULLARININ TƏTBİQİ ..... | 322 |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

**A.R.Süleymanova**

|                                                                                              |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| AZƏRBAYCANIN APARICI ŞİRKƏTLƏRİNDƏ SİĞORTA<br>FƏALİYYƏTİNİN ƏSAS İSTİQAMƏTLƏRİ HAQQINDA..... | 324 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

**G.X.Şəfiyeva, Ş.İ.Əliyeva**

|                                                                                                                                         |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| İKİNCİ TƏRTİB ADI DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR ÜÇÜN KOŞI<br>MƏSƏLƏSİNİN EYLER VƏ DÖRDÜNCÜ TƏRTİB RUNQE-KUTTA<br>ÜSULLARI İLƏ ƏDƏDİ HƏLLİ ..... | 329 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

**B.Ö.Tahirov, N.N.Rzayeva**

|                                        |     |
|----------------------------------------|-----|
| REFLEKSİV FƏALİYYƏTİN MƏQSƏDLƏRİ ..... | 331 |
|----------------------------------------|-----|

**B.Ö.Tahirov, N.N.Rzayeva**

|                                                                   |     |
|-------------------------------------------------------------------|-----|
| ŞƏRTİ EKSTEMUMA AİD MƏSƏLƏLƏRİN HƏLLİNƏ VARIATİV<br>YANAŞMA ..... | 333 |
|-------------------------------------------------------------------|-----|

**N.N.Talıblı**

|                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------|-----|
| PERİODİK VƏ KƏSİLƏN ƏMSALLI ŞTURM-LİUVİLL OPERATORUNUN<br>SPEKTRİ ..... | 334 |
|-------------------------------------------------------------------------|-----|

**Ç.Q.Tariverdiyeva**

|                                                                                 |     |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----|
| SÜNİ İNTELLEKTDƏ NEYRON ŞƏBƏKƏLƏRİ VƏ EKSPERT<br>SİSTEMLƏRİNİN MÜQAYİSƏSİ ..... | 338 |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----|

**Ç.Q.Tariverdiyeva**

|                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| JAVA TƏTBİQLƏRİ ÜÇÜN ZİBİL YİĞİMİNİN (GARBAGE COLLECTION)<br>OPTİMALLAŞDIRILMASI..... | 340 |
|---------------------------------------------------------------------------------------|-----|

**F.M.Zeynallı**

|                                                                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| QEYRİ-LOKAL SƏRHƏD ŞƏRTLİ DİFERENSİAL VƏ<br>İNTEQRO-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRLƏ TƏSVİR OLUNAN BİR<br>OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ..... | 343 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|

**R.M.Zeynalov**

|                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------|-----|
| YARIM TƏRTİBLİ ADI DİFERENSİAL TƏNLİK ÜÇÜN SPEKTRAL<br>MƏSƏLƏ ..... | 345 |
|---------------------------------------------------------------------|-----|

**P.M.Бабаев**

|                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| О ПРЕДСТАВЛЕНИИ НЕКОТОРОГО ИНТЕГРАЛА ТИПА<br>ПОТЕНЦИАЛА ПО ПОЛУПРОСТРАНСТВУ ..... | 347 |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|

**Р.М.Бабаев**

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЗАДАННОЙ  
РЕКУРРЕНТНЫМ СООТНОШЕНИЕМ .....355

**И.Т.Бинаталиев**

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕННОГО РЕЕСТРА  
ДАННЫХ НА БАЗЕ .NET 9 И АРАСНЕ КАФКА  
ДЛЯ МИКРОСЕРВИСНЫХ АРХИТЕКТУР .....358

**С.И.Гамидов , А.Т.Рзаева**

ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ В МОДЕЛИ ЗАГРЯЗЕНИЯ  
ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ.....360

**С.И.Гамидов, М.Г.Исмаилов**

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ  
С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ И ЗАПАЗДЫВАНИЕМ.....363

**Э.А.Гасымов, Н.Х.Гасанли**

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ  
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ  
В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ .....365

**Э.А.Гасымов, А.М.Керимова**

МЕТОДЫ ПРИМЕНЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ К ЗАДАЧАМ  
МАТЕМАТИКИ .....367

**Ю.А.Джафарли**

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ  
ЗАДАЧИ ДЛЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ, СОДЕРЖАЩИЙ СЛУЧАЙНЫЕ  
ФИЗИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ .....369

**Ю.А.Джафарли**

КОРРЕЛЯЦИОННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ  
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ БЕСКОНЕЧНОЙ СТРУНЫ  
СО СЛУЧАЙНЫМИ ДЕФЕКТАМИ .....372

**С.М.Зейналлы**

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ  
КОШИ-НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ  
ВТОРОГО ПОРЯДКА.....374

**Н.Н.Исламова**

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ  
В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ,  
ЛИНЕЙНОЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ФАЗОВОЙ КООРДИНАТЫ.....376

**Н.Н.Исламова**

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОДНОЙ  
ЗАДАЧЕ МОИСЕЕВА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И НЕЛИНЕЙНЫМ  
КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА.....379

**О.М.Мамедов**

СХЕМА ДЛЯ КОНГРУЭНЦ МОДУЛЯРНОСТИ .....382

**С.У.Мехтиеv**

ИНКРЕМЕНТАЛЬНАЯ ГЕНЕРАЦИЯ КОДА В .NET: ПОДХОДЫ  
И ИНСТРУМЕНТЫ .....383

**М.А.Меликов**

DDOS-АТАКИ В ОБЛАЧНЫХ СРЕДАХ: МЕТОДЫ ОБНАРУЖЕНИЯ И  
СТРАТЕГИИ ПРОТИВОДЕЙСТВИЯ .....385

**В.Н.Насибзаде, А.М.Бахтиярова**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИСТОЧНИКА В ВОЛНОВОМ УРАВНЕНИИ СТРУНЫ .....387

**С.Р.Расулова**

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ МЕТОДОЛОГИИ RED TEAM /  
BLUE TEAM ПРИ ЗАЩИТЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ .....389

**А.Ш.Садаев, Ф.Б.Надирова**

РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ ОЦЕНКИ РИСКА ДЛЯ СЕТЕВЫХ СЕРВИСОВ  
НА ОСНОВЕ МАШИННОГО ОБУЧЕНИЯ .....392

**Б.О.Тахиров, Ф.А.Алекберова**

ИНКЛЮЗИВНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ КАК ОСНОВА СОВРЕМЕННОЙ  
ШКОЛЫ.....395

**Б.О.Тахиров, Н. Р. Махмудова**

ЛОГАРИФИЧЕСКОЕ СРЕДНЕЕ И ЕГО СВОЙСТВА.....397

**А.К.Худадова**

АЛГОРИТМЫ НА ГРАФАХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ  
ПОТОКОВ В ТРАНСПОРТНЫХ СЕТЯХ.....398

**А.К.Худадова**

НЕЧЁТКИЕ МНОЖЕСТВА И НЕЧЁТКАЯ ЛОГИКА В ЗАДАЧАХ  
ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ  
НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ .....400

**Ф.Р.Юзбашиеv**

ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОРПОРАТИВНЫХ  
СИСТЕМ .....403

**О.А.Aliyev**

ANALYSIS OF THE STABILITY OF ADEQUACY CRITERIA FOR IMAGE  
RECOGNITION METHODS UNDER STRUCTURAL DISTORTIONS .....405

**S.R.Azizova, M.Sh.Ghadyani**

DESIGN AND EVALUATION OF A SECURE AND INTELLIGENT IOT-BASED  
REMOTE PATIENT MONITORING SYSTEM FOR EARLY DETECTION OF  
ALZHEIMER'S DISEASE USING EDGE AI AND FEDERATED LEARNING .....409

**S.R.Azizova, Sh.A.Ghadyani**

SMART HOME TECHNOLOGIES: BALANCING ENERGY  
OPTIMIZATION AND CYBERSECURITY CHALLENGES  
IN IOT ENVIRONMENTS .....412

**A.E.Gasimov**

EFFICIENT LARGE LANGUAGE MODELS FOR GRAPH-RAG  
SENTIMENT ANALYSIS: RETRIEVAL, COMPRESSION AND  
REINFORCEMENT LEARNING .....415

**H.K.Musaev, A.A.Nabieva**

SINGULAR PERTURBATIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR  
DIFFERENTIAL OPERATOR EQUATIONS WITH  
A SMALL PARAMETER .....419

**İ.B.Zeynalov**

PREDICTIVE ANALYTICS AND EARLY WARNING SYSTEMS IN  
HIGHER EDUCATION: A DATA SCIENCE FRAMEWORK  
FOR FORECASTING STUDENT ACHIEVEMENT .....420

**H.T.Tağıyev, S.N.Hüseynov**

İSTİLİKKEÇİRMƏ TƏNLİYİ ÜÇÜN OPTİMAL İDARƏETMƏ  
MƏSƏLƏSİNDƏ İDARƏEDİCİNİN VARLIĞI BARƏDƏ .....423

**H.T.Tağıyev, S.N.Hüseynov**

İSTİLİKKEÇİRMƏ TƏNLİYİ ÜÇÜN OPTİMAL İDARƏETMƏ  
MƏSƏLƏSİNDƏ ZƏRURİ ŞƏRTİN ÇIXARILMASI BARƏDƏ .....425

AZƏRBAYCAN XALQININ ÜMUMMİLLİ LİDERİ  
HEYDƏR ƏLİYEVİN ANADAN OLMASININ  
103-CÜ İLDÖNÜMÜNƏ HƏSR OLUNMUŞ

**TƏTBİQİ RİYAZİYYATIN MÜASİR PROBLEMLƏRİ**  
**XXVI RESPUBLİKA ELMİ KONFRANSININ**  
**MATERİALLARI**

Bakı, 12-13 may 2026-cı il

Çapa imzalanmışdır: 03.07.2026  
Formatı: 70x100 1/16. Həcmi 27,5 ç.v. Sayı 100.

---

BDU Nəşr Evi  
AZ 1148, Bakı ş., ak. Z.Xəlilov küçəsi, 33.  
Tel: (+99412) 538 87 39 / 538 50 16  
e-mail: bduneshrevi@bsu.edu.az  
**www.bsu.edu.az**