G. N. Əliyeva

ADİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR VƏ SIRALAR

GƏNCƏ - 2017

Azərbaycan Dövlət Aqrar Universitetinin 29.09.2017-ci il tarixli 533 (§1) saylı əmrinə əsasən dərs vəsaiti kimi nəşrinə icazə verilmişdir.

Elmi redaktor: D.V.Bağırlı,
texnika elmləri namizədi

Rəyçilər: Q.Ü.Ağayev,
fizika riyaziyyat elmləri namizədi

O.M.Hüseynov,
fizika riyaziyyat elmləri namizədi

G.N.ƏLİYEVA. Adi diferensial tənliklər və siralar. Gəncə, 2017, 102 səh.

Dərs vəsaitində adi diferensial tənliklər və sıralara aid nəzəri məlumat və hər mövzuya aid misal və məsələ həlli verilmişdir. Dərs vəsaiti ADAU-nun tələbələri və magistratura imtahanlarına hazırlaşan tələbələr üçün nəzərdə tutulmuşdur.

ÖN SÖZ

Diferensial tənlik termini 1676-cı ildə Leybnis tərəfindən tərəfindən irəli sürülmüşdür. Diferensial tənliklər nəzəriyyəsinin əsası XVIII əsrdə Nyuton və Leybnis tərəfindən qoyulmuşdur.

Diferensial tənliklər təbiətin danışdığı dildir. Diferensial tənliklər əhalinin artması prosesi, qiymətlərin artması dinamikası, dəniz səviyyəsindən olan hündürlükdən asılı olaraq atmosfer təzyiqinin düşməsi, elektromaqnit impulslarının ötürülməsi prosesi və s.-də tətbiq olunur. Sıralar fizika və texnikanın bir çox bölmələrində istifadə olunur. Qüvvət sıraları funksiyaların qiymətlərinin təqribi hesablanmasında, Furye sıraları rəqslər nəzəriyyəsində, kosmik tədqiqatlarda, radiotexnika, elektronika və s.-də tətbiq olunur.

Dərs vəsaitində adi diferensial tənliklər və sıralara aid nəzəri məlumat bakalavriat təhsil səviyyəsinin 050612-maşın mühəndisliyi,050637-meliorasiya və su təsərrüfatı tikintisi mühəndisliyi, 050644-istehlak mallarının ekspertizası və marketinqi, 050622 - yerüstü nəqliyyat vasitələrinin mühəndisliyi, 050626-elektrik mühəndisliyi, 050628-proseslərin avtomatlaşdırılması mühəndisliyi 050655-informasiya texnologiyaları, 050642-qida məhsulları mühəndsliyi, 050647-metrologiya, standartlaşdırma və sertifikasiya mühəndisliyi və 050706-aqrar mühəndisliyi ixtisaslarının tədris proqramlarına uyğun verilmişdir.

Dərs vəsaitində birtərtibli diferensial tənliklər (dəyişənlərinə ayrıla bilən, bircins, xətti, Bernulli tənliyi, Laqranj tənliyi, Klero tənliyi), Eyler üsulu vasitəsi ilə bir tərtibli diferensial tənliyin təqribi həlli, tərtibin azaldılmasına gətirən ikitərtibli diferensial tənliklərin sadə növlərinin inteqrallanması, sabit əmsallı iki tərtibli xətti bircins və qeyri-bircins tənliklərin həlli, ədədi sıraların yığılmasının tədqiqi, qüvvət sıralarının yığılmasının tədqiqi, qüvvət sıralarının təqribi hesablamalarda tətbiqi, verilmiş funksiyaların Furye sıralarına ayrılışı verilmişdir.

Hər mövzuya aid misalların həlli verilmişdir.

FƏSİL I

ADİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR.

§1. Adi diferensial tənliklər. Əsas təriflər və anlayışlar

x dəyişəni, axtarılan $y = y(x)$ funksiyası və axtarılan funksiyanın hər hansı tərtibədək tötəmələrindən ibarət olan tənliklərə adi diferensial tənliklər deyilir.

Tənliyin tərtibi olaraq tənliyə daxil olan törəmənin ən yüksək tərtibi götürülür. Diferensial tənliklərə aid misallar:

a)$y' - y = 0$; b) $y'' + y = 0$;c) $y'' - 6y' + 8y = 0$

d)$yy' - x = 0$ e)$y''' + xy = 0$ f) $y' = ctgx$.

a), d), f)- tənlikləri birtərtibli; b) və c)- iki tərtibli; e)-üç tərtiblidir.

Misal№1. Göstərin ki, $y = \sin x$ funksiyası b) tənliyinin həllidir.

Həlli.$y' = \cos x,\ y'' = -\sin x$ qiymətlərini b) tənliyinə qoyaraq $-\sin x + \sin x = 0$ eyniliyini alırıq. Həqiqətən də $y = \sin x$funksiyası b) tənliyinin həllidir.

Misal№2. Göstərin ki, C ixtiyari sabit olduqda $y = Ce^x$ funksiyası $y' - y = 0$ tənliyinin həllidir.

Həlli.$y' = Ce^x$. Verilmiş tənliyə y və y'-in qiymətlərini qoyaraq alırıq:

$Ce^x - Ce^x = 0$. Həqiqətən də C ixtiyari sabit olduqda $y = Ce^x$ funksiyası $y' - y = 0$ tənliyinin həllidir.

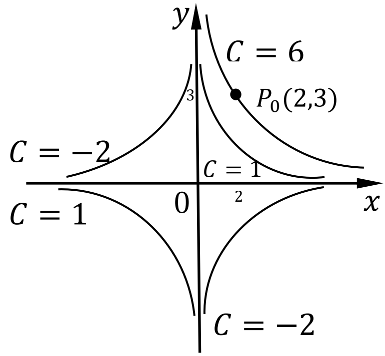
Misal№ 3. Göstərin ki, C ixtiyari sabit olduqda $y = \frac{C}{x}$ funksiyası $y' = -\frac{y}{x}$ tənliyinin həllidir.

Həlli. $y' = -\frac{C}{x^2}$. y və y'-in qiymətlərini tənliyə qoyaraq alırıq: $-\frac{C}{x^2} = -\frac{C}{x^2}$.

Həqiqətən də $y = \frac{C}{x}$ funksiyası $y' = -\frac{y}{x}$ tənliyinin həllidir.

Misal №4. $y' = -\frac{y}{x}$ tənliyinin $y(2) = 3$ başlanğıc şərtini ödəyən xüsusi həllini tapın.

Həlli. Misal 3-yə görə $y = \frac{C}{x}$ funksiyası verilmiş tənliyin ümumi həllidir. Xüsusi həlli tapmaq üçün $y(2) = 3$ şərtindən istifadə edək. Bu qiyməti ümumi həlldə yerinə yazaraq C sabitini tapaq: $3 = \frac{C}{2}; C = 6$. Həqiqətən də, $y = \frac{6}{x}$ başlanğıc şərti ödəyən xüsusi həlldir. $y = \frac{C}{x}$ ümumi həlli asimptotları koordinat oxları olan bərabəryanlı hiperbolalardır. (şək 1) $y = \frac{6}{x}$ xüsusi həllinə $(2; 3)$ nöqtəsindən keçən hiperbola uyğundur.



Şəkil 1

§2. Birtərtibli diferensial tənliklər

$$F(x; y; y') = 0 \qquad (1)$$

şəkilli tənliklərə bir tərtibli diferensial tənliklər deyilir. Əgər (1) tənliyini y'-ə görə həll etmək mümkündürsə, onu belə yazırlar:

$$y' = f(x; y) \qquad (2)$$

İxtiyari funksiyanı tənlikdə yerinə qoyduqda diferensial tənliyi eyniliyə çevirən həllə onun həlli deyilir. (1) tənliyi $(x; y)$ nöqtəsinin koordinatları və bu nöqtədən keçən inteqral əyrisinin bucaq əmsalı: y' arasında əlaqə yaradır.

Əyrinin bütün nöqtələrində sahənin istiqaməti eyni olarsa, həmin əyri izoklin adlanır. $y' = C, f(x; y) = C$ qəbul edərək izoklinin tənliyini almaq olar.

Misal.İzoklinlərin köməyi ilə $y' = 2x$ tənliyinin inteqral əyrilərini tapın.

Həlli.Bu diferensial tənliyin izoklinləri $2x = C$ şəklindədir.

İzoklinlər Oy oxuna paralel olan düz xətlər olacaqdır$\left(x = \frac{C}{2}\right)$.

Asanlıqla göstərmək olar ki, $y' = 2x$ tənliyinin həlli $y = x^2$, $y = x^2 + 1, y = x^2 - \sqrt{3}$ və ümumiyyətlə $y = x^2 + C$ şəkilli funksiyalardır.

Düz xəttin nöqtələrində Ox oxu ilə tangensi C-yə bərabər olan eyni α bucagı əmələ gətirən parçalar çəkək. (şəkil 2)
$C = 0$ olduqda $x = 0$ alırıq;$\operatorname{tg}\alpha = 0, \alpha = 0$.
$C = 1$ olduqda izoklinin tənliyi $x = \frac{1}{2}, \operatorname{tg}\alpha = 1;\ \alpha = 45^{\circ}$
$C = -1$ olduqda izoklinin tənliyi $x = -\frac{1}{2}, \operatorname{tg}\alpha = -1;\ \alpha = -45^{\circ}$
$C = 2$ olduqda izoklinin tənliyi

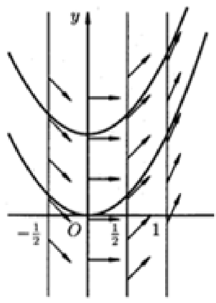
$$x = 1, \operatorname{tg}\alpha = 2;\ \alpha = arctg2 \approx 63^{\circ}$$

$x = x_0$ şərti daxilində $y = y_0$ şərtinin ödənməsinə başlanğıc şərt deyilir:

$$y(x_0) = y_0 \text{ və ya } y\,\big|_{x=x_0} = y_0 \qquad (3)$$

(2) tənliyinin *ümumi həlli* $y = \varphi(x, C)$ şəklindədir. Burada C ixtiyari sabitdir. $y = \varphi(x, C)$ funksiyası aşağıdakı şərtləri ödəyir:
1) Hər bir qeyd olunmuş C üçün $\varphi(x, C)$ funksiyası diferensial tənliyin həllidir.
2) (3) başlanğıc şərti necə olursa olsun sabitin elə $C = C_0$ qiymətini tapmaq olar ki, $y = \varphi(x, C_0)$ funksiyası verilmiş başlanğıc şərti ödəyir.

Birtərtibli diferensial tənliyin *xüsusi həlli* elə $y = \varphi(x; C_0)$ həllinə deyilir ki, o, konkret $C = C_0$ qiymətində $y = \varphi(x; C)$ ümumi həllindən alınır. Əgər diferensial tənliyin ümumi həlli qeyri-aşkar şəkildə: $\Phi(x; y; C) = 0$ verilmişdirsə, belə həllə diferensial tənliyin *ümumi inteqralı* deyilir. Bu halda $\Phi(x; y; C_0) = 0$ tənliyinə diferensial tənliyin *xüsusi inteqralı* deyilir.



Şəkil 2

Həndəsi nöqteyi nəzərə görə $y = \varphi(x; C)$ ümumi həlli Oxy müstəvisində inteqral əyriləri ailəsidir; $y = \varphi(x; C_0)$ xüsusi həlli isə inteqral əyriləri ailəsinin $P_0(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçən bir əyrisidir.
(2) tənliyinin (3) başlanğıc şərtini ödəyən xüsusi həllinin tapılması məsələsinə Koşi məsələsi deyilir.
Diferensial tənliyin həllinin varlığı və yeganəliyi haqqındaKoşi teoremi.

$P_0(x_0, y_0) \in D$ olduqda əgər $f(x; y)$ funksiyası D oblastında kəsilməzdirsə, onda (2) tənliyinin $y(x_0) = y_0$ şərtini ödəyən xüsusi həlli vardır. Əgər bundan başqa $\frac{\partial f}{\partial y}$ xüsusi törəməsi də D oblastında kəsilməzdirsə, onda bu həll yeganədir.

§ 3.Dəyişənlərinə ayrıla bilən diferensial tənliklər

Törəməyə nəzərən həll olunan bir tərtibli diferensial tənlik aşağıdakı kimidir:

$$y' = f(x.y) \tag{1}$$

Əğər (1) tənliyinin sağ tərəfini biri x-dən asılı, digəri isə y-dən asılı iki funksiyanın hasili şəklində göstərmək olarsa,yəni $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$, onda (1) tənliyi belə olar:

$$y' = \varphi(x)\psi(y) \tag{2}$$

(2) tənliyi dəyişənlərinə ayrılan diferensial tənlikdir.

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

olduğundan alırıq:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x)\psi(y) \tag{3}$$

Tənliyin hər iki tərəfini dx-ə vuraq və $\psi(y)$-əbölək. Nəticədə dəyişənlərinə ayrıla bilən diferensial tənlik alırıq:

$$\frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)dx \tag{4}$$

(4) bərabərliyini inteqrallayaraq alırıq:

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x)dx + C \qquad (5)$$

(5) münasibəti (2) tənliyinin ümumi inteqralıdır.

Misal №1. $y' = \operatorname{tg} x(y+1)$tənliyini həll edin.

Həlli. Verilmiş tənlik dəyişənlərinə ayrıla bilən diferensial tənlikdir.Törəməni diferensialların nisbəti şəklində yazaq və tənliyin hər iki tərəfini dx-ə vuraq:

$$dy = \operatorname{tg} x(y+1)dx$$

İndi bərabərliyin hər iki tərəfini $(y+1) \neq 0$-ə bölək:

$$\frac{dy}{y+1} = \operatorname{tg} x\, dx$$

Bu münasibətin hər iki tərəfini inteqrallayaraq alırıq:

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \operatorname{tg} x dx + C$$

$$\ln|y+1| = -\ln|\cos x| + C$$

$\ln|(y+1)\cos x| = C$ −ümumi inteqraldır.

Dəyişənlərinə ayrıla bilən diferensial tənliklər həmçinin aşağıdakı şəkildə göstərilə bilər:

$$f_1(x)\varphi_1(y)dx + f_2(x)\varphi_2(y)dy = 0 \qquad (6)$$

burada dx və dy diferensiallarının əmsallarındakı funksiyalar yalnız x və y-dən asılı funksiyalardır.

(6) tənliyini həll etmək üçün bərabərliyin hər iki tərəfini $\varphi_1(y) \cdot f_2(x)$ hasilinə bölmək lazımdır. Nəticədə dəyişənlərinə ayrıla bilən diferensial tənlik alınır.

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = 0 \qquad (7)$$

Qeyd edək ki (6)-nı $\varphi_1(y) \cdot f_2(x)$ hasilinə bölmək bu hasili sıfra çevirən xüsusi həllərin itməsinə gətirib çıxara bilər. Ona görə (6) tənliyini həll etdikdən sonra

$$\varphi_1(y)f_2(x) = 0 \qquad (8)$$

tənliyini həll etmək lazımdır.(8) tənliyindən alınan həllə (6) tənliyinin məxsusi həlli deyilir.

Misal №2. $y'x^3 = 2y$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

Həlli.Verilmiş tənlik dəyişənlərinə ayrıla bilən diferensial tənlikdir. Törəməni diferensialların nisbəti şəklində yazaq:
$\frac{dy}{dx} \cdot x^3 - 2y = 0 \Rightarrow x^3dy - 2ydx = 0; yx^3 \neq 0$inteqrallayıcı vuruğuna bölək:

$$\frac{dy}{y} - \frac{2dx}{x^3} = 0$$

Bu tənliyin hər iki tərəfini inteqrallayaraq alırıq:

$$\int \frac{dy}{y} - 2\int \frac{dx}{x^3} = \ln C.$$

$$\ln y - 2\int x^{-3}dx = \ln C \Rightarrow \ln y - 2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} =$$

$$= \ln C \Rightarrow \ln \frac{y}{C} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{y}{C} = e^{-\frac{1}{x^2}};$$

$y = Ce^{-\frac{1}{x^2}}$ verilmiş tənliyin ümumi həllidir.

Misal № 3. $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$ tənliyinin ümumi inteqralını tapın.

Həlli. $(1 + y^2)(1 + x^2) \neq 0$ inteqrallayıcı vuruğuna bölərək dəyişənləri ayıraq:

$$\frac{dx}{1 + x^2} + \frac{dy}{1 + y^2} = 0.$$

Hədbəhəd inteqrallayaraq axtarılan ümumi inteqralı alırıq:

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} + \int \frac{dy}{1 + y^2} = C \Rightarrow arctgx + arctgy = C.$$

Misal № 4. $xyy' = 1 - x^2$ tənliyinin ümumi inteqralını tapın.

Həlli. Verilmiş tənlik dəyişənlərinə ayrıla bilən diferensial tənlikdir. Törəməni diferensialların nisbəti şəklində yazaq:

$$xy\frac{dy}{dx} = 1 - x^2.$$

Tənliyin hər iki tərəfini dx-ə vuraq:

$$xydy = (1 - x^2)dx.$$

Alınmış tənliyin hər iki tərəfini x-ə bölək: $ydy = \left(\frac{1}{x} - x\right)dx.$

İnteqrallayaraq ümumi inteqralı alırıq:

$$\int y dy = \int \left(\frac{1}{x} - x\right) dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C.$$

<u>Misal №5</u>. $2y'\sqrt{x} = y$ tənliyinin ümumi həllini və $y(4) = 1$ şərtini ödəyən xüsusi həllini tapın.

<u>Həlli</u>. Verilmiş tənlik dəyişənlərinə ayrıla bilən diferensial tənlikdir. Törəməni diferensialların nisbəti şəklində yazaq:

$2\frac{dy}{dx}\sqrt{x} = y \Rightarrow 2\sqrt{x}dy - ydx = 0.$ $\sqrt{x}y \neq 0$ inteqrallayıcı vuruğuna bölək:

$$2\frac{dy}{y} - \frac{dx}{\sqrt{x}} = 0.$$

Bu tənliyin hər iki tərəfini inteqrallayaraq alırıq:

$$2\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\ln C.$$

$$2\ln y - \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\ln C \Rightarrow 2\ln y - 2\sqrt{x} =$$

$$= 2\ln C \Rightarrow \ln y - \sqrt{x} = \ln C \Rightarrow \ln\frac{y}{C} = \sqrt{x}.$$

$\frac{y}{C} = e^{\sqrt{x}}; y = Ce^{\sqrt{x}}$ verilmiş tənliyin ümumi həllidir.

Verilmiş tənliyin xüsusi həllini tapmaq üçün $y(4) = 1$ şərtindən istifadə edək və C sabitini tapaq. $Ce^2 = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{e^2} \Rightarrow C = e^{-2}$.

$y = e^{\sqrt{x}-2}$ verilmiş tənliyin xüsusi həllidir.

<u>Misal № 6</u>. $xy' - y = 0$ tənliyinin ümumi həllini və $y(-2) = 4$ şərtini ödəyən xüsusi həllini tapın.

<u>Həlli</u>. Verilmiş tənlik dəyişənlərinə ayrıla bilən diferensial tənlikdir. Törəməni diferensialların nisbəti şəklində yazaq: $x\frac{dy}{dx} - y = 0$.

Tənliyin hər iki tərəfini dx-ə vuraq:

$$xdy - ydx = 0; xy \neq 0$$

inteqrallayıcı vuruğuna bölək:

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0.$$

Bu tənliyin hər iki tərəfini inteqrallayaraq alırıq:

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dx}{x} = \ln C.$$

$$\ln y - \ln x = \ln C \Rightarrow \ln \frac{y}{x} = \ln C \Rightarrow \frac{y}{x} = C \Rightarrow y = Cx.$$

$y = Cx$ verilmiş tənliyin ümumi həllidir. İndi tənliyin $y(-2) = 4$ şərtini ödəyən xüsusi həllini tapaq. $-2C = 4; C = -2; y = -2x.$ $y = -2x$ verilmiş tənliyin xüsusi həllidir.

<u>Misal № 7</u>. $yy' + x = 0$ tənliyinin ümumi inteqralını və $y(-2) = 4$ şərtini ödəyən xüsusi inteqralını tapın.

<u>Həlli</u>. Verilmiş tənlik dəyişənlərinə ayrıla bilən diferensial tənlikdir. Törəməni diferensialların nisbəti şəklində yazaq:

$$y\frac{dy}{dx} + x = 0$$

Tənliyin hər iki tərəfini dx-ə vuraq: $ydy + xdx = 0$.

Bu tənliyin hər iki tərəfini inteqrallayaraq alırıq:

$$\int ydy + \int xdx = \frac{C}{2} \Rightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = \frac{C}{2} \Rightarrow y^2 + x^2 = C.$$

$y^2 + x^2 = C$ verilmiş tənliyin ümumi inteqralıdır. İndi $y(-2) = 4$ şərtini ödəyən xüsusi inteqralı tapaq:

$$4^2 + (-2)^2 = C \Rightarrow C = 20 \Rightarrow y^2 + x^2 = 20.$$

$y^2 + x^2 = 20$ verilmiş tənliyin başlanğıc şərtləri ödəyən xüsusi inteqralıdır.

<u>Misal № 8</u>. $2st^2ds = (1 + t^2)dt$ dəyişənlərinə ayrıla bilən diferensial tənliyin ümumi həllini tapın.

<u>Həlli</u>. $2st^2ds - (1 + t^2)dt = 0. t^2 \neq 0$ inteqrallayıcı vuruğuna bölək:

$$2sds - \frac{1 + t^2}{t^2}dt = 0;$$

$$\int 2sds - \int \frac{1 + t^2}{t^2}dt = C;\ s^2 + \frac{1}{t} - t = C;\ s^2 = C + t - \frac{1}{t}.$$

$s^2 = \frac{Ct + t^2 - 1}{t}$- ümumi həlldir.

<u>Misal № 9</u>. $\varphi^2 dr + (r - a)d\varphi = 0$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

<u>Həlli</u>. $\varphi^2(r - a) \neq 0$ inteqrallayıcı vuruğuna bölək.

$$\frac{dr}{r-a}+\frac{d\varphi}{\varphi^2}=0;\ \int\frac{dr}{r-a}+\int\frac{d\varphi}{\varphi^2}=\ln C.$$

$$\ln(r-a)-\frac{1}{\varphi}=\ln C;\ \ln\frac{r-a}{C}=\frac{1}{\varphi};\ \frac{r-a}{C}=e^{\frac{1}{\varphi}};r-a=Ce^{\frac{1}{\varphi}}$$

Beləliklə $r=a+Ce^{\frac{1}{\varphi}}$ verilmiş tənliyin ümumi həllidir.

Misal № 10. $y'=(2y+1)ctgx$ tənliyinin ümumi həllini və $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$ şərtini ödəyən xüsusi həllini tapın.

Həlli. Verilmiş tənlik dəyişənlərinə ayrıla bilən diferensial tənlikdir.Törəməni diferensialların nisbəti şəklində yazaq və tənliyin hər iki tərəfini dx-ə vuraq:

$$dy-(2y+1)ctgxdx=0.$$

İndi bərabərliyin hər iki tərəfini $2y+1\neq 0$ inteqrallayıcı vuruğuna bölək:$\frac{dy}{2y+1}-ctgxdx=0$. Aldığımız tənliyi inteqrallayaq:

$$\int\frac{dy}{2y+1}-\int ctgxdx=\ln C;$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{d(2y+1)}{2y+1}-\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\ln C.$$

$$\frac{1}{2}\ln(2y+1)=\ln C\sin x;$$

$$\ln(2y+1)=2\ln C\sin x;\ln(2y+1)=\ln Csin^2x.$$

$$2y+1=Csin^2x;\ 2y=Csin^2x-1;\ y=\frac{Csin^2x-1}{2}.$$

Aldığımız axırıncı həll ümumi həlldir. İndi başlanğıc şərti ödəyən xüsusi həlli tapaq. $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$ şərtindən istifadə edərək C-ni tapaq.

$$\frac{Csin^2\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow C=4.$$

Xüsusi həll belə olur: $y=\frac{4sin^2x-1}{2};y=2sin^2x-\frac{1}{2}.$

Məsələ № 1. Nyuton qanununa görə cismin soyuma sürəti cismin və ətraf mühitin temperaturları fərqi ilə mütənasibdir. Məlumdur ki, 20 dəq ərzində cisim 100°-dən 60°- dək soyuyur. Ətraf mühitin temperaturu 20° olarsa, nə vaxtdan sonra cismin soyuma temperaturu 30°-dək enər.

Həlli. Tutaq ki, $x\,, t$ anında cismin temperaturudur. Prosesin gedişində temperaturların fərqi ilə yanaşı cismin soyuma sürəti də dəyişir. x dəyişəni t dəyişənindən asılıdır. x kəmiyyətinin dəyişmə sürəti $\frac{dx}{dt}$ törəməsidir. Məsələnin şərtinə görə baxılan soyuma prosesini təsvir edən diferensial tənlik belə olur:

$$\frac{dx}{dt} = k(x - 20),$$

k-hər hansı mütənasiblik əmsalıdır.

Bu tənliyi həll edək:

$$\frac{dx}{x - 20} = kdt\,; \quad \ln(x - 20) = kt + \ln C$$

$$\ln\frac{x - 20}{C} = kt; \quad \frac{x - 20}{\mathrm{C}} = e^{kt}\,; \quad x = Ce^{kt} + 20$$

$\forall\, C$ sabitini $t_0 = 0$ olduqda $x_0 = 100$ şərtindən tapaq:

$$100 = Ce^0 + 20; \;\; C = 80$$

Həqiqətən

$$x = 80\, e^{kt} + 20 \qquad (*)$$

verilmiş başlanğıc şərti ödəyən xüsusi həlldir. Məsələdə başqa əlavə şərt qoyulub: $t_1 = 20$ dəq olduqda cismin temperaturu$x_1 = 60^{\circ}$ olur. Bu verilənləri nəzərə alaraq e^k kəmiyyətini alırıq.(*)-a x_1vət_1-i qoyaraq alırıq:

$$60 = 80\, e^{20k} + 20; \quad e^{20k} = \frac{1}{2}\,; e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}.$$

(*)-a e^k- nın qıymətini qoyaraq alırıq:

$$x = 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} + 20 \qquad (**)$$

Məsələnin sualına cavab vermək ücün $x = 30$ dəyişəninə uyğun t dəyişəninin qiymətini tapmaq lazımdır. (**)-a $x = 30$ qoyaraq alırıq:

$$30 = 80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} + 20\,; \quad \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}};$$

$$3 = \frac{t}{20}\,; \qquad t = 60.$$

Beləliklə cismin temperaturu soyuma başlayandan 1 saat sonra 30 $^{\circ}$- dək aşağı düşür.

<u>Misal №11</u>. $y' = ctgx(y+1)$ ümumi həllini və $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ şərtini ödəyən xüsusi həllini tapın.

<u>Həlli</u>. Verilmiş tənlik dəyişənlərinə ayrıla bilən diferensial tənlikdir. Törəməni diferensialların nisbəti şəklində yazaq: $\frac{dy}{dx} = ctgx(y+1)$.

Tənliyin hər iki tərəfini dx-ə vuraq:

$$dy = ctgx(y+1)dx.$$

Alınmış tənliyin hər iki tərəfini $y+1 \neq 0$ inteqrallayıcı vuruğuna bölək:

$$\frac{dy}{y+1} = \frac{\cos x dx}{\sin x}$$

İnteqrallayaraq alırıq:

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} \Rightarrow \ln|y+1| =$$

$$= \ln|\sin x| + \ln C \Rightarrow y+1 = C\sin x.$$

$y = C\sin x - 1$ verilmiş tənliyin ümumi həllidir. İndi $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ şərtini ödəyən xüsusi həllini tapaq.

$$2 = C\sin\frac{\pi}{2} - 1 \Rightarrow 2 = C - 1 \Rightarrow C = 3.$$

$y = 3\sin x - 1$ verilmiş tənliyin xüsusi həllidir.

<u>Misal № 12</u>. $(1-y^2)dx + y(1-x^2)dy = 0$ tənliyini həll edin.

<u>Həlli</u>. Tənliyi (6) şəklinə gətirək.Bunun üçün onun hər iki tərəfini $(1-y^2)(1-x^2)$ hasilinə bölək. Bölmə nəticəsində aşağıdakı tənliyi alırıq:

$$\frac{xdx}{1-x^2} + \frac{ydy}{1-y^2} = 0$$

Tənliyin hər iki tərəfini inteqrallayaraq alırıq:

$$-\frac{1}{2}\ln|1-x^2| - \frac{1}{2}\ln|1-y^2| = -\frac{1}{2}\ln C$$

Potensiallayaraq ümumi inteqralı alırıq:

$$(1-x^2)(1-y^2) = C \qquad (\ *)$$

Indi məxsusi həllər barədə sualı aydınlaşdıraq. Bunun üçün

$$(1-y^2)(1-x^2)=0$$

tənliyini həll edək. Bu tənliyin bütün kökləri

$$(y=\pm 1 \text{ və } x=\pm 1); C=0$$

olduqda (*) ümumi inteqralından alına bılər. Həqiqətən də verilmiş tənliyin məxsusi həlləri yoxdur.

Misal № 13. $xydx+(1+y^2)\sqrt{1+x^2}dx=0$ tənliyini həll edin.

Həlli. Tənliyin hər iki tərəfini $y\sqrt{1+x^2}\neq 0$ hasilinə bölərək dəyişənlərinə ayrıla bilən diferensial tənlik alırıq:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx+\frac{1+y^2}{y}dy=0.$$

Bu tənliyi inteqrallayaraq ümumi inteqralı tapaq:

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}+\int\frac{1+y^2}{y}dy=\mathrm{C}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}+\int\frac{dy}{y}+\int ydy=C;$$

$$\sqrt{1+x^2}+\ln|y|+\frac{y^2}{2}=C \qquad (**)$$

Məxsusi həllər haqqında sualı aydınlaşdıraq.

$y\sqrt{1+x^2}=0$; $y=0$ məxsusi həlldir. Çünki heç bir C xüsusi qiymətində (**) inteqralından alınmır və verilmiş tənliyin şərtlərini ödəyir.

Misal №14. $2e^x\, tg\, ydx+(3-e^x)sec^2ydy=0$ tənliyinin $y(0)=\frac{\pi}{4}$ başlanğıc şərtini ödəyən xüsusi həllini tapın.

Həlli. Tənliyin hər iki tərəfini $\mathrm{tg}\, y\,(3-e^x)$ hasilinə bölək.
Aşağıdakı dəyişənlərinə ayrıla bilən diferensial tənliyi alırıq:

$$\frac{2e^x}{3-e^x}dx+\frac{sec^2y}{tg\, y}dy=0.$$

Axırıncı tənlıyı inteqrallayaraq alırıq:

$$-2\ln|3-e^x|+ln|tg\, y|=\ln C.$$

Potensiallayaraq alırıq:

$$\frac{tg\, y}{(3-e^x)^2}=C \text{ və ya } tg\, y=C(3-e^x)^2$$

Alınmış ümumi inteqrala başlanğıc şərtləri qoyaq:

$$tg\frac{\pi}{4} = C(3-e^0)^2;\ \ 1 = 4C;\ C = \frac{1}{4}.$$

Həqiqətən

$$tg\,y = \frac{1}{4}(3-e^x)$$

və ya

$$y = arctg\frac{3-e^x}{4}$$

axtarılan xüsusi həlldir.

<u>Misal №15</u>. $y' = (4x+y+3)^2$ tənliyini həll edin .

<u>Həlli</u>. Tutaq ki, $z = 4x+y+3$; x -ə görə diferensiallayaraq alırıq:

$$z' = 4+y'; y' = z'-4$$

Onda verilmiş tənlik belə olar:

$z'-4 = z^{\,2};\ \ z' = z^2+4;\ \ \frac{dz}{dx} = z^2+4\,;\ \ \frac{dz}{z^2+4} = dx$

Axırıncı tənliyi inteqrallayaraq alırıq:

$$\frac{1}{2}arc\,tg\frac{z}{2} = x+C$$

və ya

$$\frac{1}{2}arc\,\mathrm{tg}\frac{4x+y+3}{2} = x+C$$

<u>Məsələ 2</u>. Verilmiş zaman anında olan bəzi bakteriyaların artma sürəti bakteriyaların sürəti ilə mütənasibdir. Məlumdur ki, bir saat ərzində bakteriyaların sayı 3 dəfə artıb. Əgər başlanğıc anda bakteriyaların sayı a qədər olarsa, 5 saatdan sonra bakteriyalar nə qədər artacaq?

<u>Həlli</u>. Tutaq ki, x, t anında bakteriyaların sayıdır. x dəyişən kəmiyyəti t dəyişən kəmiyyətindən asılı funksiyadır. Bu zaman məsələnin şərtinə görə x kəmiyyətinin dəyişmə şürəti belə olar: $\frac{dx}{dt}$.

Baxılan prosesi təsvir edən tənlik isə belə olur:

$\frac{dx}{dt} = k\cdot x;\ k$ hər hansı mütənasiblik əmsalıdır.

$$\frac{dx}{x} = kdt;\ \int\frac{dx}{x} = \int kdt;\ \ln x = kt+\ln C, \ln\frac{x}{C} = kt, \frac{x}{C} = e^{kt},$$

$$x = Ce^{kt}.$$

C sabitini $x(0) = a$ şərtindən tapaq:
$a = Ce^{k\cdot 0}; C = a, x = ae^{kt}$ xüsusi həlldir.

$$t = 1; x = 3a; 3a = ae^k;\ e^k = 3.$$

$$x = a \cdot 3^t = 243\, a.$$

Deməli 5 saat ərzində bakteriyaların sayı 243 dəfə artar.

§4.Birtərtibli bircins diferensial tənliklər

Bircins diferensial tənliklər anlayışı bircins funksiyalar anlayışı ilə bağlıdır.
$P(x,y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i\, y^j$ funksiyası o zaman n tərtibli bircins funksiya adlanır ki, onun hədləri bircins olsun.
Tərif 1. $\forall k$ üçün $P(kx,ky) \equiv k^n P(x,y)$ olarsa $P(x,y)$ funksiyasına n tərtibli bircins funksiya deyilir.
Məsələn: $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 5y^3$ funksiyası üç tərtibli bircins funksiyadır.

$$f(kx,ky) = (kx)^3 - 3kx \cdot (ky)^2 + 5(ky)^3 =$$
$$= k^3(x^3 - 3xy^2 + 5y^3) = k^3 f(x,y).$$

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

diferensial tənliyinə baxaq.
Tərif 2. Əgər x, y dəyişənlərinin diferensiallarlndakı $P(x,y)$ və $Q(x,y)$ funksiyaları eyni tərtibli bircins funksiyalardırsa, onda (1) diferensial tənliyi bircins diferensial tənlik adlanır.

İsbat etmək olar ki, $z - x$-dən asılı yeni funksiya olduqda $z = \frac{y}{x}$ əvəzləməsi ilə (1) tənliyini dəyişənlərinə ayrıla bılən diferensial tənliyə gətirmək olar.Tutaq ki, (1) tənliyi

$$y' = f(x,y) \qquad (2)$$

şəklində yazılmışdır və ya $dy = f(x,y)dx\,; dy -$əmsalı birdir, yəni sıfır tərtibli bircins funksiyadır, onda $f(x,y)$ də sıfır tərtiblı bircins funksiyadır.(2) tənliyinin sağ tərəfi $f(x,y)$ sıfır tərtibli bircins funksiya olduqda bircins adlanır. Bircins diferensial tənliyi

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (3)$$

şəklində yazmaq olar. z yeni funksiya olduqda $y = xz$ vəzləməsi aparaq. $y = xz$-i diferensiallayaraq alırıq:

$\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$; y və y'-in ifadələrini (1)-də yerinə yazaraq alırıq:

$z + x\frac{dz}{dx} = \varphi(z)$ və ya dəyişənləri ayıraraq alırıq:

$$\frac{dz}{\varphi(z)-z} = \frac{dx}{x} \tag{4}$$

(4) dəyişənlərinə ayrıla bilən diferensial tənlikdir.

Misal №1. $(x^2 - y^2)dx + xydy = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli.$y = xz$ (z, x-dən asılı yeni funksiyadır) əvəzləməsi aparaq. $dy = zdx + xdz$,onda tənlik belə olar:

$$(x^2 - x^2z^2)dx + x^2z(zdx + xdz) = 0.$$

Sadələşdirdikdən sonra alırıq:

$$dx + xzdz = 0$$

və ya $zdz = -\frac{dx}{x}$.

Alınmış tənliyi inteqrallayaraq alırıq:

$\frac{z^2}{2} = -\ln x + \frac{1}{2}\ln C$; $z^2 = \ln\frac{C}{x^2}$; $z = \frac{y}{x}$ olduğundan, $\frac{y^2}{x^2} = \ln\frac{C}{x^2}$ verilmiş bircins tənliyin ümumi həllidir.

Misal № 2. $y' = \frac{y+2\sqrt{xy}}{x}$ tənliyini həll edin.

Həlli. Asanlıqla müəyyən etmək olar ki, verilmiş tənliyin sağ tərəfi sıfır ölçülü bircins funksiyadır. $y = xz$ (z – x-dən asılı hər hansı funksiyadır) əvəzləməsi aparaq. Diferensiallayaraq alırıq: $y' = z + xz'$. Onda verilmiş tənlik belə olur:

$$z + xz' = \frac{xz + 2\sqrt{x^2z}}{x}$$

və ya

$$z + xz' = z + 2\sqrt{z}; xz' = 2\sqrt{z}\,; \frac{dz}{2\sqrt{z}} = \frac{dx}{x}.$$

Dəyişənlərinə ayrıla bilən tənlik aldıq. İnteqrallayaraq alırıq:

$$\sqrt{z} = \ln|x| + \ln C;\ \sqrt{z} = \ln|Cx|; z = ln^2|Cx|.$$

$z = \frac{y}{x}$ olduğundan $\frac{y}{x} = ln^2|Cx|$ və ya $y = xln^2|Cx|$- verilmiş tənliyin ümumi həllidir.

Misal № 3. $yy' = 2y - x$ bircins tənliyini həll edin.
Həlli. $y = zx$ əvəxləməsi aparaq, burada z, x dəyişənindən asılı hər hansı funksiyadır. Diferensiallayaraq alırıq: $y' = z'x + z$.
y və y'-in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yerinə yazaq:

$$zx(z'x + z) = 2zx - x.$$

$$zx(z'x + z) = x(2z - 1) \Rightarrow z(z'x + z) =$$

$$= 2z - 1 \Rightarrow z'x + z = \frac{2z - 1}{z}.$$

$$z'x = \frac{2z - 1}{z} - z \Rightarrow z'x = \frac{2z - 1 - z^2}{z} \Rightarrow z'x = -\frac{z^2 - 2z + 1}{z}.$$

Dəyişənlərinə ayrıla bilən diferensial tənlik aldıq. $z' = \frac{dz}{dx}$ yazaq.

$$\frac{dz}{dx} \cdot x + \frac{z^2 - 2z + 1}{z} = 0 \Rightarrow xdz + \frac{z^2 - 2z + 1}{z} dx = 0.$$

$x \cdot \frac{z^2 - 2z + 1}{z} \neq 0$ inteqrallayıcı vuruğuna bölək:

$$\frac{dz}{z^2 - 2z + 1} \cdot z + \frac{dx}{x} = 0.$$

Aldığımız tənliyi inteqrallayaq:

$$\int \frac{zdz}{z^2 - 2z + 1} + \int \frac{dx}{x} = \ln C \Rightarrow \int \frac{(z - 1 + 1)}{(z - 1)^2} dz + \ln x = \ln C.$$

$$\int \frac{dz}{z - 1} + \int \frac{dz}{(z - 1)^2} + \ln x = \ln C \Rightarrow \ln \frac{(z - 1) \cdot x}{C} = \frac{1}{z - 1}.$$

$$\frac{(z - 1) \cdot x}{C} = e^{\frac{1}{z - 1}} \Rightarrow (z - 1) \cdot x = C \cdot e^{\frac{1}{z - 1}}.$$

$z = \frac{y}{x}$ olduğunu nəzərə alsaq:

$$\left(\frac{y}{x} - 1\right) \cdot x = C \cdot e^{\frac{1}{\frac{y}{x} - 1}} \Rightarrow y - x = Ce^{\frac{1}{\frac{y - x}{x}}} \Rightarrow y = x + C \cdot e^{\frac{x}{y - x}};$$

Beləliklə $y = x + C \cdot e^{\frac{x}{y - x}}$ verilmiş bircins tənliyin ümumi həllidır.
Misal № 4. $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$ bircins tənliyini həll edin.
Həlli. $y = zx$ əvəzləməsi aparaq, burada z, x dəyişənindən asılı hər hansı funksiyadır. Diferensiallayaraq alırıq: $y' = z'x + z$. y vəy'-in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yerinə yazaq:

$$x^2 + z^2x^2 - 2x \cdot zx \cdot (z'x + z) = 0. x^2 \neq 0$$
ixtisar edək:
$$1 + z^2 - 2z \cdot (z'x + z) = 0 \Rightarrow 2z \cdot (z'x + z) = 1 + z^2.$$
$$z'x + z = \frac{1 + z^2}{2z} \Rightarrow z'x = \frac{1 + z^2}{2z} - z \Rightarrow z'x =$$
$$= \frac{1 + z^2 - 2z^2}{2z} \Rightarrow z'x = \frac{1 - z^2}{2z}.$$
Dəyişənlərinə ayrıla bilən diferensial tənlik aldıq. $z' = \frac{dz}{dx}$ yazaq.
$$\frac{dz}{dx} \cdot x - \frac{1 - z^2}{2z} = 0 \Rightarrow xdz - \frac{1 - z^2}{2z} dx = 0.$$
$x\left(\frac{1-z^2}{2z}\right) \neq 0$ inteqrallayıcı vuruğuna bölək:
$$\frac{2z}{1 - z^2} dz - \frac{dx}{x} = 0.$$
İnteqrallayaraq alırıq: $\int \frac{2zdz}{1-z^2} - \int \frac{dx}{x} = -\ln C.$
$$\int \frac{d(z^2)}{1 - z^2} - \ln x = -\ln C \Rightarrow -\ln(1 - z^2) - \ln x = -\ln C.$$
$\ln(1 - z^2) \cdot x = \ln C.$ $z = \frac{y}{x}$ olduğunu nəzərə alsaq:
$$\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) \cdot x = C \Rightarrow \frac{x^2 - y^2}{x^2} \cdot x = C \Rightarrow x^2 - y^2 = Cx.$$
Verilmiş bircinc tənliyin ümumi inteqralı belə olur:
$$x^2 - y^2 = Cx.$$

§ 5. Birtərtibli xətti diferensial tənliklər

Əgər tənlik axtarılan y funksiyasından və onun birinci tərtib törəməsindən ibarətdirsə və yy' hasilindən ibarət deyilsə, belə bir tərtibli diferensial tənlik xətti tənlik adlanır. Bir tərtibli diferensial tənliyin ümumi şəkli belədir:
$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (1)$$
(1)-i həll etmək üçün y funksiyasını x -dən asılı başqa iki funksiyanın hasili şəklində yazaq:
$$y = u(x)v(x) \quad (2)$$

(2)-ni diferensiallayaraq alırıq:

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} \tag{3}$$

(2) və (3)-ü (1)-ə qoyaraq alırıq:

$v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx} + P(x)uv = Q(x)$ və ya

$$v\left[\frac{du}{dx} + P(x)u\right] + u\frac{dv}{dx} = Q(x) \tag{4}$$

Axtarılan $y(x)$ funksiyası x -dən asılı iki funksiyanın hasilindən ibarət olduğundan onlardan birini istədiyimiz kimi seçə bilərik. $u(x)$ funksiyasını elə seçək ki, kvadrat mötərizə içərisindəki ifadə sıfra bərabər olsun. Bunun üçün

$$\frac{du}{dx} + P(x)u = 0 \tag{5}$$

tənliyinin elə xüsusi həllini tapaq ki, o dəyişənlərinə ayrıla bilən diferensial tənlik olsun. u funksiyasını belə seçdikdə (4) tənliyi belə olar:

$$u\frac{dv}{dx} = Q(x) \tag{6}$$

(5) tənliyini həll edərək $u(x)$ funksiyasını tapaq

$\frac{du}{dx} = -P(x)u$; $\frac{du}{u} = -P(x)dx$; $\ln u = -\int P(x)dx$ buradan

$$u = e^{-\int P(x)dx} \tag{7}$$

(5)-i həll edərkən elə xüsusi həlli tapırıq ki, $\forall\, C = 0$ qiymətinə uyğun olsun.(7)-ni (6)-ya qoyaraq alırıq:

$$e^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx} = Q(x)$$

$$dv = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx; v = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C \tag{8}$$

(7) və (8)-i (2) tənliyinə qoyaraq (1) tənliyinin ümumi həllini alırıq:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

<u>Misal № 1</u>. $y' + ytgx = \frac{1}{\cos x}$ tənliyini həll edin.

<u>Həlli</u>. Verilmiş tənlik xəttidir. u və v x arqumentindən asılı funksiyalar olduqda $y = uv$ əvəzləməsini aparaq.

$y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$ və bu zaman verilmiş tənlik belə olar:

$$u'v + uv' + uvtgx = \frac{1}{\cos x}$$

və ya

$$v(u' + utgx) + uv' = \frac{1}{\cos x} \qquad (*)$$

u funksiyasını elə seçək ki,

$$u' + utgx = 0 \qquad (a)$$

Bu halda (*) tənliyi belə olar:

$$uv' = \frac{1}{\cos x} \qquad (b)$$

(a) tənliyini həll edək:

$\frac{du}{dx} = -utgx$; $\frac{du}{u} = -tgxdx$; $\ln u = \ln\cos x; u = \cos x$.

((a) tənliyinin elə həllini tapaq ki, $\forall C = 0$ qiymətinə uyğun olsun).

$u = \cos x$ ifadəsini (b) tənliyinə qoyaraq alırıq:

$$\cos x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\cos x}; dv = \frac{dx}{cos^2 x}; v = tgx + C.$$

Onda $y = uv = \cos x(tgx + C)$ və ya $y = C\cos x + \sin x$ verilmiş tənliyin ümumi həllidir.

<u>Misal №2</u>. $A(1;1)$ nöqtəsindən keçən elə əyri tapın ki, toxunanın ordinat oxunda kəsdiyi parça toxunma nöqtəsinin absisinə bərabər olsun.

<u>Həlli</u>. Toxunanın tənliyini $y = kx + b$ şəklində yazaq; k bucaq əmsalı, b toxunanın ordinat oxundan kəsdiyi parçadır. Bucaq əmsalı $k = y'$ olduğundan $b = y - xy'$. Misalın şərtinə görə $b = x$ və ya $y - xy' = x$. Alınmış

$xy' - y = -x$ tənliyi xəttidir. (2) əvəzləməsini y' üçün (3) ifadəsinə tətbiq edərək alırıq:

$$x(u'v + uv') - uv = -x$$

və ya

$$v(xu' - u) + xuv' = -x \qquad (**)$$

u funksiyasını elə seçək ki,

$$xu' - u = 0 \qquad (a)$$

Onda $(**)$ tənliyi

$$xuv' = -x \qquad (b)$$

(a) tənliyindən alırıq ki, $u = x. u = x$-i (b)-yə qoyaraq alırıq: $x^2v' = -x$ və ya x-ə ixtisar edərək alırıq:$x\frac{dv}{dx} = -1. dv = -\frac{dx}{x}$.

Axırıncı tənliyi inteqrallayaraq $v = \ln\frac{C}{x}$ alırıq. Onda $y = x\ln\frac{C}{x}$- axtarılan əyrilər ailəsinin ümumi həlldir. Bu ümumi həlldən axtarılan əyrini tapmaq üçün $y(1) = 1$ şərtindən istifadə edək. Bu şərt daxilində $1 = \ln C$ və ya $C = e$.

Həqiqətən də $y = x\ln\frac{e}{x}$ - axtarılan əyrinin tənliyidir.

<u>Misal № 3</u>. $xy' + y = \ln x + 1$ tənliyini həll edin.

<u>Həlli</u>. Verilmiş tənlik xəttidir. u və v x arqumentindən asılı funksiyalar olduqda $y = uv$ əvəzləməsini aparaq.

$y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$ və bu zaman verilmiş tənlik belə olar:

$$x(u'v + uv') + uv = \ln x + 1$$

və ya

$$v(xu' + u) + xuv' = \ln x + 1 \qquad (*)$$

u funksiyasını elə seçək ki,

$$xu' + u = 0 \qquad (a)$$

Bu halda (*) tənliyi belə olar:

$$xuv' = \ln x + 1 \qquad (b)$$

(a) tənliyini həll edək. ((a) tənliyinin elə həllini tapaq ki, $\forall C = 0$ qiymətinə uyğun olsun).

$$x\frac{du}{dx} + u = 0 \Rightarrow xdu + udx = 0$$

Axırıncı tənlik dəyişənlərinə ayrıla biləndir. $ux \neq 0$ inteqrallayıcı vuruğuna bölək:

$$\frac{du}{u} + \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \ln ux = 0.$$

$$ux = 1 \Rightarrow u = \frac{1}{x}.$$

$u = \frac{1}{x}$ ifadəsini (b) tənliyinə qoyaraq alırıq:$v' = \ln x + 1$.

$$v = \int(\ln x + 1)dx = \int \ln x dx + \int dx =$$

$$= x + x\ln x - x + C = x\ln x + C.$$

Deməli: $v = x\ln x + C$. Onda $y = uv = \frac{1}{x}(x\ln x + C) = \ln x + \frac{C}{x}$.
$y = \ln x + \frac{C}{x}$ verilmiş xətti tənliyin ümumi həllidir.

Misal № 4. $y' - \frac{3y}{x} = x$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

Həlli. Verilmiş tənlik xəttidir. u və v x arqumentindən asılı funksiyalar olduqda $y = uv$ əvəzləməsini aparaq.

$y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$ və bu zaman verilmiş tənlik belə olar:

$$u'v + uv' - \frac{3uv}{x} = x$$

və ya

$$v\left(u' - \frac{3u}{x}\right) + uv' = x \qquad (*)$$

u funksiyasını elə seçək ki,

$$u' - \frac{3u}{x} = 0 \qquad (a)$$

Bu halda (*) tənliyi belə olur:

$$uv' = x \qquad (b)$$

(a) tənliyini həll edək: $\frac{du}{dx} - \frac{3u}{x} = 0 \Rightarrow du - \frac{3u}{x}dx = 0$

$3u \neq 0$ inteqrallayıcı vuruğuna bölək: $\frac{du}{3u} - \frac{dx}{x} = 0$

((a) tənliyinin elə həllini tapaq ki, $\forall C = 0$ qiymətinə uyğun olsun).

Axırıncı tənliyi inteqrallayaq:

$$\int \frac{du}{3u} - \int \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}\ln u - \ln x = 0 \Rightarrow \ln u - 3\ln x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\frac{u}{x^3} = 0.$$

$$\frac{u}{x^3} = 1;\ u = x^3$$

$u = x^3$ ifadəsini (b) tənliyinə qoyaraq alırıq:

$$v' \cdot x^3 = x \Rightarrow v' = \frac{1}{x^2} \Rightarrow v = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C.$$

Onda $y = uv = x^3 \cdot \left(-\frac{1}{x} + C\right) = Cx^3 - x^2$.

$y = Cx^3 - x^2$ verilmiş tənliyin ümumi həllidir.

Misal № 5. $y'x + y = -xy^2$ tənliyinin ümumi həllini tapın.
Həlli. Verilmiş tənlik xəttidir. u və v x arqumentindən asılı funksiyalar olduqda $y = uv$ əvəzləməsini aparaq.
$y = uv \Rightarrow y' = u'v + uv'$ və bu zaman verilmiş tənlik belə olar:

$$(u'v + uv') \cdot x + uv = -xu^2v^2$$

və ya

$$v(u'x + u) + uv'x = -xu^2v^2 \qquad (*)$$

u funksiyasını elə seçək ki, mötərizənin içərisindəki ifadə sıfra bərabər olsun; yəni:

$$u'x + u = 0 \qquad (a)$$

Bu halda (*) tənliyi belə olur:

$$uv'x = -xu^2v^2 \qquad (b)$$

(a) təliyini həll edək. ((a) tənliyinin elə həllini tapaq ki, $\forall C = 0$ qiymətinə uyğun olsun).

$$\frac{du}{dx} \cdot x + u = 0 \Rightarrow xdu + udx = 0$$

Aldığımız tənlik dəyişənlərinə ayrıla bilən tənlikdir. $xu \neq 0$ inteqrallayıcı vuruğuna bölək:

$$\frac{du}{u} + \frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \ln ux = 0 \Rightarrow ux = e^0 \Rightarrow ux = 1 \Rightarrow u = \frac{1}{x}.$$

$u = \frac{1}{x}$ (a) tənliyinin həllidir. $u = \frac{1}{x}$ ifadəsini (b) tənliyinə qoyaraq alırıq:

$$v'\frac{1}{x} \cdot x = -x\frac{1}{x^2}v^2 \Rightarrow v' = -x\frac{1}{x^2}v^2 \Rightarrow v' = -\frac{1}{x}v^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v' + \frac{1}{x}v^2 = 0.$$

$$\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v^2 = 0 \Rightarrow dv + \frac{1}{x}v^2dx = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v^2} + \frac{dx}{x} = 0.$$

Aldığımız tənliyi inteqrallayaq:

$$\int \frac{dv}{v^2} + \int \frac{dx}{x} = -\ln C; \; -\frac{1}{v} + \ln x =$$

$$= -\ln C; \; \ln Cx = \frac{1}{v}; v = \frac{1}{\ln Cx}.$$

Onda $y = uv = \frac{1}{x \ln Cx}$.

$y = \frac{1}{x \ln Cx}$ verilmiş xətti diferensial tənliyin ümumi həllidir.

§6. Bernulli tənliyi

Bəzi bir tərtibli xətti olmayan diferensial tənliklər çevrilmələr vasitəsi ilə xətti tənliyə gətirilə bilir. Belə tənliklərdən biri də Bernulli tənliyidir:

$$y' + P(x)y = Q(x) \cdot y^n \qquad (1)$$

$n = 1$ olduqda (1) tənliyi dəyişənlərinə ayrıla bilən tənlik olur. $n = 0$ olduqda (1) tənliyi xətti tənlik olur. Əgər $n - 0$-dan və vahiddən fərqli ədəddirsə, onda $z = y^{1-n}$ əvəzləməsi vasitəsi ilə (1) tənliyi yeni z dəyişəninə nəzərən xətti tənliyə gətirilir.

Bernulli tənliyini

$$y = u(x)v(x) \qquad (2)$$

əvəzləməsi ilə xətti tənliyə gətirmədən həll etmək olur.

<u>Misal №1</u>. $y' + \frac{y}{x} = y^2 lnx$ tənliyini həll edin.

<u>Həlli</u>. Verilmiş tənlik Bernulli tənliyidir. $y = u \cdot v$, onda $y' = u'v + uv'$ və tənlik belə şəklə gəlir:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = u^2 v^2 lnx$$

və ya

$$v\left(u' + \frac{u}{x}\right) + uv' = u^2 v^2 lnx \qquad (*)$$

u funksiyasını elə seçək ki,

$$u' + \frac{u}{x} = 0 \qquad (a)$$

olsun.

Onda $(*)$ tənliyi u-ya ixtisar edildikdən sonra

$$v' = uv^2 lnx \qquad (b)$$

şəklinə gəlir.

(a) tənliyindən $u = \frac{1}{x}$ xüsusi həllini alırıq və onu (b) tənliyinə qoyuruq.

Onda dəyişənlərinə ayrıla bilən $v' = \frac{1}{x} v^2 lnx$ diferensial tənliyi alarıq:

$$\frac{dv}{v^2} = lnx \cdot \frac{dx}{x}; \frac{dv}{v^2} = lnx\, d(lnx)$$

Axırıncı tənliyi inteqrallayaraq $-\frac{1}{v} = \frac{(lnx)^2}{2} + \frac{C}{2}$, $v = -\frac{2}{(lnx)^2+C}$ alarıq.

Həqiqətən də $y = uv = -\frac{2}{x(ln^2x+C)}$ verilmiş tənliyin ümumi həllidir.

Misal №2. $y' + 2xy = 2x$

Həlli. $y = u \cdot v$. Onda $u'v + uv' + 2x \cdot uv = 2x$,

yəni $u' \cdot v + u \cdot (v' + 2xv) = 2x$

əvvəlcə $v' + 2x \cdot v = 0$ tənliyini həll edək.

$\frac{dv}{v} = -2xdx$, $ln|v| = -x^2$, $v = e^{-x^2}$

Indi $u' \cdot e^{-x^2} + u \cdot 0 = 2x$ tənliyini həll edək. $\frac{du}{dx} = 2x \cdot e^{x^2}$,

$$du = \int 2x \cdot e^{x^2} dx, \quad u = e^{x^2} + C$$

Beləliklə verilmiş tənliyin ümumi həlli:

$$y = u \cdot v = \left(e^{x^2} + C\right) \cdot e^{-x^2}$$

Yəni $y = 1 + C \cdot e^{-x^2}$.

§7 Laqranj tənliyi

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \tag{1}$$

tənliyinə baxaq, burada φ və ψ funksiyaları y'-dən asılı naməlum funksiyalardır, $\varphi(y')$ funksiyası y'-dən fərqlidir. Belə tip tənlikləri Laqranj tənliyi adlandırırlar. Bu tənlik x və y dəyişənlərinə nəzərən xəttidir. Bu halda belə tənliyi köməkçi parametrin daxil edilməsi metodu ilə həll edirlər. $y' = p$ əvəzləməsi apararaq ümumi həlli tapaq. Onda (1) tənliyi belə olar:

$$y = x\varphi(p) + \psi(p) \tag{2}$$

x-ə görə diferensiallayaraq alırıq:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(p) + x\varphi'(p) \cdot \frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx},$$

yəni

$$p - \varphi(p) = \left(x \cdot \varphi'(p) + \psi'(p)\right)\frac{dp}{dx}$$

və ya

$$\left(p - \varphi(p)\right)\frac{dx}{dp} - x\varphi'(p) = \psi'(p) \tag{3}$$

(3) tənliyi $x = x(p)$ naməlum funksiyasına nəzərən xətti tənlikdir. (3) tənliyini həll edərək alırıq:

$$x = \lambda(p; c) \tag{4}$$

(2) və (4) tənliklərindən p parametrini yox edərək (1) tənliyinin ümumi inteqralını alırıq: $y = \gamma(x; c)$

Misal №1. $y = 2xy' - 3(y')^2$ diferensial tənliyini həll edin.

Həlli: Tənliyi $y' = p$ əvəzləməsi edərək həll edək. Onda tənlik belə olar:

$y = 2xp - 3p^2$. Tənliyin hər iki tərəfini diferensiallayaraq alırıq:

$dy = 2xdp + 2pdx - 6pdp.$

$dy = pdx$ olduğundan, $pdx = 2xdp + 2pdx - 6pdp,$

$$-pdx = 2xdp - 6pdp$$

p −yə bölərək alırıq:

$$-dx = \frac{2x}{p} \cdot dp - 6dp \Rightarrow \frac{dx}{dp} + \frac{2}{p} \cdot x - 6 = 0$$

$x(p)$ dəyişəninə nəzərən xətti tənlik aldıq.

Inteqrallayıcı vuruq belə olur:

$$u(p) = exp\left(\int \frac{2}{p} dp\right) = exp(2ln|p|) =$$
$$= exp(ln|p|^2) = |p|^2 = p^2$$

Onda xətti diferensial tənliyin ümumi həlli belə olur:

$$x(p) = \frac{\int p^2 \cdot 6dp + C}{p^2} = \frac{\frac{6p^3}{3} + C}{p^2} = 2p + \frac{C}{p^2}$$

Bu ifadəni Laqranj tənliyində yerinə yazaraq alırıq:

$$y = 2\left(2p + \frac{C}{p^2}\right) \cdot p - 3p^2 = 4p^2 + \frac{2C}{p} - 3p^2 = p^2 + \frac{2C}{p}$$

Beləliklə, verilmiş tənliyin ümumi həlli parametrik şəkildə belə olur:

$$\begin{cases} x(p) = 2p + \dfrac{C}{p^2} \\ y(p) = p^2 + \dfrac{2C}{p} \end{cases}$$

Laqranj təınliyinin ümumi həllindən başqa məxsusi həlli də ola bilər.

$\varphi(p) - p = 0$ tənliyini həll edərək alırıq:$2p - p = 0$ və ya $p = 0$
Onda tənliyin məxsusi həlli belə olur.

$$y = \varphi(0) \cdot x + \psi(0) = 0 \cdot x + 0 = 0$$

§8 Klero tənliyi.

$\varphi(y') = y'$ olduqda Laqranj tənliyinin xüsusi halına baxaq. Onda Laqranj tənliyi belə olar:

$$y = x \cdot y' + \psi(y') \qquad (1)$$

(1) tənliyi Klero tənliyi adlanır.
$y' = p$ əvəzləməsi apararaq, alırıq:

$$y = x \cdot p + \psi(p) \qquad (2)$$

x-ə görə diferensiallayaraq alırıq:

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}$$

və ya

$$\left(x + \psi'(p)\right)\frac{dp}{dx} = 0$$

Əgər $\frac{dp}{dx} = 0$ olarsa, onda $p = C$
(1) və (2) –ni nəzərə alaraq tənliyin ümumi həllini alırıq:

$$y = x \cdot C + \psi(C) \qquad (3)$$

Əgər $x + \psi'(p) = 0$ olarsa, tənliyin parametrik şəkildə xüsusi həllini alırıq:

$$x = -\psi'(p),\ y = xp + \psi(p) \qquad (4)$$

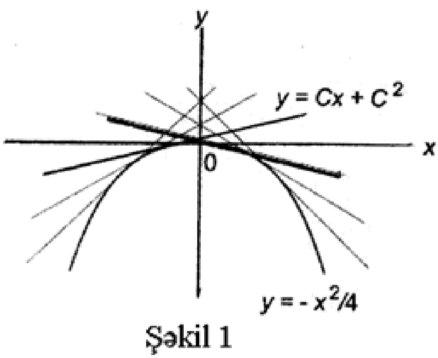
(4) tənliyi Klero tənliyinin məxsusi həllidir.

Misal 1. $y = xy' + (y')^2$ tənliyinin məxsusi və ümumi həllini tapın.

Həlli. Verilmiş tənlik Klero tənliyidir. $y' = p$ əvəzləməsi aparaq.

$$y = xp + p^2 \qquad (*)$$

x dəyişəninə nəzərən diferensiallayaraq alırıq və $dy = pdx$



Şəkil 1

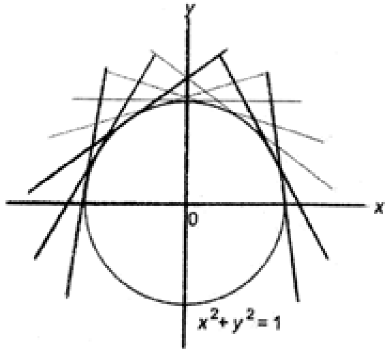
$$pdx = xdp + pdx + 2pdp$$

$$xdp + 2pdp = 0,$$
$$dp(x + 2p) = 0$$
Birinci vuruğu sıfra bərabər edərək alırıq:
$$dp = 0 \Rightarrow p = C$$
Bunu (*) tənliyində yerinə yazaq:
$y = Cx + C^2$. Bu isə verilmiş Klero tənliyinin ümumi həllidir. Qrafiki olaraq misalın həlli bir parametrli düz xətlər ailəsindən ibarətdir.
Ikinci vuruğu sıfra bərabər edərək alırıq:
$x + 2p = 0$ və ya $x = -2p$
Bu tənlik diferensial tənliyin məxsusi həllinə uyğundur və parametrik şəkildə belə yazılır:
$$\begin{cases} x = -2p \\ y = xp + p^2 \end{cases}$$
Sistemdən p-ni yox edərək inteqral əyrisinin aşağıdakı həllini alırıq:
$$p = -\frac{x}{2}, \Rightarrow y = x\left(-\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{4}$$
$$y = -\frac{x^2}{4}$$
Həndəsi nöqteyi nəzərindən $y = -\frac{x^2}{4}$ parabolası ümumi həllə müəyyən edilən düz xətlər ailəsinin qurşayanıdır. (şəkil 1)
Misal 2. $y = xy' + \sqrt{(y')^2 + 1}$ diferensial tənliyinin məxsusi və ümumi həllini tapın.
Həlli. $y' = p$ əvəzləməsi aparaq.
$$y = xp + \sqrt{p^2 + 1} \qquad (**)$$
Bu tənliyin hər iki tərəfini x dəyişəninə nəzərən diferensiallayaraq alırıq:
$$dy = xdp + pdx + \frac{pdp}{\sqrt{p^2 + 1}}$$
$dy = pdx$ olduğundan,

$$pdx = xdp + pdx + \frac{pdp}{\sqrt{p^2+1}}$$

və ya

$$\left(x + \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}\right)dp = 0$$



Şəkil 2

$dp = 0$ halına baxaq. Onda $p = C$. Aldığımız qiyməti (**) tənliyində yazaraq, tənliyin ümumi həllini alırıq:

$$y = Cx + \sqrt{C^2+1}.$$

Qrafiki olaraq bu həll bir parametrli düz xətlər ailəsinin həllinə uyğundur. İkinci hal $x = -\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}$ tənliyi ilə müəyyən olunur.

y üçün uyğun parametrik ifadəni tapaq:

$$y = xp + \sqrt{p^2+1} = -\frac{p^2}{\sqrt{p^2+1}} + +\sqrt{p^2+1} = \frac{-p^2+p^2+1}{\sqrt{p^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Düsturlardan x və y dəyişənləri üçün p parametrini yox edək. Axırıncı tənlikləri kvadrata yüksəldərək alırıq:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{-p}{\sqrt{p^2+1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{p^2+1}}\right)^2 = \frac{p^2+1}{p^2+1} = 1.$$

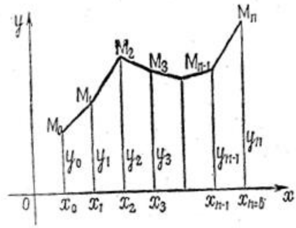
Alınmış ifadə mərkəzi koordinat başlanğıcında olan və radiusu 1-ə bərabər olan çevrənin tənliyidir. Beləliklə tənliyin məxsusi həlli OXY müstəvisində vahid çevrədir, bu çevrə düz xətlər ailəsinin qurşayanıdır (şəkil 2).

§9. Eyler üsulu vasitəsi ilə bir tərtibli diferensial tənliyi təqribi həlli

Tutaq ki,

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

tənliyi verilmişdir və onun $y(x_0) = y_0$ şərtini ödəyən xüsusi həllini tapmaq lazımdır. Yəni $M(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçən inteqral əyrisini tapmaq lazımdır. İnteqral əyrisini düzbucaqlı parçalarından ibarət olan sınıq xətt şəklində təqribi olaraq qurmaq olar.



Bu sınıq xəttin $[x_0, b]$ parçasında qurulması üsuluna baxaq. $[x_0, b]$ parçasını $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n = b$ nöqtələri ilə n bərabər hissəyə bölək və bu nöqtələrdən OY oxuna paralel olan düz xətlər keçirək.

Inteqral əyrisinə aid olan başlanğıc $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsindən inteqral əyrisini əvəz edən sınıq xətt çəkək. (1) tənliyinin sağ tərəfinə M_0 nöqtəsinin koordinatlarını qoyaq və inteqral əyrisinə $k_0 = f(x_0, y_0)$ nöqtəsində çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalını hesablayaq.

M_0 nöqtəsindən bucaq əmsalı k_0 olan və $x = x_1$ düz xətti ilə $M_1(x_1, y_1)$ nöqtəsində kəsişən düz xətt keçirək

M_0M_1 toxunanının tənliyi belədir:

$$y - y_0 = k_0(x - x_0) \qquad (2)$$

$M_1(x_1, y_1)$ nöqtəsini inteqral əyrisinin nöqtəsi qəbul edək.

Bu nöqtə (2) toxunanının üzərində yerləşdiyindən (2) –yə verilmiş koordinatlar əvəzinə bu nöqtənin koordinatlarını qoyaraq alırıq:

$$y' = y_0 + k_0(x_1 - x_0) \qquad (3)$$

M_1 nöqtəsinin koordinatlarını bilərək onu (1) tənliyinə qoyub $k_1 = f(x_1, y_1)$ bucaq əmsalını tapa bilərik. M_1 nöqtəsindən bucaq əmsalı k_1 olan və $x = x_2$ düz xətti ilə $M_2(x_2, y_2)$ nöqtəsində kəsişən düz xətt keçirək.

M_1M_2 toxunanının tənliyini yazaq:

$$y - y_1 = k_1(x - x_1) \qquad (4)$$

Belə ki, $M_2(x_2, y_2)$ nöqtəsi (4) düz xəttinə aid olduğundan bu nöqtənin koordinatlarını (4)-ə qoyaraq alarıq:

$$y_2 = y_1 + k_1(x_2 - x_1) \qquad (5)$$

M_2 nöqtəsinin koordinatlarını bilərək (1) tənliyindən $k_2 = f(x_2, y_2)$ bucaq əmsalını tapmaq və $x = x_2$ düz xətti ilə $M_3(x_3, y_3)$ nöqtəsində kəsişən M_2M_3 düz xəttini qurmaq olar. Bu prosesi $M_n(x_n, y_n)$ təpə nöqtəsinin koordinatını tapana qədər davam etdirmək olar.

Belə üsulla qurulmuş $M_1, M_2, \dots, M_n$ sınıq xətti $[x_0, b]$ parçasında $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsindən keçən təqribi inteqral əyrisidir. Bu əyri Eyler əyrisi adlanır.

Eyler əyrisi və axtarılan inteqral əyrisinin ümumi $M_0(x_0, y_0)$ ortaq nöqtəsi var. Əgər $[x_0, b]$ parçası n bərabər hissəyə bölünmüşdürsə, onda $h = \frac{b-x_0}{n}$ parçası hesablamanın addımı adlanır.

Aydındır ki, h kəmiyyətinin azaldılması qurmanın dəqiqliyini artırır. Eyler əyrisini qurarkən təpə nöqtələrinin koordinatlarını bilavasitə qrafikdən götürmək lazımdır.

Sınıq xəttin təpə nöqtəsinin ordinatının qiymətinə verilmiş diferensial tənliyin təqribi ədədi qiymət kimi baxmaq olar.

Bu zaman $M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$ nöqtəsinin ordinatı

$$y_{i+1} = y_1 + k_1 \cdot h$$

və ya

$$y_{i+1} = y_1 + f(x_1, y_1) \cdot h \qquad (6)$$

düsturundan tapılır.

<u>Misal</u>. Eyler əyriləri üsulunu tətbiq edərək $y(0) = 0$ başlanğıc şərtini ödəyən

$y' = xy^2 + 1$ tənliyinin [0,1] parçasında təqribi həllini tapın.

<u>Həlli</u>. $n = 5$ olduqda [0,1] parçasını 5 bərabər hissəyə bölək. Onda hesablamanın addımı $h = \frac{1-0}{5} = 0{,}2$ olar.

	x_i	y_i	$f(x_i, y_1)$	$f(x_i, y_1) \cdot h$
$i = 0$	0	0	1	0,2
$i = 1$	0,2	0,2	1,008	0,2016
$i = 2$	0,4	0,4016	1,0645	0,2129
$i = 3$	0,6	0,6145	1,2266	0,2453
$i = 4$	0,8	0,8598	1,5914	0,3183
$i = 5$	1	1,1781		

Eyler əyrisinin təpə nöqtələrinin ordinatını hesablamaq üçün 4 sütündan ibarət cədvəl düzəldək. Birinci sütunda əyrinin təpə nöqtələrinin absislərini yazaq, ikinci sütunda isə bu təpə nöqtələrinə uyğun olan ordinatların qiymətini yazaq. Üçüncü sütunda bu təpə nöqtəsində olan törəmənin qiymətini yazaq, dördüncü sütunda isə üçüncü sütunun qiymətlərinin h-a hasilini yazaq. Verilmiş cədvəldən istifadə edərək asanlıqla əyrinin təpə nöqtələrinin ordinatlarını tapmaq olar. (6) –dan göründüyü kimi bunun üçün hər əvvəki ordinata onun dördüncü sütunda duran artımını gəlmək lazımdır. Beləliklə, axtarılan $y(x)$ funksiyasının $x = 1$-də qiyməti $1{,}1781$-dir.

§10. İkitərtibli diferensial tənliklər

İki tərtibli diferensial tənliyin ümumi şəkli belədir:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad (1)$$

Əgər (1) tənliyi törəməyə nəzərən həll edilirsə,

$$y'' = f(x.y, y') \qquad (2)$$

alırıq.C_1və C_2 sabitlərinin ixtiyari qiymətində (1) və ya (2) tənliyini eyniliyə çevirən $y = y(x, C_1, C_2)$-yə tənliyin ümumi həlli deyilir.C_1 və C_2 sabitlərinin konkret qiymətlərində $y = y(x, C_1, C_2)$ ümumi həllindən alınan həllə iki tərtibli diferensial tənliyin xüsusi həlli deyilir. İki tərtibli diferensial tənliyin həllinin qrafiki inteqral əyrisi adlanır. İki tərtibli diferensial tənliyinin xüsusi həlli

$$y_0 = y(x_0); \;\; y'(x_0) = y_0' \qquad (3)$$

şərtindən alınır. (3) şərtindən C_1və C_2 tapılır.(2) tənliyinin (3) şərtini ödəyən xüsusi həllinin tapılması məsələsinə iki tərtibli diferensial tənlik üçün ***Koşi*** məsələsi deyilir. İki tərtibli diferensial tənlik üçün ***Koşi*** məsələsi ondan ibarətdir ki, $M_0(x_0, y_0)$ nöqtəsindən y_0' istiqamətində keçən inteqral əyrisi tapılsın.(3) şərtinin ödənilməsi ilə (2) tənliyinin xüsusi həllinin tapılması aşağıdakı varlıq və yeganəlik teoremi ilə ifadə olunur.

Teorem. Əgər $f(x, y, y')$ funksiyası $M_0(x_0, y_0, y_0')$ nöqtəsini özündə saxlayan oblastda kəsilməzdirsə, onda $y'' = f(x, y, y')$ tənliyinin $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$ şərtini ödəyən xüsusi həlli vardır. Əgər bundan başqa $\frac{\partial f}{\partial y}$ və $\frac{\partial f}{\partial y'}$ xüsusi törəmələri də kəsilməzdirsə, onda onun həlli yeganədir.

§11. Tərtibin azaldılmasına gətirən ikitərtibli diferensial tənliklərin sadə növlərinin inteqrallanması

Birinci növ diferensial tənliklərə asanlıqla gətirilə bilən üç tip ikinci tərtib diferensial tənliyə baxaq.

Birinci tip: $y'' = f(x)$

Tənliyin sağ tərəfi y funksiyasından və y' törəməsindən asılı deyil.Verilmiş tənliyi belə yaza bilərik:

$$\frac{dy'}{dx} = f(x) \text{ və ya } dy' = f(x)dx$$

Axırıncı tənliyi inteqrallayaraq alırıq: $y' = \int f(x)dx + C_1$.

Alınmış tənliyi yenə inteqrallayaraq (1) tənliyinin ümumi həllini alırıq:

$$y = \int [f(x)dx]dx + C_1x + C_2.$$

Misal №1. $y'' = x + \cos x$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

Həlli. $y'' = \frac{dy'}{dx}$ olduğundan $\frac{dy'}{dx} = x + \cos x$ və ya

$$dy' = (x + \cos x)dx$$

İnteqrallayaq: $y' = \int (x + \cos x)dx = \frac{x^2}{2} + \sin x + C_1$.

Onda $dy = \left(\frac{x^2}{2} + \sin x + C_1\right)dx$.

$$y = \int \left(\frac{x^2}{2} + \sin x + C_1\right)dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \cos x + C_1x + C_2 =$$

$$= \frac{1}{6}x^3 - \cos x + C_1x + C_2$$

$y = \frac{1}{6}x^3 - \cos x + C_1x + C_2$ - ümumi həlldir.

Misal №2. $y'' = 6x + \sin x$ tənliyinin $y(0) = 2; y'(0) = 3$ başlanğıc şərtini ödəyən xüsusi həllini tapın.

Həlli. $y'' = \frac{dy'}{dx}$ olduğundan, verilmiş tənlik belə olur:

$\frac{dy'}{dx} = 6x + \sin x$ və ya$dy' = (6x + \sin x)dx$

İnteqrallayaraq alırıq:

$$y' = \int (6x + \sin x)dx = 3x^2 - \cos x + C_1$$
$$dy = (3x^2 - \cos x + C_1)dx$$
və ya
$$y' = 3x^2 - \cos x + C_1 \, (*)$$
$(*)$ bərabərliyini inteqrallayaraq alırıq:
$y = x^3 - \sin x + C_1 x + C_2$-verilmiş tənliyin ümumi həllidir.
Başlanğıc şərtlərdən istifadə edək. Ümumi tənliyə $x = 0$ və $y = 2$ qiymətlərini yazaraq alırıq: $C_2 = 2$.
$(*)$ tənliyinə $x = 0$ və $y' = 3$ qiymətlərini yazaq. $3 = -1 + C_1$ və $C_1 = 4$.

Həqiqətən də $y = x^3 - \sin x + 4x + 2$ -verilmiş tənliyin başlanğıc şərtləri ödəyən xüsusi həllidir. Həndəsi olaraq axtarılan həll onu göstərir ki, inteqral əyrisi $M_0(0; 2)$ nöqtəsindən keçir.
Məsələ. Lokomotiv yolun horizontal sahəsində 90 km/saat sürətlə hərəkət edir. Əgər hərəkətin müqaviməti tormoz baş verdikdən sonra onun çəkisinin 0,3-nə bərabər olarsa nə qədər vaxtdan sonra və hansı məsafədə lokomotiv tormozla dayandırıla bilər?
Həlli. Tutaq ki, m lokomotivin kütləsidir, S- t anında gedilən yoldur, g isə agırlıq qüvvəsinin təcilidir. Nyutonun ikinci qanununa görə lokomotivin hərəkət tənliyi belə olur: $m\frac{d^2S}{dt^2} = -0{,}3\,mg$.
m -ə ixtisar etdikdən sonra alırıq: $\frac{d^2S}{dt^2} = -0{,}3\,g$.
Tutaq ki. $\frac{dS}{dt} = v$, onda $\frac{d^2S}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ və $\frac{dv}{dt} = -0{,}3g$. Bu tənliyi həll edərək alırıq:
$$dv = -0{,}3gdt; \;\; v = -0{,}3\int gdt = -0{,}3gt + C_1. \qquad (1)$$
$\forall C_1$ sabitinin qiymətini müəyyən edək. Məsələnin şərtinə görə $t = 0$ olduqda $v = 90\,km/saat$ və ya $v = 25m/san$. Ona görə də (1)-dən alırıq ki, $C_1 = 25$.
Həqiqətən də
$$v = -0{,}3gt + 25 \qquad (2)$$
və ya

$$\frac{dS}{dt} = -0{,}3gt + 25; dS = (-0.3gt + 25)dt.$$

İnteqrallayaraq alırıq:

$$S = -0{,}15gt^2 + 25t + C_2 (3)$$

$\forall C_2$ sabitinin qiymətini müəyyən edək. Şərtə görə $t = 0$ olduqda $S = 0$ olduğundan (3)-dən alırıq kı, $C_2 = 0$. Deməli,

$$S = -0{,}15gt^2 + 25t \qquad (4)$$

tənliyi verilmiş başlanğıc şərtləri ödəyən xüsusi həlldir. Lokomotivin dayanması üçün tormoz vaxtını (2)-dən tapaq. $v = 0$ olduqda

$$t = \frac{25}{0{,}3g} \approx \frac{25}{0{,}3 \cdot 9{,}8} \approx 8{,}5\, san.$$

(4) tənliyinə $t = 8{,}5$-i qoyaraq lokomotivin tormoz başladıqdan sonra getdiyi yolu tapaq:

$$S \approx -0{,}15 \cdot 9{,}8 \cdot 72{,}25 + 25 \cdot 8{,}5 \approx 106{,}3\, m.$$

Deməli məsələnin şərtləri daxilində 8,5 $san.$-dən sonra lokomotiv 106,3 m məsafə qət etdikdən sonra dayandırıla bılər.

İkincitip. $y'' = f(x, y')$ (2)

Tənliyin sağ tərəfi y funksiyasından asılı deyil. (2) tənliyini həll etmək üçün $y' = p$ əvəzləməsini aparaq. p-x arqumentindən asılı hər hansı funksiyadır. Onda $y'' = p'$ və (2) tənliyi x və p dəyişənlərinə nəzərən birinci tərtib tənlik olar: $p' = f(x, p)$. Əgər axırıncı tənliyin ümumi həlli $p = \varphi(x, C)$ olarsa, onda inteqrallamanı təkrar edərək alırıq: $y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2$. Bu isə (2) tənliyinin ümumi həllidir.

Misal№ 3.$y'' = \frac{y'}{1+x}$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

Həlli. Tənliyin sağ tərəfi y funksiyasından asılı deyil. $y' = p$ əvəzləməsini aparaq; onda $y'' = p'$ olduğundan alırıq:

$$p' = \frac{p}{1+x}; \frac{dp}{dx} = \frac{p}{1+x}; \frac{dp}{p} = \frac{dx}{1+x}.$$

Axırıncı tənliyi inteqrallayaraq alırıq:

$$\ln p = \ln(1 + x) + \ln C_1$$

və ya

$$p = C_1(1 + x).\, p = \frac{dy}{dx}$$

olduğundan,
$dy = C_1(1+x)dx$. Alınmiş tənliyi yenə inteqrallayaq:
$$\int dy = \int C_1\,(1+x)dx = \int (C_1x + C_1)dx = C_1\left(x + \frac{x^2}{2}\right) + C_2.$$
$y = C_1\left(x + \frac{x^2}{2}\right) + C_2$ verilmiş tənliyin ümumi həllidir.
<u>Misal №4</u>. $y'' = \frac{1}{x^2} - \frac{y'}{x}$ tənliyinin $y(1) = 1;\ y'(1) = 2$ şərtlərini ödəyən xüsusi həllini tapın.
<u>Həlli</u>. Tənliyin sağ tərəfi y funksiyasından asılı deyil. $y' = p$ əvəzləməsini aparaq; onda $y'' = p'$ olduğundan alırıq:
$$p' = \frac{1}{x^2} - \frac{p}{x}$$
və ya
$$p' + \frac{p}{x} = \frac{1}{x^2} \tag{*}$$
Alınmış (*) tənliyi birinci tərtib xətti tənlikdir. Onu həll etmək üçün $p = uv$ əvəzləməsini aparaq. (*) tənliyinin ümumi həlli belə olar:
$$p = \frac{\ln x}{x} + \frac{C_1}{x} \tag{**}$$
$(**)$ tənliyini inteqrallayaraq alırıq:
$$y = \frac{ln^2x}{2} + C_1 \ln x + C_2.$$
$y(1) = 1$ olduğundan axırıncı tənlikdən alırıq: $C_2 = 1. y'(1) = 2$ olduğundan $C_1 = 2$ alırıq. Həqiqətən də $y = \frac{ln^2x}{2} + 2\ln x + 1$ verilmiş tənliyin başlanğıc şərtləri ödəyən xüsusi həllidir.
<u>Misal № 5</u>. $y'' = \frac{2xy'}{x^2+1}$ tənliyinin $y(0) = 1; y'(0) = 3$ başlanğıc şərtini ödəyən xüsusi həllini tapın.
<u>Həlli</u>. Tənliyin sağ tərəfi y funksiyasından asılı deyil. $y' = p$; ($p - x$-dən asılı hər hansı funksiyadir)əvəzləməsini aparaq; onda $y'' = p'$ olduğundan alırıq: $y'' = \frac{dp}{dx}$
$$\frac{dp}{dx} = \frac{2xp}{x^2+1} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{2xdx}{x^2+1}.$$

İnteqrallayaraq alırıq:
$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{2xdx}{x^2+1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln p = \ln(x^2+1) + \ln C_1 \Rightarrow p = C_1(x^2+1)$$
və ya $y' = C_1(x^2+1)$. $y'(0) = 3$ başlanğıc şərtindən C_1 sabitini tapaq: $C_1 = 3$.
Onda
$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 3 \Rightarrow dy = (3x^2+3)dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \int (3x^2+3)dx \Rightarrow y = x^3 + 3x + C_2$$
$y(0) = 1$ şərtindən C_2 sabitini tapırıq: $C_2 = 1$.
Onda $y = x^3 + 3x + 1$ verilmiş tənliyin xüsusi həllidir.

Üçüncü tip. $y'' = f(y, y')$ (3)

Tənliyin sağ tərəfi y arqumentinden asılı deyil. (3) tənliyini həll etmək üçün $y' = p$ əvəzləməsini aparaq. p funksiyası y funksiyasından asılı hər hansı funksiyadır. Mürəkkəb funksiyanın diferensiallama qaydasından istifadə edərək alırıq:
$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$
Beləliklə: $y'' = p\frac{dp}{dy}$ (4)

(3) tənliyinə $y'' = p\frac{dp}{dy}$ yazaraq p və y dəyişənlərinə nəzərən birinci tərtib diferensial tənlik alırıq:
$$p\frac{dp}{dy} = f(y, p) \tag{5}$$
Əgər $p = \varphi(y, C)$ (5) tənliyinin ümumi həllidirsə, onda x və y dəyişənlərinə nəzərən dəyişənlərinə ayrıla bilən diferensial tənlik alırıq: $dy = \varphi(y, C_1)dx$.
Onda
$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx$$
və

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$$

verilmiş (3) tənliyinin ümumi inteqralıdır.

Misal №6. $(1 - y)y'' + 2(y')^2 = 0$ tənliyinin $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ başlanğıc şərtlərini ödəyən xüsusi həllini tapın.

Həlli. Verilmiş tənlik x arqumentindən asılı deyil. Tutaq ki, $y' = p$; p funksiyası y funksiyasından asılı hər hansı funksiyadır. Onda $y' = p\frac{dp}{dy}$ və verilmiş tənlik belə olur:

$$(1 - y)p\frac{dp}{dy} + 2p^2 = 0$$

və ya

$$p\left[(1 - y)\frac{dp}{dy} + 2p\right] = 0$$

Birinci vuruğu sıfra bərabər etsək alırıq $p = 0$ və ya $\frac{dy}{dx} = 0, y = C.$

Bu həll misalın şərtini ödəmir; belə ki, $O(0; 0)$ nöqtəsində əyriyə çəkilmiş toxunanın bucaq əmsalı 2-dir. İkinci vuruğu sıfra bərabər edək:

$(1 - y)\frac{dp}{dy} + 2p = 0$; $(y - 1)\frac{dp}{dy} = 2p$; $(y - 1)dp = 2pdy$; $\frac{dp}{p} = \frac{2dy}{y-1}$.

Axırıncı tənliyi inteqrallayaraq alırıq:

$$p = C_1(y - 1)^2 \qquad (*)$$

$p = \frac{dy}{dx}$ olduğundan

$$dy = C_1(y - 1)^2 dx$$

və ya

$$\frac{dy}{(y - 1)^2} = C_1 dx.$$

İnteqrallayaraq alırıq:

$$-\frac{1}{y - 1} = C_1 x + C_2 \qquad (**)$$

(**) tənliyi verilmiş tənliyin ümumi həllidir.

$y(0) = 0$ olduğundan (**)-dan alırıq: $C_2 = 1$. Şərtə görə $y'(0) = 2$; onda (*)-dan alırıq: $C_1 = 2$. Beləliklə alırıq:

$$-\frac{1}{y-1}=2x+1$$

və ya

$$y=\frac{2x}{2x+1}$$

axtarılan xüsusi həlldir.

§12. n tərtibli xətti bircins diferensial tənliklər

n tərtibli xətti bircins diferensial tənliklərin ümumi şəkli belədir:

$$y^{(n)}+a_1(x)\cdot y^{(n-1)}+a_2(x)\cdot y^{(n-2)}+\cdots+a_n(x)\cdot y=0. \qquad (1)$$

1. Əgər $y_1=y_1(x), y_2=y_2(x), \dots, y_n=y_n(x)$ funksiyaları (1) tənliyinin xüsusi həllidirsə, onda onun həlli

$y=c_1y_1+c_2y_2+\cdots=c_ny_n$ olar.

2. $\alpha_i=0\ (i=1,2,\dots,n)$ olduqda $\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\cdots+\alpha_ny_n=0$ bərabərliyi ödənilərsə, $y_1,y_2,\dots,y_n$ funksiyaları (a,b) -də xətti asılı olmayan adlanır; əks halda xətti asılı olan adlanır.

3. Vronski determinantının ümumi şəkli belədir:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & & y_n'' \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

4. Verilmiş tənliyinin xüsusi həlləri (a,b) intervalının heç bir nöqtəsində sıfra çevrilmirsə, yəni $W(x)\neq 0$ olarsa fundamental sistem təşkil edir.

Misal. Göstərin ki, $y_1=e^x, y_2=x\cdot e^x, y_3=x^2\cdot e^x$ funksiyaları hər hansı üç tərtibli xətti bircins diferensial tənlik üçün fundamental sistem təşkil edir.

Həlli. $W(x)$-i tapaq:

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & (x+1)e^x & (x^2+2x)e^x \\ e^x & (x+2)e^x & (x^2+4x+2)e^x \end{vmatrix}=$$

$$= e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x+1 & x^2+2x \\ 1 & x+2 & x^2+4x+2 \end{vmatrix} = e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 2 & 4x+2 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{3x}(4x+2-4x) = 2e^{3x}$$

Aydındır ki, $\forall x \in R$ üçün $W(x) \neq 0.$ Həqiqətən də verilmiş funksiyalar üç tərtibli xətti bircins tənliklər sistemi üçün fundamental həll təşkil edir. Ümumi halda üç tərtibli xətti bircins diferensial tənliyin ümumi şəkli belədir:
$y''' + \alpha_1(x)y'' + \alpha_2(x)y' + \alpha_3(x)y = 0.$ y_1, y_2, y_3 funksiyalarını və üçüncü tərtibədək törəmələrini bu tənliyə qoyaraq$\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x)$ -ə nəzərən üç tənlikdən ibarət sistem alırıq. Bu sistemi həll edərək $y''' - 3y'' + +3y' - y = 0$ xətti bircins tənliyini alırıq.
Onda tənliyin ümumi həlli belə olur:

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x.$$

§13. İki tərtibli sabit əmsallı xətti bircins diferensial tənliklərin həlli

Tutaq ki,

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (1)$$

p və q sabitlərdir, tənliyinin ümumi həllini tapmaq tələb olunur. (1) tənliyi iki tərtibli sabit əmsallı xətti bircins diferensial tənlik adlanır. (1) tənliyinin ümumi həlli aşağıdakı düsturdan tapılır:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 \qquad (2)$$

y_1 və y_2 bu tənliyin iki xətti asılı olmayan xüsusi həlləridir. $y_1 = y_1(x)$ və $y_2 = y_2(x)$ funksiyaları (a, b) intervalında o zaman xətti asılı olmayan adlanır ki, $\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 = 0$
bərabərliyi ödənilsin; burada $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ olduqda $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.$
y_1 və y_2 xüsusi həllərini tapmaq üçün aşağıdakı üsuldan istifadə edək. Tutaq ki, k $\forall$ sabit olduqda $y = e^{kx}$ (1) tənliyinin həllidir. Bu həll **L.Eyler** tərəfindən irəli sürülmüşdür. k parametrinin hansı qiymətlərində $y = e^{kx}$ -in (1) tənliyinin həlli olduğunu araşdıraq.

Bunun üçün $y' = ke^{kx}$ və $y'' = k^2e^{kx}$-i tapaq və (1) tənliyində yerinə qoyaq. Nəticədə aşağıdakı ifadəni alırıq:

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = e^{kx}(k^2 + pk + q) \qquad (*)$$

$y = e^{kx}$ -in (1) tənliyini ödəməsi üçün (*) ifadəsi eynilik kimi sıfra bərabər olmalıdır. e^{kx} vuruğu k-nın heç bir qiymətində sıfra bərabər olmadığından ikinci vuruq sıfra bərabər olmalıdır.

$$(k^2 + pk + q) = 0 \qquad (3)$$

tənliyini ödəyən k-nın qiymətləri üçün $y = e^{kx}$ xüsusi həllini alırıq. (3) tənliyinə (1) tənliyinin xarakteristik tənliyi deyilir. Xarakteristik tənliyi həll edərkən 3 hal ola bilər: köklər həqiqi və müxtəlifdir; köklər bərabərdir; köklər qoşma kompleksdir.

İkitərtibli sabit əmsallı bircins diferensial təliklərin ümumi həlli		
Xarakteristik tənliyin kökləri	Xarakteristik tənliyin diskriminantı	Ümumi həll
k_1, k_2 kökləri həqiqi və müxtəlifdir	$D > 0$	$y(x) = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$
$k_1 = k_2 = \alpha$ kökləri həqiqi və bərabərdir	$D = 0$	$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 + C_2x)$
k_1, k_2 kökləri kompleksdir: $k_1 = \alpha + \beta i, k_2 = \alpha - \beta i$	$D < 0$	$y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

I hal. (3) tənliyinin kökləri həqiqi və müxtəlifdir; yəni $k_1 \neq k_2$. Onda

$$y_1 = e^{k_1x} \quad \text{və} \quad y_2 = e^{k_2x}$$

xətti asılı deyil, yəni

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{k_1x}}{e^{k_2x}} = e^{(k_1-k_2)x} \neq 0$$

Bu həllər fundamental sistem təşkil edir; belə ki, onların Vronski determinantı

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} \end{vmatrix} = k_2e^{(k_1+k_2)x} - k_1e^{(k_1+k_2)x} =$$
$$= e^{(k_1+k_2)x} \cdot (k_2 - k_1) \neq 0.$$

Həqiqətən də (1) tənliyinin ümumi şəkli belə olur:

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} \qquad (4)$$

II hal. Köklər həqiqi və bərabərdir, yəni $k_1 = k_2 = \alpha$. Bu halda verilmiş tənliyin yalnız bir həlli vardır: $y = e^{\alpha x}$. Ümumi həlli tapmaq üçün y_2 həllini tapmaq tələb olunur. İkinci tənliyi seçmək üçün (1) tənliyinə daxil olan p və q parametrlərini α ilə işarə edək. Viyet teoreminə görə alırıq:
$p = -(k_1 + k_2) = -2a$; $q = k_1 k_2 = \alpha^2$. Onda verilmiş (1) tənliyi aşağıdakı kimi olar:

$$y'' - 2\alpha y' + \alpha^2 y = 0 \qquad (1')$$

İkinci y_2 həllini iki funksiyanın hasili şəklində axtarırıq; yəni $y_2 = u(x)v(x)$.Onda $y_2' = u'v + uv'$;$y_2'' = u''v + 2u'v' + uv''$; y_2'',y_2, y_2'-in qiymətlərini $(1')$-də qoyaraq alırıq:

$$u''v + 2u'v' + uv'' - 2\alpha u'v - 2\alpha uv' + \alpha^2 uv = 0,$$

və ya

$$v[u'' - 2\alpha u' + \alpha^2 u] + 2v'(u' - \alpha u) + uv'' = 0 \qquad (a)$$

u funksiyasını elə seçək ki, $u' - \alpha u = 0$ olsun. Bu tənliyi həll edərək u funksiyasını alırıq:

$$\frac{du}{dx} = \alpha u; \ \frac{du}{u} = \alpha dx; \ \ln u = \alpha x; u = e^{\alpha x}.$$

Onda $u' = \alpha e^{\alpha x}, u'' = \alpha^2 e^{\alpha x}$. u, u', u'' -i (a) tənliyinə qoyaraq alırıq: $uv'' = 0$. Bu tənliyi həll edərək alırıq:

$$v' = A, v = Ax + B.$$

Sadəlik üçün $A = 1, B = 0$ qəbul edək. Həqiqətən

$$v = x; \ y_2 = uv; \ y_2 = xe^{\alpha x}$$

Onda (1) tənliyinin ümumi həlli belə olar:

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x} \qquad (5)$$

burada $k_1 = k_2 = \alpha$ xarakteristik tənliyin kökləridir.
III hal. Xarakteristik tənliyin kökləri kompleksdir, yəni

$$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i.$$

Bu zaman (1) tənliyinin həlləri

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} \quad \text{və} \quad y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$$

funksiyalarıdır.

$$\left(D = \frac{p^2}{4} - q < 0, \alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} > 0 \right).$$

Aşağıdakı Eyler düsturlarından istifadə edirik.

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,, e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$$

onda $y_1 = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}\cos\beta x + ie^{\alpha x}\sin\beta x,$

$$y_2 = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}\cos\beta x - ie^{\alpha x}\sin\beta x.$$

(1) tənliyinin iki həqiqi xüsusi həllini tapaq. Bunun üçün y_1 və y_2 həllərinin iki xətti kombinasiyasını tapaq:

$\frac{y_1+y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x = \widehat{y_1}$ və $\frac{y_1-y_2}{2i} = e^{\alpha x}\sin\beta x = \widehat{y_2}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \widehat{y_1} & \widehat{y_2} \\ \widehat{y_1}' & \widehat{y_2}' \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta\, e^{\alpha x}\sin\beta x & \alpha e^{\alpha x}\sin\beta x + \beta e^{\alpha x}\cos\beta x \end{vmatrix}$$

$$W = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) & e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2\alpha x}\begin{vmatrix} \cos\beta x & \sin\beta x \\ \alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x & \alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x \end{vmatrix} =$$

$= e^{2\alpha x}\beta(cos^2\beta x + sin^2\beta x) = e^{2\alpha x} \cdot \beta \neq 0.$

$\widehat{y_1}$ və $\widehat{y_2}$ həlləri fundamental tənliklər sistemi təşkil edir, belə ki, $W(x) \neq 0$.

Tənliyin ümumi həlli belə olur:

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x) \qquad (6)$$

Misal №1. $y'' - 6y' + 8y = 0$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

Həlli. $k^2 - 6k + 8 = 0$ xarakteristik tənliyinin iki müxtəlif həqiqi kökü var: $k_1 = 2, k_2 = 4$. Onda tənliyin ümumi həlli $y = C_1e^{2x} + C_2e^{4x}$ olar.

Misal№2. $\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} - 3x = 0$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

Həlli. Xarakteristik tənliyi tərtib edək:

$$k^2 - 2k - 3 = 0 \Rightarrow k_1 = 3;\ k_2 = -1.$$

Xarakteristik tənliyin iki müxtəlif həqiqi kökü olduğu üçün (4) düsturuna əsasən ümumi həll belə olur:

$$x = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}.$$

Misal№3. $4\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} + \rho = 0$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

Həlli. Xarakteristik tənliyi tərtib edək:

$$4k^2+1=0 \Rightarrow k^2=-\frac{1}{4} \Rightarrow k_{1,2}=\pm\frac{1}{2}i.$$

Xarakteristik tənliyin qoşma kompleks kökləri olduğu üçün (6) düsturuna əsasən alırıq: $\rho = A\cos\frac{\varphi}{2}+B\sin\frac{\varphi}{2}$.

Misal№ 4. $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

Həlli. Xarakteristik tənliyi tərtib edək:

$$k^2+\omega^2=0 \Rightarrow k^2=-\omega^2 \Rightarrow k_{1,2}=\pm\omega i.$$

Xarakteristik tənliyin qoşma kompleks kökləri olduğu üçün (6) düsturuna əsasən alırıq: $x=A\cos\omega t+B\sin\omega t$.

Misal№5. $y''+2ay'+a^2y=0$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

Həlli. Xarakteristik tənliyi tərtib edək:

$$k^2+2ak+a^2=0 \Rightarrow (k+a)^2=0 \Rightarrow k_1=k_2=-a.$$

Xarakteristik tənliyinin iki eyni kökü olduğu üçün (5) düsturuna əsasən alırıq:

$$y=C_1e^{-ax}+C_2xe^{-ax}.$$

Misal№ 6.$y''-4y'+13y=0$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

Həlli. Xarakteristik tənliyi tərtib edək:

$$k^2-4k+13=0; k=2\pm 3i$$

Xarakteristik tənliyin qoşma kompleks kökləri olduğu üçün (6) düsturuna əsasən alırıq: $y=e^{2x}(A\cos 3x+B\sin 3x)$.

Misal№ 7. $y''-8y'+16y=0$ tənliyinin $y(0)=2;\ y'(0)=5$ başlanğıc şərtləri ödəyən xüsusi həlli tapın.

Həlli. $k^2-8k+16=0$ xarakteristik tənliyinin iki eyni kökü var: $k_1=k_2=4$, ona görə də tənliyin ümumi həlli:

$$y=C_1e^{4x}+C_2xe^{4x}.$$

Başlanğıc şərtləri nəzərə alaraq C_1və C_2 sabitlərini müəyyən edək:

$$\begin{cases} C_1+0=2 \\ 4C_1+C_2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1=2 \\ C_2=-3. \end{cases}$$

Onda tənliyin xüsusi həlli

$$y=2e^{4x}-3xe^{4x}=e^{4x}(2-3x).$$

Misal №8. $y''-6y'+8y=0$ tənliyinin $y(0)=1;\ y'(0)=2$ başlanğıc şərtlərini ödəyən xüsusi həllini tapın.

Həlli.$k^2-6k+8=0$ xarakteristik tənliyinin iki müxtəlif həqiqi kökü var: $k_1=2, k_2=4$. Onda tənliyin ümumi həlli $y=C_1e^{2x}+$

$+C_2e^{4x}$ olar. C_1 və C_2 ixtiyari sabitlərdir. $y'(x)=2C_1e^{2x}+$ $+4C_2e^{4x}$. Başlanğıc şərtləri verilmiş tənliklərdə yerinə qoyaraq alırıq:

$$C_1e^{0\cdot x}+C_2e^{0\cdot x}=1;\ C_1+C_2=1.$$
$$2C_1e^{0\cdot x}+4C_2e^{0\cdot x}=2;\ 2C_1+4C_2=1$$
$$\begin{cases} C_1+C_2=1 \\ C_1+2C_2=1 \end{cases}$$

Bu tənliklər sistemini həll edərək alırıq: $C_1=1;\ C_2=0$. Verilmiş tənliyin başlanğıc şərti ödəyən xüsusi həlli belə olur: $y=e^{2x}$.

<u>Misal№9</u>. $y''-4y'+13y=0; y(\pi)=0;\ y'(\pi)=1$ şərtini ödəyən xüsusi həllini tapın.

<u>Həlli</u>. Bircins $y''-4y'+13y=0$ tənliyini həll edək.Tənliyin xarakteristik tənliyi belədir: $k^2-4k+13=0;\ k=2\pm 3i$ olduğundan tənliyin ümumi həlli $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$ düsturuna əsasən tapılır. $\alpha=2,\beta=3$ olduğundan

$$y=C_1e^{2x}\cos 3x+C_2e^{2x}\sin 3x.$$
$$y'(x)=2C_1e^{2x}\cos 3x-3C_1e^{2x}\sin 3x+$$
$$+2C_2e^{2x}\sin 3x+3C_2e^{2x}\cos 3x.$$

C_1 və C_2 əmsallarını təyin etmək üçün başlanğıc şərtlərdən istifadə edirik.

$$\begin{cases} C_1e^{2\pi}=0 \\ -2C_1e^{2\pi}-3C_2e^{2\pi}=1. \end{cases}$$

Sistemi həll edərək alırıq: $C_1=0;\ C_2=-\frac{1}{3}e^{-2\pi}$.

Tənliyin xüsusi həlli belə olur:

$$y=-\frac{1}{3}e^{-2\pi}e^{2x}\sin 3x=-\frac{1}{3}e^{2(x-\pi)}\sin 3x.$$

§14. İki tərtibli sabit əmsallı xətti qeyri bircins diferensial tənliklər.

$$y''+py'+qy=f(x) \qquad (1)$$

p və q həqiqi ədədlər, $f(x)$ kəsilməz funksiya olduqda (1) tənliyinə iki tərtibli sabit əmsallı qeyri-bircins diferensial tənlik deyilir.

İki tərtibli sabıt əmsallı qeyri bircins xətti tənliklərinin həlli iki həllin cəmindən ibarətdir: $y = y_0 + \bar{y}$.

y_0 həlli $y'' + py' + qy = 0$ bircins tənliyinin həllidir. $\bar{y}$ xüsusi həllinin axtarılması zamanı qeyri-müəyyən əmsallar üsulundan istifadə olunur. Qeyri-müəyyən əmsallar üsulu o zaman tətbiq olunur kı, (1) tənliyinin sağ tərəfi, yəni $f(x)$ funksiyası ya üstlü funksiya, ya çoxhədli, ya da triqonometrik(sinus və ya kosinus)funksiya olsun. $\bar{y}$ xüsusi həllini taparkən aşağıdakı teoremlərdən istifadə edirlər.

Teorem 1. Əgər tənliyin sağ tərəfi n dərəcəli çoxhədlidirsə və 0 ədədi xarakteristik tənliyin kökü deyilsə, onda $\bar{y}$ xüsusi həllini eyni dərəcəli çoxhədli şəklində axtarmaq lazımdır. Əgər xarakteristik tənliyin köklərindən biri sıfra bərabər olarsa, onda $\bar{y}$ xüsusi həllini eyni dərəcəli çoxhədlinin x -ə hasili şəklində axtarmaq lazımdır.

Teorem 2. Əgər tənliyin sağ tərəfi $f(x) = ae^{mx}$ şəklindədirsə və m ədədi xarakteristik tənliyin kökü deyilsə, onda $\bar{y} = Ae^{mx}$. Əgər m ədədi xarakteristik tənliyin köklərindən biri ilə üst-üstə düşərsə, onda $\bar{y} = Axe^{mx}$. Əgər m ədədi xarakteristik tənliyin hər iki kökü ilə üst-üstə duşərsə, $\bar{y} = Ax^2e^{mx}$.

Teorem 3. Əgər tənliyin sağ tərəfi $f(x) = e^{mx}(a\cos nx + b\sin nx)$ şəklindədirsə və $m \pm ni$ ədədi xarakteristik tənliyin kökü deyilsə, onda $\bar{y} = e^{mx}(A\,cos\,nx + Bsin\,nx)$.

Əgər $m \pm ni$ ədədi xarakteristik tənliyin kökүdürsə, onda

$$\bar{y} = xe^{mx}(A\cos nx + Bsin\,nx)\ .$$

Teorem 4. Əgər xətti qeyri-bircins diferensial tənliyin sağ tərəfi $f(x) = e^{mx}[P_1(x)\cos nx + P_2\sin nx], P_1(x)$ və $P_2(x)$ çoxhədlidirlər, $m \pm ni$ xarakteristik tənliyin kökü deyilsə,

$$\bar{y} = e^{mx}[Q_1(x)\cos nx + Q_2(x)\sin nx];\ Q_1(x) \text{ və } Q_2(x)$$

çoxhədlidir, dərəcələri $P_1(x)$ və $P_2(x)$ çoxhədlilərinin böyük dərəcələri ilə eynidir. Əgər $m \pm ni$ ədədi xarakteristik tənliyin kökүdürsə

$$\bar{y} = xe^{mx}[Q_1(x)\cos nx + Q_2(x)\sin nx].$$

Teorem 5. Əgər xətti qeyri-bircins diferensial tənliyin sağ tərəfi iki funksiyanın cəmi şəklində verilmişdirsə, yəni $y'' + py' +$

$+qy = f_1(x) + f_2(x)$ olarsa, onda $\overline{y_1}$ - $y'' + py' + qy = f_1(x)$ tənliyinin xüsusi həllidirsə və $\overline{y_2}$ - $y'' + py' + qy = f_2(x)$ tənliyinin xüsusi həllidirsə, onda $\bar{y} = \overline{y_1} + \overline{y_2}$ verilmiş tənliyin xüsusi həllidir.

Misal№1. $y'' + y' - 2y = 6x^2$ tənliyini həll edin.

Həlli. Əvvəlcə bircins diferensial tənliyin həllini tapaq.

$$y'' + y' - 2y = 0. k^2 + k - 2 = 0;\ k_1 = -2, k_2 = 1.$$

$$y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e.^x$$

Qeyri-bircins diferensial tənliyə uyğun xüsusi həlli tapaq.

$\bar{y} = Ax^2 + Bx + C, \bar{y}' = 2Ax + B, y'' = 2A. y, y', y''$-in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yerinə yazaq:

$$2A + 2Ax + B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C = 6x^2$$

$$\begin{cases} -2A = 6 \\ 2A - 2B = 0 \\ 2A + B - 2C = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -3 \\ B = -3 \\ C = -4{,}5 \end{cases} \Rightarrow \bar{y} = -3x^2 - 3x - 4{,}5$$

$y = y_0 + \bar{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - 3x^2 - 3x - 4{,}5.$

Misal №2. $y'' + 4y' + 5y = 5x^2 - 32x + 5$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

Həlli. Əvvəlcə bircins diferensial tənliyin həllini tapaq.

$y'' + 4y' + 5y = 0; k^2 + 4k + 5 = 0;\ k = -2 \pm i$ olduğundan tənliyin ümumi həlli $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$ düsturuna əsasən tapılır. $\alpha = -2, \beta = 1$ olduğundan

$$y_0 = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Qeyri-bircins diferensial tənliyə uyğun xüsusi həlli tapaq.

$\bar{y} = Ax^2 + Bx + C, \bar{y}' = 2Ax + B, y'' = 2A. y, y', y''$-in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yerinə yazaq:

$$2A + 8Ax + 4B + 5Ax^2 + 5Bx + 5C = 5x^2 - 32x + 5;$$

$$5Ax^2 + (8A + 5B)x + (2A + 4B + 5C) = 5x^2 - 32x + 5.$$

Qeyri-müəyyən əmsallar üsulundan istifadə edək:

$$\begin{cases} 5A = 5 \\ 8A + 5B = -32 \\ 2A + 4B + 5C = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ 8 + 5B = -32 \\ 2 + 4B + 5C = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -8 \\ C = 7. \end{cases}$$

Onda qeyri-bircins diferensial tənliyə uyğun xüsusi həll belə olur:

$$\bar{y} = x^2 - 8x + 7.$$

Verilmiş tənliyin ümumi həlli $y = y_0 + \bar{y}$ olduğundan

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x^2 - 8x + 7.$$

Misal №3. $\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + 2s = 2t^3 - 2$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

Həlli. Əvvəlcə $\frac{d^2s}{dt^2} + 2\frac{ds}{dt} + 2s = 0$ bircins tənliyinin həllini tapaq. Xarakteristik tənliyi tərtib edək:

$$k^2 + 2k + 2 = 0 \Rightarrow k = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i.$$

Onda $s_0 = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$. Qeyri-bircins tənliyin sağ tərəfi üç tərtibli polinom olduğu üçün və 0 ədədi xarakteristik tənliyin kökü ilə üst-üstə düşmədiyi üçün $\bar{s}$ xüsusi həlli üç tərtibli polinom şəklində axtarılır:

$$\bar{s} = At^3 + Bt^2 + Ct + D \qquad (*)$$

$\bar{s}$-in birinci və ikinci tərtib törəmələrini tapaq:

$$\bar{s}' = 3At^2 + 2Bt + C; \ \bar{s}'' = 6At + 2B.$$

$\bar{s}, \bar{s}'$ və $\bar{s}''$-in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yazaq:

$$6At + 2B + 6At^2 + 4Bt + 2C + 2At^3 + 2Bt^2 + 2Ct + 2D = \\ = 2t^3 - 2.$$

Bərabərliyin t^3, t^2, t əmsallarını və sabitləri qruplaşdıraq:

$$2At^3 + (6A + 2B)t^2 + (6A + 4B + 2C)t + (2B + 2C + 2D) = \\ = 2t^3 - 2.$$

Qeyri-müəyyən əmsallar üsulundan istifadə edək:

$$\begin{cases} 2A = 2 \\ 6A + 2B = 0 \\ 6A + 4B + 2C = 0 \\ 2B + 2C + 2D = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ 6 + 2B = 0 \\ 6 + 4B + 2C = 0 \\ B + C + D = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -3 \\ C = 3 \\ D = -1. \end{cases}$$

Onda qeyri-bircins diferensial tənliyə uyğun xüsusi həll belə olur:

$$\bar{s} = t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = (t-1)^3.$$

Verilmiş tənliyin ümumi həlli $s = s_0 + \bar{s}$ olduğundan

$$s = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + (t-1)^3.$$

Misal №4. $4y'' - y = x^3 - 24x$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

Həlli. Əvvəlcə bircins diferensial tənliyin həllini tapaq.

$4y'' - y = 0$. Xarakteristik tənliyi tərtib edək:

$$4k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow k_1 = -\frac{1}{2}, k_2 = \frac{1}{2}. \quad k_1 \neq k_2$$

olduğu üçün (4) düsturuna əsasən alırıq: $y = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 e^{\frac{x}{2}}$.

Qeyri-bircins tənliyin sağ tərəfi üç tərtibli polinom olduğu üçün və 0 ədədi xarakteristik tənliyin kökü ilə üst-üstə düşmədiyi üçün $\bar{y}$ xüsusi həlli üç tərtibli polinom şəklində axtarılır:

$$\bar{y} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \qquad (*)$$

y-in birinci və ikinci tərtib törəmələrini tapaq:

$$\bar{y}' = 3Ax^2 + 2Bx + C; \ \bar{y}'' = 6Ax + 2B.$$

$\bar{y}, \bar{y}'$ və y''-in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yazaq:

$$4(6Ax + 2B) - (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = x^3 - 24x$$

Bərabərliyin x^3, x^2, x əmsallarını və sabitləri qruplaşdıraq:

$$-Ax^3 - Bx^2 + (24A - C)x + (8B - D) = x^3 - 24x.$$

Qeyri-müəyyən əmsallar üsulundan istifadə edək:

$$\begin{cases} -A = 1 \\ B = 0 \\ 24A - C = -24 \\ 8B - D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \\ C = 0 \\ D = 0 \end{cases}$$

Onda qeyri-bircins diferensial tənliyə uyğun xüsusi həll belə olur: $\bar{y} = -x^3$.

Verilmiş tənliyin ümumi həlli $y = y_0 + y$ olduğundan

$$y = C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 e^{\frac{x}{2}} - x^3.$$

<u>Misal №5</u>. $y'' - 6y' + 5y = 8\cos x + 38\sin x$.

Həlli. Əvvəlcə bircins diferensial tənliyin həllini tapaq.

$y'' - 6y' + 5y = 0$. Xarakteristik $k^2 - 6k + 5 = 0$ tənliyinin kökləri $k_1 = 5$ və $k_2 = 1$.

$$y_0 = C_1 e^{5x} + C_2 e.^x$$

Teorem 3-ü tətbiq edək. $m = 0$ və $n = 1$, onda

$$\bar{y} = A\cos x + B\sin x.$$

Axırıncı bərabərliyi iki dəfə diferensiallayaraq alırıq:

$$\overline{y'} = -A\sin x + B\cos x, \quad \overline{y''} = -A\cos x - B\sin x.$$

$\bar{y}, \overline{y'}$ və $\overline{y''}$ $-$in qiymətlərini tənliyin sol tərəfində yerinə yazaraq A və B əmsallarını tapırıq:

$-A\cos x - B\sin x + 6A\sin x -$
$-6B\cos x + 5A\cos x + 5B\sin x = 8\cos x + 38\sin x$.

Eyni funksiyalardakı əmsalları bərabərləşdirərək alırıq:

$$\begin{cases} 4A - 6B = 8 \\ 6A + 4B = 38 \end{cases}$$

$$A = 5, B = 2$$

$$\bar{y} = 5\cos x + 2\sin x$$

Onda tənliyin ümumi həlli:

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{x} + 5\cos x + 2\sin x.$$

Misal №6. $y'' + 4y = 4\cos 2x - 12\sin 2x$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

Həlli. $y'' + 4y = 0$ bircins tənliyinin həllini tapaq. Xarakteristik tənlik:

$k^2 + 4 = 0$; $k_1 = 2i, k_2 = -2i. y_0 = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x. \bar{y}$ xüsusi həllini müəyyən etmək üçün teorem 3-dən istifadə edək. Tənliyin sağ tərəfində $m = 0; n = 2$ və $\pm 2i$ xarakteristik tənliyin kökü ilə üst-üstə düşür. Onda

$$\bar{y} = x(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Bu bərabərliyi iki dəfə diferensiallayaraq alırıq:

$$\bar{y}'' = (4A - 4Ax)\cos 2x + (-4A - 4Bx)\sin 2x.$$

$\bar{y}$ və $\bar{y}''$-in qiymətlərini tənliyin sol tərəfində yazaraq alırıq:

$4B\cos 2x - 4A\sin 2x = 4\cos 2x - 12\sin 2x.$ Qeyri-müəyyən əmsallar üsulundan istifadə edək.

$$\begin{cases} 4B = 4 \\ -4A = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 1 \\ A = 3. \end{cases}$$

Beləliklə xüsusi həll: $\bar{y} = x(3\cos 2x + \sin 2x)$. Axtarılan ümumi həll belə olar:

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + x(3\cos 2x + \sin 2x).$$

Misal№7. $y'' - 4y' + 13y = 40 \cdot \cos 3x$ qeyri-bircins tənliyini həll edin.

Həlli. Qeyri-bircins tənliyin ümumi həlli $y = y_0 + \bar{y}$ şəklindədir. y_0 bircins tənliyinin həllini tapaq. $y'' - 4y' + 13y = 0$ bircins tənliyinin xarakteristik tənliyi belə olur:

$$k^2 - 4k + 13 = 0 \Rightarrow k_1 = 2 + 3i;\ k_2 = 2 - 3i.$$

Onda

$$y_0 = e^{2x} \cdot (C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \cdot \sin 3x).$$

$\alpha = 0, \beta = 3$; $\alpha + \beta i = 3i$ xarakteristik tənliyin kökü ilə üst-üstə düşmür. Onda xüsusi həlli belə şəkildə axtarırıq:

$\bar{y} = A\cos 3x + B\sin 3x$. $\bar{y}'$ və $\bar{y}''$-in qiymətlərini tapaq.

$$\bar{y}' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x;\ \bar{y}'' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x.$$

$\bar{y}, \bar{y}'$ və $\bar{y}''$-in qitmətlərini verilmiş tənlikdə yazaraq alırıq:

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x - 4(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) +$$
$$+13(A\cos 3x + B\sin 3x) = 40\cos 3x;$$

və ya

$$(-9A - 12B + 13A)\cos 3x +$$
$$+(-9B + 12A + 13B)\sin 3x = 40\cos 3x$$

Buradan alırıq:

$$\begin{cases} 4A - 12B = 40 \\ 12A + 4B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -3 \end{cases}$$

Ona görə də $\bar{y} = \cos 3x - 3\sin 3x$. Və nəhayət,

$$y = e^{2x} \cdot (C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \cdot \sin 3x) + \cos 3x - 3\sin 3x,$$

verilmiş tənliyin ümumi həllidir.

Misal№8. $y'' - 7y' + 10y = 4e^{3x}$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

Həlli. $y'' - 7y' + 10y = 0$ tənliyini həll edək. Xarakteristik tənlik belə olur:$k^2 - 7k + 10 = 0$, $k_1 = 2$ və $k_2 = 5$.

Bircins tənliyin həlli belə olur:

$$y_0 = C_1e^{2x} + C_2e^{5x}$$

Tənliyin sağ tərəfində üstlü funksiya var, $m = 3$ və xarakteristik tənliyin heç bir kökü ilə üst-üstə düşmür. Onda $\bar{y}$ xüsusi həllini $\bar{y} = Ae^{3x}$ şəklində axtarırıq. Diferensiallayaraq alırıq:

$$\bar{y}' = 3Ae^{3x}, \bar{y}'' = 9Ae^{3x}$$

$\bar{y}$,$\bar{y}'$, $\bar{y}''$-in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yerinə qoyaraq alırıq:

$9Ae^{3x} - 21Ae^{3x} + 10Ae^{3x} = 4e^{3x}; -2A = 4, ; A = -2$

Həqiqətən də, $\bar{y} = -2e^{3x}$ və $y = C_1e^{2x} + C_2e^{5x} - 2e^{3x}$ - verilmiş tənliyin ümumi həllidir.

Misal №9. $y'' - 2y' + y = 8e^{x}$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

Həlli. $y'' - 2y' + y = 0$ bircins tənliyinin ümumi həllini tapaq. Xarakteristik tənlik belə olur:

$$k^2 - 2k + 1 = 0;\ k_1 = k_2 = 1.\ \ y_0 = C_1e^{x} + C_2xe^{x}.$$

Tənliyin sağ tərəfindəki ifadədə $m = 1$ və xarakteristik tənliyin hər iki kökü ilə üst-üstə düşür. Onda $\bar{y} = Ax^2e^{x}$ olur. Axırıncı bərabərliyi iki dəfə diferensiallayaraq alırıq:

$$\bar{y}' = (2Ax + Ax^2)e^x; \ \bar{y}'' = (4Ax + Ax^2 + 2A)e^x.$$

$\bar{y}$,$\bar{y}'$, $\bar{y}''$-in qiymətlərini verilmiş tənlikdə yerinə yazaq:

$$(4Ax + Ax^2 + 2A)e^x - 2(2Ax + Ax^2)e^x + Ax^2e^x = 8e^x.$$

Sadələşdirərək və eyni fuksiyalardakı əmsalları bərabərləşdirərək alırıq: $A = 4$. Onda $\bar{y} = 4x^2e^x$. Ümumi həll belə olur:

$$y = e^x(C_1 + C_2x + 4x^2).$$

<u>Misal №10</u>. $y'' - y' - 6y = (2x - 1)e^{3x}$ sabit əmsalli xətti qeyri-bircins tənliyinin ümumi həllini tapın.

<u>Həlli</u>. $y'' - y' - 6y = 0;\ k^2 - k - 6 = 0;\ k_1 = -2;\ k_2 = 3.$

Bircins diferensial tənliyin ümumi həlli belə olur:

$$y_0(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x}.$$

Xətti qeyri-bircins diferensial tənliyin xüsusi həllini $\bar{y}(x) = x(Ax + B)e^{3x} = (Ax^2 + Bx)\cdot e^{3x}$ şəklində axtaraq.

$$\bar{y}'(x) = (2Ax + B)e^{3x} + (Ax^2 + Bx)\cdot 3e^{3x}.$$

$$\bar{y}''(x) = 2Ae^{3x} + (2Ax + B)\cdot 3e^{3x} + (2Ax + B)\cdot 3e^{3x} + \\ +(Ax^2 + Bx)\cdot 9e^{3x}.$$

Verilmiş tənliyə $\bar{y}(x), \bar{y}'(x), \bar{y}''(x)$ -in qiymətlərini yazaraq və $e^{3x} \neq 0$ vuruğuna ixtisar edərək alırıq:

$$2A - 6\cdot(2Ax + B) + 9(Ax^2 + Bx) - (2Ax + B) - \\ -3(Ax^2 + Bx) - 6(Ax^2 + Bx) = 2x - 1.$$

Sadələşdirdikdən sonra alırıq: $10Ax + 2A + 5B = 2x - 1$.

Qeyri-müəyyən əmsallar üsulundan istifadə edərək A və B -nı tapaq:

$$\begin{cases} 10A = 2 \\ 2A + 5B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{5} \\ B = -\dfrac{7}{25}. \end{cases}$$

Belləliklə sabit əmsallı qeyri-bircins tənliyin ümumi həlli belə olur:

$$y(x) = y_0(x) + \bar{y}(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{3x} + \left(\frac{1}{5}x^2 - \frac{7}{25}x\right)\cdot e^{3x}.$$

<u>Misal № 11</u>. $y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} + 2x^2$ tənliyini həll edin.

Həlli. Bu misalın həllində teorem 5-dən istifadə edəcəyik. Verilmiş tənliyin sağ tərəfi iki funksiyanın cəmindən ibarətdir: $f_1(x) = 3e^{2x}$ və $f_2(x) = 2x^2$. Əvvəlcə $y'' - 3y' + 2y = 0$ bircins tənliyini həll edək. $k^2 - 3k + 2 = 0$ xarakteristik tənliyinin kökləri: $k_1 = 2, k_2 = 1$.
$y_0 = C_1e^{2x} + C_2e^x$. İndi

$$y'' - 3y' + 2y = 3e^{2x} \qquad (*)$$

tənliyinin xüsusi həllinin tapaq. Teorem 2-yə görə $m = 2$ ədədi xarakteristik tənliyin köklərindən biri ilə üst-üstə düşdüyündən $\overline{y_1} = Axe^{2x}$. Bu bərabərliyi iki dəfə diferensiallayaraq $\overline{y_1'}$ və $\overline{y_1''}$-i tapırıq: $\overline{y_1'} = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$;

$$\overline{y_1''} = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}.$$

$\overline{y_1}, \overline{y_1'}, \overline{y_1''}$-in qiymətlərini $(*)$ tənliyinin sol tərəfinə qoyaraq və e^{2x}-ə ixtisar edərək alırıq: $A = 3$. Onda $\overline{y_1} = 3xe^{2x}$ $(*)$ tənliyinin xüsusi həllidir. İndi

$$y'' - 3y' + 2y = 2x^2 \qquad (**)$$

tənliyinin xüsusi həllini tapaq. Teorem 1-ə əsasən 0 ədədi xarakteristik tənliyin kökü ilə üst-üstə düşmədiyindən
$\overline{y_2} = Ax^2 + Bx + C$. Bu bərabərliyi iki dəfə diferensiallayaraq alırıq: $\overline{y_2'} = 2Ax + B$; $\overline{y_2''} = 2A$. $\overline{y_2}, \overline{y_2'}, \overline{y_2''}$ -in qiymətlərini $(**)$ tənliyinə qoyaq.

$$2A - 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2.$$

$$2A - 6Ax - 3B + 2Ax^2 + 2Bx + 2C = 2x^2$$

$$2Ax^2 + (-6A + 2B)x + (2A - 3B + 2C) = 2x^2.$$

Qeyri-müəyyən əmsallar üsulundan istifadə edək:

$$\begin{cases} 2A = 2 \\ -6A + 2B = 0 \\ 2A - 3B + 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ -3A + B = 0 \\ 2A - 3B + 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 3 \\ C = 3{,}5. \end{cases}$$

Onda $(**)$ tənliyinin xüsusi həlli belə olur: $\overline{y_2} = x^2 + 3x + 3{,}5$.
Teorem 5-ə əsasən veilmiş tənliyin ümumi həlli:

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^x + 3xe^{2x} + x^2 + 3x + 3{,}5.$$

§15. Yüksək tərtibli sabit əmsallı xətti bircins diferensial tənliklər

İxtiyari tərtibli sabit əmsallı xətti bircins diferensial tənliklər ikitərtibli tənliklərə analoji olaraq həll edilir.

Tutaq ki, aşağıdakı tənliyin ümumi həllini tapmaq tələb olunur:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_{(n-1)} y' + p_0 y = 0 \quad (1)$$

burada $p_1, p_2, \dots, p_n$- sabit ədədlərdir. (1) tənliyi n tərtibli sabit əmsallı xətti bircins diferensial tənlik adlanır. (1) tənliyini həll etmək üçün onun xarakteristik tənliyini tərtib edək:

$$k^n + p_1 k^{n-1} + p_2 k^{n-2} + \cdots + p_{n-1} k + p_n = 0 (2)$$

Əgər (2) xarakteristik tənliyinin bütün kökləri həqiqi və müxtəlifdirsə,onda (1) tənliyinin ümumi həlli aşağıdakı düsturdan tapılır:

$$y_{birc.} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + C_3 e^{k_3 x} + \cdots$$
$$\dots + C_{n-1} e^{k_{(n-1)} x} + C_n e^{k_n x} \quad (3)$$

burada $k_1, k_2, k_3 \dots, k_n$ (2) tənliyinin kökləridir.

Əgər (2) xarakteristik tənliyinin kökləri içərisində qoşma kompleks köklər varsa, onda (3) tənliyindəki iki həddin əvəzinə

$$e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \quad (4)$$

ifadəsi yazılır.

Misal №1. $y''' - 2y'' - 3y' = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli. Xarakteristik tənliyi tərtib edək:

$k^3 - 2k^2 - 3k = 0 \Rightarrow k(k^2 - 2k - 3) = 0; k_1 = 0;\ k_2 = -1;\ k_3 = 3$ olduğundan diferensial tənliyin ümumi həlli belə olur:

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}$$

Misal № 2. $y''' - 4y'' + 4y' = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli. Xarakteristik tənliyi tərtib edək:

$$k^3 - 4k^2 + 4k = 0 \Rightarrow k(k^2 - 4k + 4) = 0;$$
$$k_1 = k_2 = 2;\ k_3 = 0.$$

Həqiqi köklərin içərisində bərabər köklər: $k_1 = k_2 = 2$ olduğu üçün ümumi həll belə olar:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3.$$

Misal № 3. $y''' + 4y'' + 13y' = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli. Xarakteristik tənliyi tərtib edək:

$$k^3 + 4k^2 + 13k = 0 \Rightarrow k(k^2 + 4k + 13) = 0;$$

$$k_{1,2} = -2 \pm 3i; \; k_3 = 0.$$

Xarakteristik tənliyin qoşma kompleks kökləri olduğu üçün (3) düsturunda ilk iki həddi (4) ifadəsi ilə əvəz edirik:

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + C_3.$$

Misal № 4. $y''' - 8y = 0$ tənliyini həll edin.

Həlli. Xarakteristik tənliyi tərtib edək və köklərini tapaq:

$$k^3 - 8 = 0 \Rightarrow (k-2)(k^2 + 2k + 4) = 0; k_1 = 2; \; k_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}i.$$

Xarakteristik tənliyin qoşma kompleks kökləri olduğundan, ümumi həll belə olur:

$$y = C_1 e^{2x} + e^{-x}\left(C_2 \cos \sqrt{3}x + C_3 \sin \sqrt{3}x\right).$$

Misal№5. $y^V + 18y''' + 81y' = 0$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

Həlli. Xarakteristik tənliyi tərtib edək: $k^5 + 18k^3 + 81k = 0.$

Bərabərliyin sol tərəfini vuruqlarına ayıraq və köklərini tapaq:

$$k(k^4 + 18k^2 + 81) = 0 \Rightarrow k(k^2 + 9)^2 = 0.$$

Tənliyin kökləri aşağıdakılardır:

$$k_1 = 0, k_{2,3} = \pm 3i, k_{4,5} = \pm 3i$$

belə ki, xəyali köklər iki dəfə təkrarlandığından ümumi həll belə olur:

$$y = C_1 + (C_2 + C_3 x) \cos 3x + (C_4 + C_5 x) \sin 3x.$$

Misal№ 6. $y^{IV} - 16y = 0$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

Həlli. Xarakteristik tənliyi tərtib edək:

$$k^4 - 16 = 0 \Rightarrow (k^2 - 4)(k^2 + 4) = 0;$$

$$k_1 = -2, k_2 = 2; k^2 + 4 = 0; \; k_{3,4} = \pm 2i$$

Onda verilmiş tənliyin ümumi həlli belə olar:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x.$$

Misal №7. $y''' + 3ay'' + 3a^2 y' + a^3 y = 0$ tənliyinin ümumi həllini tapın.

Həlli. Xarakteristik tənliyi tərtib edək:

$$k^3 + 3ak^2 + 3a^2 k + a^3 = 0 \Rightarrow (k + a)^3 = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = -a.$$

Xarakteristik tənliyin kökləri üç dəfə təkrarlandığından verilmiş tənliyin ümumi həlli belə olar:

$$y = C_1 e^{-ax} + C_2 x e^{-ax} + C_3 x^2 e^{-ax}.$$

§16. Sabit əmsallı xətti diferensial tənliklər sistemi.

Bir tərtibli sabit əmsallı iki xətti diferensial tənliklər sisteminə baxaq:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + \varphi_1(t) \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + \varphi_2(t) \end{cases} \tag{1}$$

burada t -arqument; $\varphi_1(t)$ və $\varphi_2(t)$ -verilmiş funksiyalar; $x(t)$, $y(t)$ isə (1) sistemini ödəyən axtarılan funksiyalardır.

(1) sistemi sabit əmsallı iki tərtibli bir xətti diferensial tənliyə gətirilə bilər.

Sistemin birinci tənliyinin hər iki tərəfini t arqumentinə görə diferensiallayaq.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_1\frac{dx}{dt} + b_1\frac{dy}{dt} + \varphi_1'(t) \tag{2}$$

Alınmış tənlikdə $\frac{dy}{dt}$-ni sistemin ikinci tənliyinin sağ tərəfi ilə əvəz edək. Nəticədə alırıq:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_1\frac{dx}{dt} + b_1[a_2x + b_2y + \varphi_2(t)] + \varphi_1'(t) \tag{3}$$

(1) sisteminin birinci tənliyindən y-i tapaq:

$$y = \frac{1}{b_1}\left[\frac{dx}{dt} - a_1x - \varphi_1(t)\right] \tag{4}$$

(3) tənliyində y-i (4) –ün sağ tərəfi ilə əvəz etsək, sabit əmsallı iki tərtibli xətti diferensial tənlik alırıq:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p\frac{dx}{dt} + qx = f(t) \tag{5}$$

burada p və q -sabit ədəddir.

(5)-i həll edərək $x = x(t, C_1, C_2)$ ümumi həllini, sonra isə (4)-dən $y = y(t, C_1, C_2)$ ümumi həllini alırıq.

<u>Misal №1</u>. Tənliklər sistemini həll edin:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -8x + 3y + 5\bar{e}^t \\ \frac{dy}{dt} = -18x + 7y + 12\bar{e}^t \end{cases}$$

$x(0) = 0, y(0) = -3$ şərtlərini ödəyən həllini tapmalı.

<u>Həlli</u>. Birinci tənliyin hər iki tərəfini t dəyişəninə nəzərən diferensiallayaq.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -8\frac{dx}{dt} + 3\ \frac{dy}{dt} - 5\bar{e}^t \qquad \text{(a)}$$

Alınmış tənlikdə $\frac{dy}{dt}$-ni sistemin ikinci tənliyi ilə əvəz edək:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -8\frac{dx}{dt} + 3(-18x + 7y + 12e^{-t}) - 5\bar{e}^t$$

və ya

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -8\frac{dx}{dt} - 54x + 21y + 31\bar{e}^t \qquad \text{(b)}$$

Sistemin birinci tənliyindən y-i tapaq:

$$y = \frac{1}{3}\left(\frac{dx}{dt} + 8x - 5\bar{e}^t\right) \qquad \text{(c)}$$

(b) –yə y-in əvəzinə (c)-nin sağ tərəfini qoyaq:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = -4\bar{e}^t \qquad \text{(d)}$$

əvvəlcə $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x = 0$ bircins tənliyini həll edək.

$k^2 + k - 2 = 0$ xarakteristik tənliyinin kökləri $k_1 = -2$ və $k_2 = 1$ olduğundan $x_{birc} = C_1\bar{e}^{2t} + C_2e^t$.

Tutaq ki, $\bar{x} = Ae^t$; onda $\bar{x}' = -A\bar{e}^t$ və $\overline{x''} = A\bar{e}^t$

Bu qiymətləri (d)-yə qoyaraq $A = 2$ alırıq.

Deməli, $\bar{x} = 2\bar{e}^t$

Onda $x = x_{birc} + \bar{x} = C_1\bar{e}^{2t} + C_2e^t + 2\bar{e}^t$ (e)

y-i (c)-dən tapmaq üçün $\frac{dx}{dt}$-ni əvvəlcə (e) –dən tapaq.

$$\frac{dx}{dt} = -2C_1\bar{e}^{2t} + C_2e^t - 2\bar{e}^t \qquad \text{(f)}$$

(e) və f-i (c)-nin sağ tərəfinə qoyaraq alırıq:

$$y = 2C_1\bar{e}^{2t} + 3C_1e^t + 3\bar{e}^t \qquad \text{(g)}$$

Başlanğıc şərtlərdən istifadə edərək C_1 və C_2 sabitlərinin qiymətlərini müəyyən edək.

$x(0) = 0$ olduğundan (e) –dən alırıq: $0 = C_1 + C_2 + 2$.

$y(0) = -3$ olduğundan (g)-dən alırıq:

$$-3 = 2C_1 + 3C_2 + 3$$

Alınmış sistemdən

$C_1 = 0$ və $C_2 = -2$ alınır.

Həqiqətən də

$$x = -2e^t + 2\bar{e}^t \text{ və } y = -6e^t + 3\bar{e}^t$$

həlli sistemin başlanğıc şərtini ödəyən həllidir.

Misal №2. Sistemin ümumi həllini tapın:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = -x + y + z\\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + z\\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + z\end{cases}$$

Həlli. Verilmiş sistemin həllini üç tərtibli bir xətti diferensial tənliyin həlli şəklinə salmaq olar.

Sistemin birinci tənliyinin hər iki tərəfin t arqumentinə görə diferensiallayaq:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}$$

Alınmış tənlikdə $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ və $\frac{dz}{dt}$-ni verilmiş sistemin uyğun sağ tərəfləri ilə əvəz edək.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -(-x + y + z) + (x - y + z) + (x + y + z)$$

və ya

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 3x - y + z \qquad (*)$$

Alınmış tənliyi yenə t arqumentinə görə diferensiallayaq:

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 3\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}$$

$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ törəmələrini verilmiş sistemin ifadələri ilə əvəz edək.

$$\frac{d^3x}{dt^3} = 3(-x + y + z) - (x - y + z) + (x + y + z)$$

və ya

$$\frac{d^3x}{dt^3} = -3x + 5y + 3z \qquad (**)$$

(*) və (**) tənliklər sistemini birgə həll edərək y və z-i x funksiyası ilə ifadə edək.

(*) -dan alırıq:

$$y - z = 3x - \frac{d^2x}{dt^2}$$

(**) - dan alırıq:

$$5y + 3z = \frac{d^3x}{dt^3} + 3x$$

Bu iki tənliyi birgə həll edərək alırıq:

$$y = \frac{1}{8}\left(\frac{d^3x}{dt^3} - 3\frac{d^2x}{dt^2} + 12x\right)$$
$$z = \frac{1}{8}\left(\frac{d^3x}{dt^3} + 5\frac{d^2x}{dt^2} - 12x\right) \qquad (***)$$

y və z üçün alınmış qiymətləri verilmiş sistemin birinci tənliyinə qoyaq:

$$\frac{dx}{dt} = -x + \frac{1}{8}\left(\frac{d^3x}{dt^3} - 3\frac{d^2x}{dt^2} + 12x\right) + \frac{1}{8}\left(\frac{d^3x}{dt^3} + 5\frac{d^2x}{dt^2} - 12x\right)$$

Oxşar hədləri islah etdikdən sonra $x(t)$ funksiyasına nəzərən üç tərtibli diferensial tənlik alırıq.

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} - 4x = 0$$

$k^3 + k^2 - 4k - 4 = 0$ xarakteristik tənliyinin kökləri:
$k_1 = -1$, $k_2 = -2$, $k_3 = 2$ olur.
Həqiqətən də, $x = C_1\bar{e}^{t} + C_2\bar{e}^{2t} + C_3e^{2t}$.
y və z-i tapmaq üçün $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^3x}{dt^3}$-ü tapaq.

$$\frac{dx}{dt} = -C_1e^{-t} - 2C_2e^{-2t} + 2C_3e^{2t}$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = C_1e^{-t} + 4C_2e^{-2t} + 4C_3e^{2t}$$
$$\frac{d^3x}{dt^3} = -C_1e^{-t} - 8C_2e^{-2t} + 8C_3e^{2t}$$

$\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^3x}{dt^3}$ -nin qiymətlərini y və z üçün aldığımız $(***)$ tənliyində yerinə qoyaraq alırıq:

$$y = C_1e^{-t} - C_2e^{-2t} + C_3e^{2t};$$
$$z = -C_1e^{-t} + 2C_3e^{2t}.$$

FƏSİL II
SIRALAR
§1. Sıralar. Əsas anlayışlar. Sıraların yığılma əlamətləri

Əgər $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ ədədləri sonsuz ədədi ardicilliq əmələ gətirirsə onda toplananların sonsuz sayda cəminin simvolu , yəni

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots$$

və ya

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1}$$

ədədi sıra adlanır. $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ ədədləri sıranın hədləri, u_n isə ümumi həddi adlanır. Sıranın u_n ümumi həddi n-dən asılı funksiyadır. Əgər bu funksiyanın analitik ifadəsi verilmişdirsə, onda n-ə 1,2,3,... qiymətlərini verməklə sıranın ixtiyari sayda həddini almaq olar. (1) sırasının ilk n həddinin cəminə sıranın xüsusi cəmi deyilir və S_n ilə işarə olunur:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \tag{2}$$

S_n xüsusi cəmi dəyişən kəmiyyətdir və o, n natural ədədindən asılı funksiyadır. Xüsusi cəmin tərifindən alırıq:

$$S_1 = u_1$$
$$S_2 = u_1 + u_2$$
$$S_3 = u_1 + u_2 + u_3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

Əgər (1) sırasının sonsuz sayda xüsusi cəmlərinin ardıcıllığının:
S_1 ,S_2,S_3,...,S_n, S_{n+1}, ...ardıcıllığının sonlu limiti varsa , yəni

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \tag{3}$$

olarsa, bu sıra yığılır. Bu halda S ədədi (1) yığılan sırasının cəmi adlanır. Əgər S_n xüsusi cəminin $n \to \infty$ -da sonlu limiti yoxdursa, onda (1) sırası dağilan adlanır. Bu halda onun cəmi haqqında danışmağın mənası yoxdur. Əgər (1) sırası yığılırsa və onun cəmi S -ə bərabərdirsə, onda $S - S_n$ fərqi sıranın n -ci qalıq həddi adlanır və R_n ilə işarə olunur:

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots$$

Müsbət hədli sıraların yığılma əlamətləri

Sıranın yığılması üçün zəruri şərt.

Teorem. Əgər

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots \qquad (1)$$

sırası yığılırsa, onda $n \to \infty$ onun ümumi həddi u_n sıfra yaxınlaşır, yəni:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \qquad (2)$$

Isbatı .u_n ümumi həddini iki xüsusi cəmin fərqi şəklində göstərə bilərik:

$u_n = S_n - S_{n-1}$. Şərtə görə (1) sırası yığıldığından

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

S sıranın cəmidir. Digər tərəfdən $n \to \infty$ -da S_{n-1} -in cəmi S-ə bərabərdir. Həqiqətən,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

İsbat olunan teoremdən çıxır ki, $n \to \infty$ -da $u_n \to 0$ deməli, sıra yığılır.

Sıraların yığılması üçün kafi şərtlər.

<u>I müqayisə əlaməti.</u> Əgər

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots \qquad (A)$$

sırasının hər hansı həddən başlayaraq hər bir həddi başqa yığılan sıranın uyğun həddini keçmirsə

$$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + v_{n+1} + \cdots \qquad (B)$$

onda verilmiş (A) sırası da yığılır. Əgər (A) sırasının hər bir həddi hər hansı həddən başlayaraq dağılan (B) sırasının uyğun həddindən kiçik deyilsə, onda verilmiş (A) sırası da dağılır.

<u>II müqayisə əlaməti</u>. Əgər $n \to \infty$ (A) və (B) sıralarının ümumi hədlərinin nisbətinin limiti sıfırdan fərqlidirsə, yəni

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0$$

onda baxılan sıraların hər ikisi ya yığılır, ya da dağılır.

§2. Sıraların yığılması üçün Dalamber əlaməti

Teorem. Əgər müsbət hədli

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots (1)$$

sırasında $(n+1)$-ci həddin $n-$ci həddə nisbətinin $n \to \infty$-da sonlu l limiti varsa, yəni

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \qquad (2)$$

Onda $l < 1$ olduqda (1) sırası yığılır; $l > 1$ olduqda (1) sırası dağılır;$l = 1$ olduqda sual həll olunmaz qalır: sıra yığıla da bılər, dağila da bılər.

Isbatı.Tutaq ki, müsbət hədli

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots$$

sırası verilmişdir və

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

Onda $n \geq N$ üçün ε kifayət qədər kiçik ədəd olduqda

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| < \varepsilon$$

buradan

$$-\varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} - l < +\varepsilon$$

və ya

$$l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon, n \geq N \qquad (3)$$

Ayrılıqda üç hala baxaq.

1°. Tutaq ki, $l < 1$. Biz ε ədədini elə kiçik götürə bilərik ki, $l + \varepsilon$ 1-dən kiçik olar; onda $l + \varepsilon = q$ qəbul edərək alırıq:

$$0 < q < 1 \qquad (3)$$

bərabərsizliyinə əsasən alırıq:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < q \text{ və ya } u_{n+1} < u_n q$$

belə ki, bu axırıncı bərabərsizlik $n = N, N+1, N+2$ ...olduqda ödəniləcəkdir. n-ə bu qiymətləri verərək alırıq:

$$u_{n+1} < u_n q$$
$$u_{n+2} < u_{n+1} q < u_n q^2$$
$$u_{n+3} < u_{n+2} q < u_n q^3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Beləliklə

$$u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots \tag{4}$$

sırasının hədləri aşağıdakı həndəsi silsilənin uyğun hədlərindən kiçikdir:

$$u_n q + u_n q^2 + u_n q^3 + \cdots \tag{5}$$

(5) həndəsi silsiləsinin vuruğu 1-dən kiçik olduğundan (4) sırası yığılır. Onda müqayisə əlamətinə əsasən (1) sırası da yığılır.

2°. İndi tutaq ki, $l > 1$. Biz ε-nu elə kiçik götürə bilərik ki,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \quad \text{və ya } n = N, N+1, N+2, \dots$$

olduqda $u_{n+1} > u_n$. Buradan alırıq:

$$u_N < u_{N+1} < u_{N+2} < \cdots$$

Beləliklə (1) sırasının hədləri hər hansı N sayından başlayaraq onların sayı artdıqca artır. Həqiqətən də $n \to \infty$; u_n sıfra yaxınlaşmır. Ona görə də sıraların yığılması üçün kafi şərtə əsasən alırıq kı, (1) sırası dağılır.

3°. $l = 1$ olduqda sıraların yığılması üçün başqa əlamətlərdən istifadə olunur.

<u>Misal № 1</u>. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n(n+1)}$ sırasının yığılmasını araşdırın.

<u>Həlli</u>. $u_n = \frac{5^n}{n(n+1)}$; $u_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.

Dalamber əlamətini tətbiq edirik:

$$l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1} \cdot n \cdot (n+1)}{(n+1)(n+2)5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n}{n+2} = 5.$$

$l = 5 > 1$ olduğundan Dalamber əlamətinə görə sıra dağılır.

<u>Misal№2</u>. $1 + \frac{3}{2\cdot 3} + \frac{3^2}{2^2\cdot 5} + \frac{3^3}{2^3\cdot 7} + \cdots$ sırasının yığılmasını araşdırın.

<u>Həlli</u>. $u_n = \frac{3^{n-1}}{2^{n-1}(2n-1)}$; $u_{n+1} = \frac{3^n}{2^n(2(n+1)-1)} = \frac{3^n}{2^n(2n+1)}$.

Dalamber əlamətini tətbiq edirik:

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{2^n(2n+1)}\cdot\frac{2^{n-1}(2n-1)}{3^{n-1}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3(2n-1)}{2(2n+1)} = \frac{3}{2} = 1{,}5 > 1.$$

$l = 1{,}5 > 1$ olduğundan Dalamber əlamətinə görə sıra dağılır.

Misal № 3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ sırasının yığılmasını araşdırın.

Həlli. $u_n = \frac{1}{n!}$; $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$

Dalamber əlamətini tətbiq edirik:

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}:\frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

$l = 0 < 1$ olduğundan Dalamber əlamətinə görə sıra yığılır.

Misal № 4. $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\cdots$ sırasının yığılmasını araşdırın.

Həlli. $u_n = \frac{2n}{3^n}$; $u_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3^{n+1}}$.

$$l = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{2n} = \frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{2}{3}.$$

$l = \frac{2}{3} < 1$ olduğundan Dalamber əlamətinə görə sıra yığılır.

§3. Sıraların yığılması üçün Koşinin radikal əlaməti

Müsbət işarəli sıraların yığılmasını tədqiq edərkən Koşinin radikal əlamətindən istifadə etmək sərfəli olur. Bu əlamət Dalamber əlamətinə bənzəyir.

Tutaq ki,

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots \quad (1)$$

sırası verilmişdir və $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = l$ sonlu limiti mövcuddur. Onda $l < 1$ olduqdasıra yığılır, $l > 1$ olduqda sıra dağılır.

İsbatı. 1) Tutaq ki, $l < 1$; onda $l < q < 1$ bərabərsizliyini ödəyən bir q ədədi götürək.

Müəyyən $n = N$ nömrəsindən başlayaraq

$$\left|\sqrt[n]{u_n} - l\right| < q - l$$

bərabərsizliyi doğru olacaqdır, buradan çıxır ki, bütün $n \geq N$ üçün

$$\sqrt[n]{u_n} < q$$

yaxud

$$u_n < q^n$$

İndi isə aşağıdakı iki sıranı tutuşduraq:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ ... + u_N + u_{N+1} + u_{N+2} + \ ... \qquad (1)$$

$$q^N + q^{N+1} + q^{N+2} + \cdots \qquad (1')$$

$(1')$ sırasının hədləri azalan həndəsi silsilə təşkil etdiyindən bu sıra yığılır. u_N həddindən başlayaraq (1) sırasının hədləri $(1')$ sırasının hədlərindən kiçikdir. Deməli, (1) sırası yığılır.

Tutaq ki, $l > 1$. Onda müəyyən $n = N$ nömrəsindən başlayaraq

$$\sqrt[n]{u_n} > 1$$

yaxud

$$u_n > 1$$

alırıq. Baxılan sıranın bütün hədləri (u_N həddindən başlayaraq) 1-dən böyük olduğundan, sıra dağılır, çünki onun ümumi həddi sıfra yaxınlaşmır.

Misal №1. Koşinin radikal əlamətindən istifadə edərək aşağıdakı sıranın yığılmasını araşdırın.

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \cdots$$

Həlli. Koşi əlamətini tətbiq edək:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$$

sıra yığılır.

Misal №2. Koşinin radikal əlamətindən istifadə edərək $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2-1}{5n^2+7n}\right)^{2n}$ sırasının yığılmasını araşdırın.

Həlli. $u_n=\left(\frac{3n^2-1}{5n^2+7n}\right)^{2n}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$-i tapaq. Bu limitin hesablanmasında $\sqrt[n]{a^b}=a^{\frac{b}{n}}$ düsturundan istifadə edəcəyik.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3n^2-1}{5n^2+7n}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-1}{5n^2+7n}\right)^{\frac{2n}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-1}{5n^2+7n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{3n^2}{n^2}-\frac{1}{n^2}}{\frac{5n^2}{n^2}+\frac{7n}{n^2}}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-\frac{1}{n^2}}{5+\frac{7}{n}}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{3-0}{5+0}\right)^2=\frac{9}{25}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\frac{9}{25}<1$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2-1}{5n^2+7n}\right)^{2n}$ sırası yığılır.

Misal №3. Koşinin radikal əlamətindən istifadə edərək $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n(3n+4)}$ sırasının yığılmasını araşdırın.

Həlli. $u_n=\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n(3n+4)}$, $u_n\geq 0$, onda bu sıra müsbət işarəlidir.

Bu limitin hesablanmasında $\sqrt[n]{a^b}=a^{\frac{b}{n}}$ düsturundan və ikinci məşhur limitdən istifadə edirik.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n(3n+4)}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{\frac{n(3n+4)}{n}}=$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{3n+4} = [1^{\infty}] = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n+1}{2n-1}-1\right)^{3n+4} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{2n-1}\right)^{3n+4} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n-1}{2}}\right)^{3n+4} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n-1}{2}}\right)^{\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{2}{2n-1}\cdot(3n+4)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+8}{2n-1}} = e^{\frac{6}{2}} = e^{3}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = e^3 > 1$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{n(3n+4)}$ sırası dağılır.

Misal№4. Koşinin radikal əlamətindən istifadə edərək $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^n}$ sırasının yığılmasını araşdırın.

Həlli.

$$u_n = \frac{1}{(\ln n)^n};\, l = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(\ln n)^n} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1.$$

$l < 1$ olduğundan verilmiş sıra yığılır.

Misal № 5. Koşinin radikal əlamətindən istifadə edərək $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ sırasının yığılmasını araşdırın.

Həlli.

$$l = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} =$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\left({}^{1}\!/\!{}_{n}\right)}\right)^{n} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\left({}^{1}\!/\!{}_{n}\right)\right)^{n}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{e} = \frac{1}{3e} < 1.$$

$l < 1$ olduğundan verilmiş sıra yığılır.

Misal № 6.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$$

sırasının yığılmasını araşdırın.

Həlli.

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n-1}=e^{-2}<1.$$

$l<1$ olduğundan verilmiş sıra yığılır.

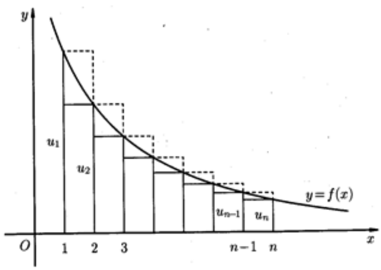
§4. Sıraların yığılması üçün Koşinin inteqral əlaməti

Teorem. Əgər $f(x)$ funksiyası $[1,+\infty)$ aralığında kəsilməzdirsə, onda

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+u_{n+1}+\cdots \qquad (1)$$

$u_n=f(n)$ sırası $\int_1^{\infty}f(x)dx$ qeyri-məxsusi inteqralı yığılırsa, yığılır; bu qeyri-məxsusi inteqral dağılırsa, dağılır.

İsbatı. Aşağıdakı əyrixətli trapesiyaya baxaq: oturacağı Ox oxu üzərində $x=1, x=n$; yuxarıdan isə $y=f(x)$ funksiyası ilə məhdudlanmış əyrixətli trapesiyaya baxaq (şəkil).



Oturacaqları $[1;2],[2;3],..$ olan daxili və xarici düzbucaqlılar quraq. Müəyyən inteqralın həndəsi mənasına əsasən alırıq:

$$f(2)\cdot 1+f(3)\cdot 1+\cdots+f(n)\cdot 1<\int_1^n f(x)dx<f(1)\cdot 1+$$

$$+f(2)\cdot 1+\cdots+f(n-1)\cdot 1$$

və ya

$$u_2+u_3+\cdots+u_n<\int_1^n f(x)dx<u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{n-1}$$

və ya

$$S_n-u_1<\int_1^n f(x)dx<S_n-u_n \qquad (2)$$

I hal. $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ qeyri-məxsusi inteqralı yığılır; yəni $\int_1^{+\infty} f(x)dx=A$. Belə ki,

$$\int_1^n f(x)dx<\int_1^{+\infty} f(x)dx=A$$

Onda (2) bərabərsizliyinə əsasən alırıq:
$S_n-u_1<A,$ yəni $S_n<u_1+A$. Xüsusi cəmlər ardıcıllığı artdığından və yuxarıdan (u_1+A) ədədi ilə məhdud olduğundan limitin mövcudluğu əlamətinə əsasən limiti var. Deməli (1) sırası yığılır.

II hal. $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ qeyri-məxsusi inteqralı dağılır. Onda $f(x)dx=+\infty$ və $\int_1^n f(x)dx$ inteqralı $n\to\infty$-da qeyri-məhdud artır. $S_n>\int_1^{\infty} f(x)dx+u_n$ olduğundan alırıq ki, $n\to\infty$-da $S_n\to\infty$. Həqiqətən də (1) sırası dağılır.

<u>Misal №1</u>. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}+\cdots+\frac{1}{1+n^2}+\cdots$ sırasının yığılan və ya dağılan olduğunu araşdırın.

<u>Həlli</u>. Sıraların yığılması üçün Koşi əlamətini tətbiq edək.

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}\ ;$$

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_1^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}[arc\,\mathrm{tg}\,x]_1^b=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

Verilmiş qeyri- məxsusi inteqral yığıldığından sıra yığılır.

Misal №2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5n+2}}$ sırasının yığılan və ya dağılan olduğunu araşdırın.
Həlli.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{5x+2}};$$

$$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5x+2}}dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{1}^{b}\frac{1}{\sqrt{5x+2}}dx=\lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}\sqrt{(5x+2)^{-\frac{1}{2}}dx}=$$

$$=\frac{1}{5}\lim_{b\to\infty}-\left(-\frac{(5x+2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_{0}^{b}=\frac{2}{5}\lim_{b\to\infty}\sqrt{5x+2}\,\big|_{0}^{b}=$$

$$=\frac{2}{5}\lim_{b\to\infty}\left(\sqrt{5b+2}-\sqrt{2}\right)=\infty$$

Verilmiş qeyri- məxsusi inteqral dağıldığından sıra dağılır.

Misal №3. Koşinin inteqral əlamətindən istifadə edərək $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$ sırasının yığılmasını araşdırın.

Həlli. Verilmiş sıra üçün $f(x)=\frac{1}{x(x+3)}$.

$$\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x(x+3)}=\lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}\frac{dx}{x(x+3)}=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{3}\int_{1}^{b}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}[\ln x-\ln(x+3)]|_{1}^{b}=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left[\ln\frac{x}{x+3}\right]\Bigg|_{1}^{b}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left[\ln\frac{b}{b+3}-\ln\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{3}\ln 4=\ln\sqrt[3]{4}.$$

Verilmiş qeyri- məxsusi inteqral yığıldığından Koşinin inteqral əlamətinə görə sıra yığılır.

Misal № 4. $\frac{1}{2^3}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{4^3}+\cdots$ sırasının yığılmasını araşdırın.

Həlli. Verilmiş sıra üçün

$$f(x)=\frac{x}{(x+1)^3};$$

$$\int_{1}^{\infty}\frac{xdx}{(x+1)^3}=\int_{1}^{\infty}\frac{(x+1-1)dx}{(x+1)^3}=\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^2}-\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{(x+1)^3}=$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\int_1^b \frac{dx}{(x+1)^2} - \int_1^b \frac{dx}{(x+1)^3}\right] = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2}\right]\Bigg|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{b+1} + \frac{1}{2(b+1)^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 4}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{4-1}{8} = \frac{3}{8}.$$

Verilmiş qeyri- məxsusi inteqral yığıldığından Koşinin inteqral əlamətinə görə sıra yığılır.

§5. İşarəsini dəyişən sıralar. İşarəsini növbə ilə dəyişən sıralar üçün Leybnis əlaməti

1. İşarəsini növbə ilə dəyişən sıralar üçün Leybnis əlaməti.
2. Mütləq və şərti yığılan sıralar.

Əgər verilmlş sıranın hədləri arasında həm müsbət, həm də mənfi hədd varsa belə sıralara işarəsini dəyişən sıralar deyilir. Əgər işarəsini dəyişən sıranın ixtiyari iki həddi əks işarəlidlrsə belə sıralar işarəsini növbə ilə dəyişən sıralar adlanır. İşarəsini dəyişən sıraları belə yazmaq olar:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1}u_n + \cdots \quad (1)$$

İşarəsini növbə ilə dəyişən sıralar üçün aşağıdakı Leybnis əlaməti ödənilir.

Leybnis əlaməti

Əgər (1) sırasının hədləri mütləq qiymətcə monoton artandırsa və $n \to \infty$, $u_n \to 0$ onda (1) sırası yığılır və onun cəmi mütləq qiymətcə birinci həddin mütləq qiymətindən böyük deyildir. Leybnis əlamətini ödəyən işarəsini növbə ilə dəyişən sıraların aşağıdakı xassəsi var. Əgər onun n-ci xüsusi cəmini

$$S_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + (-1)^{n-1}u_n$$

işarə etsək, yəni $R_n = S - S_n$ qalığını atsaq, bu halda mütləq qiyməti birinci atılan u_{n+1}-in mütləq qiymətindən olan səhv buraxılacaqdır.

Mütləq və şərti yığılan sıralar

Tutaq ki,

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + u_{n+1} + \cdots \quad (1)$$

sırası verilmişdir.(1) sırasının hədlərinin mütləq qiymətindən düzəldilmiş

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots + |u_n| + \cdots \qquad (2)$$

sırasını tərtib edək. Əgər (2) sırası yığılırsa (1) sırası mütləq yığılan sıra adlanır. (1) sırası yığılırsa və (2) sırası dağılırsa, onda o şərti yığılan sıra adlanır.Tutaq ki, (1) sırası mütləq yığılır. Əgər bu sırada yalnız müsbət və yalnız mənfi hədlərdən ibarət sıra tərtib etsək, onda alınan sıralar da yığılar. Əgər (1) sırası şərti yığılırsa, onda müsbət və ya mənfi hədlərdən düzəldilmiş sıralar dağılır.

Mütləq yığılan sıraların xassələri

Xassə1. Əgər (1) sırası mütləq yığılırsa və cəmi S-dirsə, onda hədlərinin yerinin dəyişdirilməsindən alınan ixtiyari sıra mütləq yığılır və cəmi S-dir.

Xassə 2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ və $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ sıraları mütləq yığılırsa, cəmləri uyğun olaraq S və S_1 -sə onda onların hasillərindən düzəldılmiş $u_i.v_k(i,k = 1,2,3,\dots)$sıraları mütləq yığılır və cəmi $S \cdot S_1$ -dir. $u_i v_k(i,k = 1,2,3,\dots)$ şəkilli hasillərin bütün mümkün hallarından düzəldilmiş sıra $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ və $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ mütləq yığılan sıraların hasilləri adlanır.

<u>Misal №1</u>.İsbat edin ki, $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \cdots$ sırası mütləq yığılır.

<u>Həlli</u>. Verilmiş işarəsini dəyişən sıra Leybnis əlamətinə görə yığılır. Onun hədlərinin mütləq qiymətlərindən düzəldilmiş sıra tərtib etsək, onda sonsuz kiçilən həndəsi silsilə alırıq; bu sıra yığılır. Həqiqətən də verilmiş sıra mütləq qiymətcə yığılır.

<u>Misal №2</u>. İsbat edin ki, $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{9} + \frac{1}{4} - \frac{1}{27} + \frac{1}{8} - \cdots$ sırası mütləq yığılır.

<u>Həlli</u>. Verilmiş siranın müsbət hədləri yığılan həndəsi silsilə əmələ gətirir və cəmi 2 -dir. Analoji olaraq mənfi hədlərdən düzəldılmiş

sıra $-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{27}-\frac{1}{81}-\cdots$ həndəsi silsilə əmələ gətirir və cəmi $-\frac{1}{2}$-dir. Onda verilmiş sıra da yığılır və cəmi $\frac{3}{2}$-dür.

<u>Misal № 3</u>. İşarəsini dəyişən sıraların yığılmasını araşdırın.

a)$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot n}{n+1}$.

<u>Həlli</u>. a)Verilmiş sıranın hədləri mütləq qiymətcə monoton azalır:

$$1>\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}>\cdots$$

və

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.$$

Ona görə də Leybnis əlamətinə görə verilmiş sıra yığılır.

b) Verilmiş sıranın hədləri mütləq qiymətcə monoton artır:

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}<\cdots \quad \text{və} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0$$

Leybnis əlamətinin şərti ödənmədiyi üçün verilmiş sıra dağılır.

<u>Misal № 4</u>. Göstərin ki,

$$1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}+\frac{1}{7\cdot 7!}+\cdots$$

işarəsini dəyişən sıra yığılır və onun cəminin təqribi qiymətini 0,001 dəqiqliklə hesablayın.

<u>Həlli</u>. Leybnis əlamətinə görə sıranın yığılmasını araşdıraq. Belə nəticəyə gəlirik ki, onun hədləri mütləq qiymətcə monoton azalır və

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n-1)!}=0$$

deməli sıra yığılır.

Sonra verilmiş sıranın mütləq qiyməti 0,001 -dən kiçik həddi alanadək bir neçə ilk ardıcıl hədlərini hesablayırıq:

$$a_1=1;\ a_2=-\frac{1}{18};\ a_3=\frac{1}{600};\ a_4=-\frac{1}{35240}$$

İşarəsini dəyişən sıranın 0,001 dəqiqliklə qiymətini almaq üçün onun ilk üç həddinin cəmini götürürük:

$$1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}-\frac{1}{7\cdot 7!}+\cdots\approx 1-\frac{1}{18}+\frac{1}{600}\approx 0{,}946$$

§6.Funksional sıra. Abel teoremi. Qüvvət sıralarının xassələri

Tutaq ki, ümumi təyin oblastı olan funksiyaların sonsuz ardıcıllığı verilmişdır: $u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots, u_n(x), \dots$ Bu funksiyalardan düzəldilmiş aşağıdakı ifadəyə **funksional sıra** deyilir:

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\ (1)$$

funksional sırası x arqumentinin eyni qiymətində yığılan, başqa qiymətində dağılan oiur. Əgər (1) funksional sırası $x=x_0$ nöqtəsində yığılırsa, onda deyirlər ki, sıra x_0 nöqtəsinə yığılır. x arqumentində sıranın yığıldığı nöqtələrdən ibarət olan çoxluq sıranın yığılma oblastı adlanır.Əgər (1) funksional sırasının bütün hədləri $u_n(x), x$ arqumentindən asılı qüvvət funksiyasıdırsa, onda sıra qüvvət sırası adlanır.

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots\ (2)$$

x_0 verilmiş ədəd, $a_0, a_1, a_3, \dots$ məlum ədədi əmsallardır. $x_0=0$ olduqda aşağıdakı qüvvət sırasını alırıq:

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\ (3)$$

Aydındır ki, (3) qüvvət sırası $x=0$ olduqda hər yerdə yığılır.

Abel teoremi. Əgər (3) qüvvət sırası $x=x_0 (x_0\neq 0)$yığılırsa, onda (3) sırası $|x|<|x_0|$bərabərsizliyini ödəyən x-in ixtiyari qiymətində mütləq yığılır. Əgər (3) qüvvət sırası $x=x_0$ nöqtəsində dağılırsa, onda (3) sırası $|x|>|x_0|$ bərabərsizliyini ödəyən x-in ixtiyari qiymətində dağılır.

Abel teoremindən çıxır kı, əgər qüvvət sırası $x_0\neq 0$ nöqtəsində yığılırsa, onda o,$(-|x|, |x_0|)$intervalında yığılır. İsbat etmək olar ki, yığılma nöqtələri $(x\neq 0\ )$ və dağılma nöqtələri olan ixtiyari qüvvət sırası üçün $\exists R>0$ var ki,$|x|<0$ olduqda sıra yığılır, $|x|>0$ olduqda sıra dağılır. Bu R ədədi (3) sırasının yığılma radiusu adlanır. Əgər $x = 0$ nöqtəsində (3) sırası yığılırsa, onda $R = 0$. Əgər (3) sırası x-in ixtiyari qiymətində yığılırsa, onda $R = \infty$. (3) sırasının yığılma intervalı $(-R, R)$-dir. Praktikada (3) qüvvət sıralarının yığılma radıusu Dalamber əlaməti vasitəsi ilə tapılır. Dalamber əlamətini (3) sırasının hədlərinin mütləq qiymətindən düzəldilmiş sıraya tətbiq edək:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| = l|x|, \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l.$$

$$l|x| < 1;\ |x| < \frac{1}{l};\ -\frac{1}{l} < x < \frac{1}{l};\ -R < x < R \quad (4)$$

Yığılma radiusu

$$R = \frac{1}{l} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad (5)$$

(4) bərabərsizliyini ödəyən x-in bütün qiymətlərində (3) sırası mütləq yığılır.

Qüvvət sıralarının xassələri

1.Qüvvət sırasının $S(x)$ cəmi $(-R, R)$ yığılma intervalında kəsilməzdir.

2. Yığılma radiusları uyğun olaraq R_1 və R_2 olan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ və $\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ qüvvət sıralarını hədbəhəd toplamaq, çıxmaq və vurmaq olar.

3. Qüvvət sırasını yığılma intervalının daxilində hədbəhəd diferensiallamaq olar:

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots \quad (6)$$

$-R < a < R$ olduqda aşağıdakı bərabərlik ödənilir:

$$S' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots \quad (7)$$

4. Qüvvət sırasını yığılma oblastının daxilində yerləşmiş ixtiyarı parçada inteqrallamaq olar:

$$\int_a^x S(t)dt = \int_a^x a_0 dt + \int_a^x a_1 t dt + \int_a^x a_2 t^2 dt + \cdots + \int_a^x a_n t^n dt + \cdots \quad (8)$$

$$-R < a < x < R.$$

Qüvvət sıralarının xassələri nəzəri tədqiqatlarda və təqribi hesablamalarda tətbiq olunur.

Misal №1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$. sırasının yığılma radiusunu tapın.

Həlli. $a_n = \frac{n!}{n^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$;

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\,(n+1)^{n+1}}{(n+1)!\,n^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \quad R = e.$$

Misal №2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ sırasının yığılma oblastını tapın.

Həlli. $a_n = \frac{1}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$;

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

$R = \infty$ olduğundan araşdırılan sıra x dəyişəninin ixtiyari qiymətində yığılır.

Misal № 3.$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n3^n}$ sırasının yığılma oblastını tapın.

Həlli. $a_n = \frac{1}{n3^n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)3^{n+1}}$;

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^{n+1}}{n3^n} = 3\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 3\cdot 1 = 3.$$

$x = -3$ olduqda $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n}+\cdots$ sırasını alırıq. Bu sıra Leybnis əlamətinə əsasən yığılır.

$x = 3$ olduqda harmonik sıra alırıq, bu sıra isə dağılır. Həqiqətən də sıranın yığılma oblastı $[-3; 3)$ aralığı olur.

Misal№ 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}$ sırasının yığılma oblastını tapın.

Həlli. (5) düsturuna əsasən yığılma radiusunu tapırıq.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}} : \frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n-1}} = 2.$$

$-2 < x+2 < 2 \Rightarrow -4 < x < 0$ olduqda sıra yığılır. $x = 0$ olduqda dağılan sıra alırıq:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 2^{n-1}} = 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

Siranın yığılma oblastı $[-4; 0)$-dır.

Misal № 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)7^n}\cdot x^n$ sırasının yığılma radiusunu tapın.

Həlli. $a_n = \frac{1}{(n+1)7^n}$; $a_{n+1} = \frac{1}{(n+2)7^{n+1}}$
(5) düsturuna əsasən yığılma radiusunu tapırıq.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)7^{n+1}}{(n+1)7^n}\right| = 7\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} = 7.$$

Yığılma radiusu $-7 < x < 7$-dir.

§7.Funksiyaların qüvvət sıralarına ayrılması. Teylor və Makloren sıraları

x_0 nöqtəsinin ixtiyarı ətrafında təyin olunmuş və həmin ətrafda $(n+1)$-ci tərtib törəmələri olan ixtiyari $f(x)$ funksiyası üçün Teylor düsturu belədir:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 +$$

$$+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \quad (1)$$

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, c \in (x_0, x)$ - Laqranj formasında qalıq həddidir. (1) düsturunu qısa olaraq belə yazmaq olar:

$$f(x) = P_n(x) + +R_n(x)$$

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$

$$+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Teylor çoxhədlisidir.

Əgər $f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində ixtiyari tərtibədək törəməsi varsa və qalıq həddi $n \to \infty$-da $R_n(x) \to 0$ olarsa, onda Teylor düsturundan $f(x)$ funksiyasının $(x-x_0)$ qüvvətinə görə Teylor sırası adlanan sıraya ayırmaq olar:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \cdots = \sum_{n=o}^{\infty}\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad (2)$$

Əgər Teylor sırasında $x_0 = 0$ yazsaq, onda x qüvvətinə görə Makloren sırasını alırıq:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^2+\cdots=\sum_{n=o}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}x^n \quad (3)$$

Teylor sırasını sonsuz sayda diferensiallanan ixtiyari funksiya üçün qurmaq olar.(ancaq bu kafi şərtdir).

Teorem 1. $f(x)$ funksiyasının Teylor sırasının x nöqtəsində $f(x)$-ə yığılması üçün zəruri və kafi şərt bu nöqtədə Teylor sırasının qalıq həddinin sıfra yaxınlaşmasıdır:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$$

İsbatı. Tutaq ki, (2) Teylor sırası x_0 nöqtəsinin hər hansı ətrafında $f(x)$ funksiyasına yığılır, yəni $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$. (2) sırasının n-ci xüsusi cəmi $S_n(x)$ Teylor çoxhədlisi:$P_n(x)$ ilə üst-üstə düşür: $S_n(x)=P_n(x)$. Onda alırıq:

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\big(f(x)-P_n(x)\big)=$$
$$=f(x)-\lim_{n\to\infty} S_n(x)=f(x)-f(x)=0$$

Tərsinə, tutaq ki,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0$$
$$f(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x)=\lim_{n\to\infty} P_n(x)=\lim_{n\to\infty}\big(f(x)-R_n(x)\big)=$$
$$=\Big(f(x)-\lim_{n\to\infty} R_n(x)\Big)=f(x)-0=f(x)$$

Qeyd. Əgər (2) Teylor sırası $f(x)$-ə yığılırsa, onda Teylor düsturunun qalıq həddi sıranın qalığına bərabərdir.

Teorem 2. Əgər $f(x)$ funksiyasının bütün törəmələrinin mütləq qiymətləri x_0 nöqtəsinin hər hansı ətrafında eyni $M>0$ ədədi ilə məhduddursa, onda bu ətrafdan götürülmüş ixtiyari x üçün $f(x)$ funksiyasını Teylor sırasına ayırmaq olar.

Misal №1. $f(x)=x^3-3x$ funksiyasını $x-1$ qüvvətinə görə Teylor sırasına ayırın.

Həlli. $x-1=x-a \Rightarrow a=1. f(1)=1^3-3\cdot 1=-2.$ $f(x)$ funksiyasını üçüncü tərtibədək diferensiallayırıq:

$$f'(x)=3x^2-3;\ f'(1)=0.$$
$$f''(x)=6x;\ f''(1)=6;\ f'''(x)=6; f'''(1)=6$$

(2) düsturuna əsasən alırıq:

$$f(x) = -2 + \frac{6}{2!}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3 =$$
$$= -2 + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$$

Nəticədə alırıq: $x^3 - 3x = -2 + 3(x-1)^2 + (x-1)^3$

Misal № 2. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x + 3$ funksiyasını $x-2$ qüvvətinə görə Teylor sırasına ayırın.

Həlli. $f(x)$ funksiyasını diferensiallayırıq.

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 8;\ f''(x) = 6x - 10;$$
$$f'''(x) = 6;\ f^{(n)}(x) = 0, n > 3.$$

$f(2) = 7; f'(2) = 0;\ f''(2) = 2;\ f'''(2) = 6; f^{(n)}(2) = 0, n > 3$

(2) düsturuna əsasən alırıq:

$$f(x) = 7 + \frac{x-2}{1} \cdot 0 + \frac{(x-2)^2}{1 \cdot 2} \cdot 2 + \frac{(x-2)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 6$$

Nəticədə alırıq:$x^3 - 5x^2 + 8x + 3 = 7 + (x-2)^2 + (x-2)^3$.

Misal№3. $f(x) = x^4 - 4x^2$ funksiyasını $x+2$ qüvvətinə görə Teylor sırasına ayırın.

Həlli. Teylor sırasına əsasən

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 +$$
$$+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{IV}(x_0)}{4!}(x-x_0)^4.$$
$$x + 2 = x - x_0 \Rightarrow x_0 = -2.$$
$$f(-2) = (-2)^4 - 4 \cdot (-2)^2 = 16 - 16 = 0.$$

$f(x)$ funksiyasını dördüncü tərtibədək diferensiallayırıq:

$f'(x) = 4x^3 - 8x;\ f''(x) = 12x^2 - 8;\ f'''(x) = 24x;\ f^{IV}(x) = 24.$

$x_0 = -2$ nöqtəsində funksiyanın törəmələrinin qiymətini tapırıq:

$f'(-2) = 4(-2)^3 - 8 \cdot (-2) = -32 + 16 = -16;$

$f''(-2) = 12(-2)^2 - 8 = 48 - 8 = 40;$

$f'''(-2) = 24(-2) = -48;\ f^{IV}(-2) = 24.$

$$f(x) = -\frac{16}{1!}(x+2) + \frac{40}{2!}(x+2)^2 -$$
$$-\frac{48}{3!}(x+2)^3 + \frac{24}{4!}(x+2)^4$$

Nəticədə alırıq:

$$x^4-4x^2=-16(x+2)+20(x+2)^2-8(x+2)^3+(x+2)^4$$

Misal№ 4. $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiyasını $x+2$ qüvvətinə görə Teylor sırasına ayırın.

Həlli. Teylor sırasına əsasən

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+$$
$$+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$x+2=x-x_0\Rightarrow x_0=-2.\,f(-2)=-\frac{1}{2}.$$

$f(x)=\frac{1}{x}$ funksiyasının törəmələrini tapaq:

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2};\ f''(x)=(-x^{-2})'=2\cdot x^{-3}=\frac{2}{x^3};$$
$$f'''(x)=(2\cdot x^{-3})'=-6x^{-4};\ f^{IV}(x)=(-6x^{-4})'=24\cdot\frac{1}{x^5},\ldots$$

$x_0=-2$ nöqtəsində funksiyanın törəmələrinin qiymətini tapırıq:

$$f'(-2)=-\frac{1}{4};\ f''(-2)=\frac{1}{4};$$
$$f'''(-2)=-\frac{3}{8};\ f^{IV}(-2)=-\frac{3}{4},\ldots$$

$$f(x)=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x+2)+\frac{\frac{1}{4}}{2!}(x+2)^2+$$
$$+\frac{-\frac{3}{8}}{3!}(x+2)^3+\frac{-\frac{3}{4}}{4!}(x+2)^4+\cdots$$

Nəticədə alırıq:

$$\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x+2)-\frac{1}{8}(x+2)^2-\frac{1}{16}(x+2)^3-\frac{1}{32}(x+2)^4-\cdots$$

Elementar funksiyaların Makloren sırasına ayrılması

$f(x)$ funksiyasını Makloren sırasına ayırmaq üçün aşağıdakıları yerinə yetirmək lazımdır:
a) $f'(x), f''(x), f'''(x), \dots, f^{(n)}(x), \dots$ törəmələrini tapmaq;
b) törəmələrin qiymətini $x_0 = 0$ nöqtəsində hesablamaq;
c) verilmiş sıra üçün Makloren sırasını yazmaq və yığılma radiusunu tapmaq;
d) $n \to \infty$ şərtində Makloren sırasının qalıq həddi $R_n(x) \to 0$ olarsa, $(-R, R)$ intervalını tapmalı. Əgər belə interval mövcuddursa, onda $f(x)$ funksiyası və Makloren sırası üst-üstə düşür.
Qeyd. Qüvvət sırasının yığılma intervalında qalıq həddi sıfra yaxınlaşır.
Elementar funksiyaların qüvvət sırasına ayrılışı cədvəli aşağıdakıdır:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty \qquad (4)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, -\infty < x < \infty (5)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, -\infty < x < \infty (6)$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{mx}{1!} + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \cdots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \cdots, -1 < x < 1 (7)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad x \in (-1;1) (8)$$

$$arc\,\mathrm{tg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \cdots, \ x \in [-1;1] (9)$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad -\infty < x < \infty (10)$$

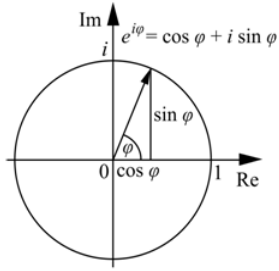
$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, -\infty < x < \infty (11)$$

$$arc\sin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \cdots$$

$$\dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots x \in [-1;1] \qquad (12)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots, x \in [-1;1] (13)$$

§ 8. Eyler düsturu



Eyler düsturunun həndəsi mənası

$e^x, \cos x, \sin x$ funksiyalarının ayrılışından Eyler düsturunun alınmasında istifadə edək.
Əgər x həqiqi ədəddirsə, onda

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

əgər $z = x + iy$, x və y həqiqi ədədlər, $i = \sqrt{-1}$ olarsa

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \qquad (1)$$

Dalamber əlamətini

$$1 + \frac{|z|}{1!} + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \cdots, \qquad (a)$$

sırasına tətbiq edərək alırıq ki, $|z|$-in hər bir qiymətində (a) sırası yığılır. Onda (1) sırası da yığılar. Xüsusi halda $z = ix$, x-həqiqi ədəddir.

$$e^{ix} = 1 + \frac{(ix)}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + $$
$$+ \frac{(ix)^7}{7!} + \frac{(ix)^8}{8!} + \cdots$$

$i^2 = -1;\ i^3 = -i; i^4 = 1;\ i^5 = i;\ i^6 = -1;\ i^7 = -i;\ i^8 = 1;$ ...
və s. alırıq:

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\cdot\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\cdot\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\cdot\frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

və ya həqiqi və xəyali hissələri ayıraraq alırıq:

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)$$

$\sin x$ və $\cos x$-in ayrılışından görürük ki, I mötərizədə $\cos x$-in, II mötərizədə isə $\sin x$-in ayrılışı durur.
Deməli aşağıdakı məşhur düsturu alırıq:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \qquad (2)$$

x-i $-x$-lə - lə əvəz edərək alırıq:
$\cos(-x) = \cos x, \sin(-x) = -\sin x.$

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x \qquad (3)$$

(2) və (3) məşhur Eyler düsturlarıdır. (2) və (3)-ü $\cos x$ və $\sin x$ -ə nəzərən həll edərək alırıq:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \ \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

Ümumi halda

$$z = x + yi$$

olarsa

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}.$$

Həqiqətən

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

<u>Misal №1</u>. $e^{1+\frac{\pi}{2}i}$-ni hesablayın.
<u>Həlli</u>. $e^{1+\frac{\pi}{2}i} = e\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = ei.$

<u>Misal №2</u>. $z = 4e^{\frac{\pi}{6}i}$ üstlü kompleks ədədini cəbri formada yazın.
<u>Həlli</u>. Kompleks ədədlər üçün Eyler düsturundan istifadə edək.

$$z = 4e^{\frac{\pi}{6}i} = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} + 2i.$$

§ 9.Qüvvət sıralarının təqribi hesablamalara tətbiqləri

I. Triqonometrik funksiyaların qiymətlərinin hesablanması.
<u>Misal №1</u>. $cos10^{\circ}$ -nın (0,0001 dəqiqliklə) təqribi qiymətini hesablayın.
<u>Həlli</u>: Bucağın dərəcə ölçüsünü radianla ifadə edək.

$$cos10^{\circ} = cos\frac{\pi}{18}, \quad x = \frac{\pi}{8}$$

$$cos\frac{\pi}{18} = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^4}{4!} - \cdots$$

və ya

$$cos10^{\circ} = 1 - \frac{(0{,}1745)^2}{2!} + \frac{(0{,}1745)^4}{4!} - \cdots \qquad (1)$$

$$\frac{(0{,}1745)^4}{4!} < \frac{(0{,}2)^4}{24} = \frac{0{,}0016}{24} < 0{,}0001$$

olduğundan (1) ayrılışının iki həddi ilə kifayətlənəcəyik.

$$cos10^{\circ} \approx 1 - \frac{(0{,}1745)^2}{2!} \approx 0{,}9848$$

Misal №2. $\sin 18^{\circ}$ -nin (0,001 dəqiqliklə) təqribi qiymətini hesablayın.

Həlli. $\sin 18^{\circ} = \sin\frac{\pi}{10}; x = \frac{\pi}{10}$

$$sin\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{\pi}{10}\right)^5}{5!} - \cdots$$

Alınmış sıra işarəsini dəyişən sıra olduğundan Leybnis teoreminin şərtlərini ödəyir, üçüncü hədd isə 0,001-dən kiçik olduğundan

$$\sin 18^{\circ} \approx 0{,}3142 - 0{,}0052 = 0{,}309$$

II. Kökaltı ifadələrin təqribi hesablanması

Misal №3. $\sqrt[4]{630}$ ədədini $0{,}0001$ dəqiqliklə hesablayın.

Həlli.

$$\sqrt[4]{630} = \sqrt[4]{625+5} = \sqrt[4]{625(1+0{,}008)} = 5\sqrt[4]{1+0{,}008} = 5(1+0{,}008)^{\frac{1}{4}}$$

§7 - dəki (7) binomial sırasından istifadə edək. $x = 0{,}008$ və $m = \frac{1}{4}$ qəbul edərək aşağıdakını alarıq:

$$(1+0{,}008)^{\frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{4}\cdot 0{,}008 - \frac{3}{16\cdot 21}(0{,}008)^2 + \frac{3\cdot 7}{64\cdot 3!}(0{,}008)^3 - \cdots$$

və ya

$$(1+0{,}008)^{\frac{1}{4}} = 1 + 0{,}002 - 0{,}000006 + 0{,}000000028 - \cdots \text{(a)}$$

Əgər işarəsini dəyişən (a) sırasında birinci iki həddi götürüb qalan hədləri atsaq, onda $\sqrt[4]{1+0{,}008}$-ü hesablayarkən xəta mütləq qiymətcə 0,000006-nı aşmır. Onda $\sqrt[4]{630} = 5\sqrt[4]{1+0{,}008}$-i hesablayarkən xəta

$$5\cdot 0{,}000006 = 0{,}00003 < 0{,}0001.$$

Həqiqətən də

$$\sqrt[4]{630} = 5\sqrt[4]{1+0{,}008} \approx 5(1+0{,}002) = 5{,}0100$$

Misal №4. $\sqrt[3]{640}$ ədədini 0,01 dəqiqliklə hesablayın.

Həlli.

$$\sqrt[3]{640} = \sqrt[3]{512+128} = \sqrt[3]{512\left(1+\frac{1}{4}\right)} = 8\sqrt[3]{1+\frac{1}{4}} = 8\left(1+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} =$$

$$= 8\left(1 + \frac{1}{12} - \frac{1}{144} + \frac{5}{5134} - \cdots\right)$$

Tələb olunan dəqiqliyi təmin etmək üçün işarəsini dəyişən sıranın ilk üç həddinin cəbri cəmini götürürük. Beləliklə,

$$\sqrt[3]{640} \approx 8\left(1 + \frac{1}{12} - \frac{1}{144}\right) \approx 8{,}61.$$

III. Müəyyən inteqralların təqribi hesablanması

Tutaq ki, Nyuton-Leybnis düsturunun vasitəsi ilə hesablana bilməyən $\int_a^b f(x)dx$ müəyyən inteqralını hesablamaq lazım gəlir. Əgər inteqralaltı funksiya $f(x)$ qüvvət sırasına ayrılırsa, $[a, b]$ inteqrallama parçası bu sıranın yığılma oblastına daxildirsə, onda yığılan sıranın yığılma oblastına daxil olan ixtiyari parçada inteqrallanması faktına (teorem) arxalanaraq alarıq:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left[f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots\right]dx$$

<u>Misal №5</u>. $\int_0^1 e^{-x^2}dx$-i 0,001 dəqiqliklə hesablayın.

<u>Həlli</u>.Verilmiş inteqral üçün Nyuton-Leybnis düsturu tətbiq oluna bilmədiyindən e^{-x^2}-ni qüvvət sırasına ayıraq.

e^x funksiyasının ayrılışında x-i $-x^2$ ilə əvəz edək.

$$\bar{e}^{x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{n!} + \cdots$$

$$\int_0^1 \bar{e}^{x^2}dx = = \int_0^1 \left[1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \cdots\right]dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \frac{x^9}{4!\cdot 9} - \frac{x^{11}}{5!\cdot 11} + \cdots\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} +$$

$$+ \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \cdots$$

Alınmış işarəsini dəyişən sıra Leybnis teoreminin şərtlərini ödəyir. Bu sıranın altıncı həddi mütləq qiymətcə 0,001-dən kiçik olduğundan, onda ilk 5 həddin cəmi ilə kifayətlənirik. Beləliklə,

$$\int_0^1 \bar{e}^{x^2} dx \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \approx 0{,}747$$

Misal № 6. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin 2x dx}{x}$-i 0,001 dəqiqliklə hesablayın.

Həlli. İnteqralaltı ifadəni qüvvət sırası şəklində göstərək.
$\sin x$ funksiyasının qüvvət sırasına ayrılışında x-i $2x$-lə əvəz edək:

$$sin2x = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \cdots$$

$$\frac{sin2x}{x} = 2 - \frac{2^3 \cdot x^2}{3!} + \frac{2^5 x^4}{5!} - \frac{2^7 x^6}{7!} + \cdots$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{sin2x}{x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(2 - \frac{2^3 x^2}{3!} + \frac{2^5 x^4}{5!} - \frac{2^7 x^6}{7!} + \cdots\right) dx =$$

$$= \left[2x - \frac{2^3}{3!} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{2^5}{5!}\frac{x^5}{5} - \frac{2^7}{7!}\frac{x^7}{7} + \cdots\right]_0^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280} + \cdots$$

Alınmış işarəsini dəyişən sıra Leybnis teoreminin şərtlərini ödəyir. Sıranın dördüncü həddi mütləq qiymətcə 0,001-dən kiçikdir. Tələb olunan dəqiqliyi təmin etmək üçün ilk üç həddin cəmini götürmək kifayətdir.

Həqiqətən də $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin 2x dx}{x} \approx 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} \approx 0{,}946.$

Misal № 7. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$ inteqralını 0,001 dəqiqliklə hesablayın.

Həlli. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x^2)^{-\frac{1}{3}}\, dx.$

İnteqralaltı funksiyanı qüvvət sırasına ayıraq. **§7**-nin (7) sırasında $m = -\frac{1}{3}$ və x-i x^2 ilə əvəz edək.

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^4 - \frac{14}{81}x^6 + \cdots$$

$\left[0; \frac{1}{2}\right]$ inteqrallama parçası verilmiş sıranın $(-1; 1)$ yığılma oblastına daxildir. Onda

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^4 - \frac{14}{81}x^6 + \cdots\right) dx =$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{9} + \frac{2x^5}{45} - \frac{14x^7}{567} + \cdots\right] \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{72} + \frac{1}{720} - \frac{7}{36288} + \cdots$$

Alınmış işarəsini dəyişən sırada dördüncü hədd mütləq qiymətcə 0,001-dən kiçikdir. Həqiqətən də tələb olunan dəqiqliyi təmin etmək üçün ilk üç həddin cəbri cəmini hesablayırıq:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{72} + \frac{1}{720} = \frac{39}{80} = 0{,}4875.$$

Atılan hədlərdən birincinin işarəsi mənfi olduğu üçün təqribi qiyməti 0,001 dəqiqliklə götürürük: $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}} \approx 0{,}487.$

Misal № 8. $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sin 4x}{x} dx$ inteqralını 0,001 dəqiqliklə hesablayın.

Həlli. $\sin x$ funksiyasının Makloren sırasına ayrılışında x-i $4x$-lə əvəz edək. Onda alırıq:

$$\sin 4x = 4x - \frac{(4x)^3}{3!} + \frac{(4x)^5}{5!} - \frac{(4x)^7}{7!} + \cdots$$

Onda $\frac{\sin 4x}{x} = 4 - \frac{4^3x^2}{3!} + \frac{4^5x^4}{5!} - \frac{4^7x^6}{7!} + \cdots$

İnteqrallayaraq alırıq:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sin 4x}{x} dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \left[4 - \frac{4^3x^2}{3!} + \frac{4^5x^4}{5!} - \frac{4^7x^6}{7!} + \cdots\right] dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sin 4x}{x} dx = \left[4x - \frac{4^3x^3}{3!\cdot 3} + \frac{4^5x^5}{5!\cdot 5} - \frac{4^7x^7}{7!\cdot 7} + \cdots\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280} + \cdots$$

İşarəsini dəyişən sıranın dördüncü həddi 0,001 - dən kiçikdir. Ona görə də inteqralın təqribi qiymətini hesablamaq üçün sıranın ilk üç həddinin cəmini götürmək kafidir:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{\sin 4x}{x} dx \approx 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} \approx 0{,}946.$$

§10. Periodik funksiyalar. Triqonometrik Furye sıraları

1. Periodik funksiyaların əsas xassələri
2. Triqonometrik Furye sıraları
3. Periodu 2π olan funksiyaların Furye sırasına ayrılması. Dirixle teoremi
4. Tək və cüt funksiyaların Furye sırasına ayrılması
5. İxtiyari periodlu funksiyaların Furye sırasına ayrılışı

Müxtəlif periodik proseslərin öyrənilməsi zamanı, (yəni müəyyən zaman anında təkrarlanan: radiotexnika, elektronika, elastiklik nəzəriyyəsi və s.) bu prosesləri ifadə edən funksiyaları qüvvət sırasına deyil, triqonometrik sıraya ayırmaq məqsədə uyğun olur.

D oblastında təyin olunmuş periodu T olan $y = f(x)$ funksiyası aşağıdakı şərtləri ödəyirsə, periodik funksiya adlanır:

$$\forall x \in D, \forall(x + T) \in D \Rightarrow f(x + T) = f(x)$$

Periodik funksiyaların əsas xassələri:

1. Eyni T periodu olan funksiyaların cəbri cəminin periodu T-dir.
2. Əgər $f(x)$ funksiyasının periodu T-dirsə, $f(ax)$ funksiyasının periodu $\frac{T}{a}$-dır. Həqiqətən də

$$f\left(a\cdot\left(x+\frac{T}{a}\right)\right)=f(ax+T)=f(ax).$$

3. Əgər $f(x)$ funksiyasının periodu T -dirsə və $[x_0, x_1] \in R$ parçasında inteqrallanandırsa, onda $\forall a, b \in [x_0, x_1]$ üçün

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^{b+T} f(x)dx.$$

Triqonometrik Furye sıraları

Belə adlanan triqonometrik sıraların köməyi ilə ixtiyari periodik sıranı Furye sırasına ayırmaq olar.

Aşağıdakı şəkildə verilmiş funksional sıra triqonometrik sıra adlanır:

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+\cdots+a_n\cos nx+b_n\,\mathrm{sinn}\,x+\cdots=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

a_0; a_n; $a_n(n=1,2,\dots)$ ədədləri sıranın əmsalları adlanır. (1) sırasını həmçinin aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(nx+\varphi_n) \tag{2}$$

Həqiqətən də $a_n = A_n \sin\varphi_n$, $b_n = A_n\cos\varphi_n$, qəbul etsək alarıq:

$$a_n\cos nx+b_n\sin nx=A_n\sin(nx+\varphi_n).$$

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\,;\ tg\,\varphi_n=\frac{a_n}{b_n}$$

Bizə lazım olan düsturları yazaq. m və n-in müsbət tam ədəd olduğunu nəzərə aldıqdan sonra alırıq:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \begin{cases} \dfrac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad (n \neq 0) \\ x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2\pi (n = 0) \end{cases} \qquad (3)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \qquad (4)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) dx =$$
$$= \begin{cases} 0 \ \ (m \neq n) \\ \pi (n = 0) \end{cases} (5)$$

$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(m+n)x + \sin(m-n)x) dx = 0 (6)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x) \, dx =$$
$$= \begin{cases} 0 \ \ (m \neq n) \\ \pi (n = 0) \end{cases} \qquad (7)$$

Qeydlər.

1. (3)-(7) düsturları göstərir ki, aşağıdakı funksiyalar ailəsi:

$\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x. \sin 3x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$

ortoqonallıq xassəsinə malikdir: uzunluğu 2π olan intervalda bu ailədən olan ixtiyari iki funksiyanın hasilinin inteqralı sıfra bərabərdir.

2. İnteqrallama oblastı $[0; 2\pi]$parçası olduqda da (3)-(7) düsturları ödənilir.

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası periodu 2π olan ixtiyari funksiyadır. $f(x)$ funksiyasının triqonometrik sıraya ayrıldığını qəbul edək:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (8)$$

$f(x)$ funksiyasının periodu 2π olduğundan ona uzunluğu 2π olan ixtiyari parçada baxmaq olar. Biz $[-\pi;\pi]$ parçasını götürürük. Tutaq ki, (7) sırasını bu parçada hədbəhəd inteqrallamaq olar.

a_n və b_n əmsallarini müəyyən etmək üçün (8) düsturunu $-\pi$-dən π-yədək inteqrallayaq:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + b_n \sin nxdx\right) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}dx = \pi a_0.$$

Sıfırıncı həddən başqa sıranın bütün hədləri (3) və (4) düsturlarına əsasən sıfra bərabərdir.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad (9)$$

(9) düsturunun hər iki tərəfini $\cos mx$-ə vuraraq və $-\pi$-dən π-yədək inteqrallayaraq alırıq:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mxdx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nxdx +$$

$$+b_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nxdx).$$

(3), (5),(6) düsturlarına əsasən $m = n$ olduqda alırıq:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = a_n\pi.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \qquad n = 1,2,3,\ldots (10)$$

Analoji olaraq (9) düsturunun hər iki tərəfini $\sin mx$-ə vuraraq və $-\pi$-dən π-yədək inteqrallayaraq alırıq:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \qquad n = 1,2,3,\ldots (11)$$

(9), (10), (11) düsturlarından tapılan $a_{0,} a_n, b_n$ ədədlərinə Furye əmsalları, (1) düsturundakı triqonometrik sıra Furye sırası adlanır.

$[-\pi, \pi]$ parçasında inteqrallanan $f(x)$ funksiyası üçün yazılır:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

və deyirlər: $f(x)$ funksiyasına onun Furye sırası uyğundur. Əgər Furye sırası yığılırsa, onun cəmini $S(x)$ ilə işarə edirlər.

Periodu 2π olan funksiyaların Furye sırasına ayrılması.

Dirixle teoremi. Tutaq ki, periodu 2π olan $f(x)$ funksiyası $[-\pi, \pi]$ parçasında aşağıdakı iki şərti ödəyir:

1. $f(x)$ hissə-hissə kəsilməz funksiyadır; yəni kəsilməzdir və ya sonlu sayda I növ kəsilmə nöqtələri vardır.
2. $f(x)$ hissə-hissə monoton funksiyadır; yəni bütün parçada monotondur, və ya bu parçanı sonlu sayda elə intervallara bölmək olar ki, bu parçaların hər birində funksiya monotondur.

Onda $f(x)$-ə uyğun olan Furye sırası bu parçada yığılır və aşağıdakı şərtləri ödəyir:

1. Funksiyanın kəsilmə nöqtələrində sıranın $S(x)$ cəmi funksiyanın özü ilə üst-üstə düşür:

$$f(x) = S(x).$$

2. Funksiyanın hər bir x_0 kəsilmə nöqtəsində sıranın cəmi

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$$

yəni $f(x)$ funksiyasının sağdan və soldan limitlərinin ədədi ortasına bərabərdir.

3. $x = -\pi$ və $x = \pi$ nöqtələrində sıranın cəmi

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}.$$

Tək və cüt funksiyaların Furye sırasına ayrılması

Əgər $[-\pi, \pi]$ parçasında $f(x)$ funksiyasını Furye sırasına ayırarkən $f(x)$ funksiyasının təkliyini və cütlüyünü nəzərə alsaq onda düsturlar bir-birindən Furye əmsalları ilə fərqlənər.

Əgər $f(x)$ funksiyası cütdürsə, onda Furye sırası aşağıdakı şəklə düşər:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \tag{1}$$

Burada

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx, a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, n \in N \tag{2}$$

Əgər $f(x)$ funksiyası təkdirsə, onda Furye sırası aşağıdakı şəklə düşər:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \tag{3}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, n \in N \tag{4}$$

Riyazi analiz kursundan bilirik ki, əgər $f(x)$ funksiyası $[-a, a]$ simmetrik parçasında inteqrallanandırsa, onda

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{cases} 2 \cdot \int_0^a f(x)dx \\ 0 \end{cases} \text{əgər} \begin{cases} f(x)\ cütdirsə, \\ f(x)\ təkdirsə. \end{cases}$$

Əgər $f(x)$ cüt funksiyadırsa onda $f(x)\cos nx$ cüt funksiyadır:

$$(f(-x)\cos(-nx) = f(x)\cos nx)$$

$f(x)\sin nx$ isə tək funksiyadır: $(f(-x)\sin(-nx) = -f(x)\sin nx)$.

Əgər $f(x)$ tək funksiyadırsa, onda $f(x)\cos nx$ tək funksiyadır; $f(x)\sin nx$ isə cüt funksiyadır.

(1) və (3) sıraları natamam triqonometrik sıralar və ya sinuslardan və kosinuslardan asılı triqonometrik sıralar adlanır.

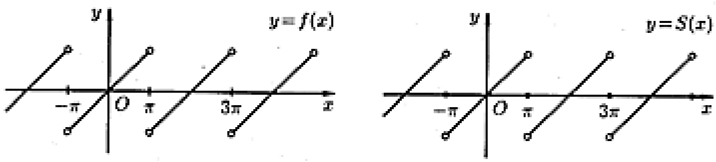
Misal 1. $f(x) = x, x \in (-\pi; \pi)$, $T = 2\pi$ Furye sırasına ayırın.

Həlli. Şəkil 1-də verilmiş funksiyanın qrafiki təsvir olunmuşdur. $y = x$ funksiyası Dırıxle şərtlərini ödəyir. Bu funksiya tək funksiyadır.

Həqiqətən də $a_n = 0,\ n = 0,1, \ldots,$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \frac{2}{x}\left(-\frac{x}{n}\cos nx \left|{}_0^{\pi} + \frac{1}{n^2}\sin nx \right|{}_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\right)\cos \pi n,$$

yəni $b_n = \frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}(n \in N)$. Furye sırası yalnız sinuslardan ibarət olur:



Şəkil 1

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\cdot(-1)^{n+1}\cdot\sin nx = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right)$$

Bu zaman (şəkil1-ə baxın)

$$S(\pm\pi) = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0.$$

<u>Misal 2</u>. $f(x) = x^2$; $-\pi < x < \pi$. (şək.2) Periodu 2π olan $f(x)$ funksiyasını Furye sırasına ayırın.

<u>Həlli</u>. Verilmiş funksiya cütdür. Həqiqətən də $b_n = 0$. (2) düsturundan a_0-ı tapaq.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{x}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

(2) düsturundan istifadə edərək a_n əmsalını tapaq :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\left[x^2\sin\frac{nx}{n} + 2x\cos\frac{nx}{n^2} - \frac{2\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi^2}\cos n\pi.$$

(Bu inteqralı hesablayarkən hissə-hissə inteqrallama düsturunu iki dəfə tətbiq edirik.)

Beləliklə,

$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{4}{n^2} & n \quad cüt\ olduqda \\ \dfrac{1}{n^2} & n \quad tək\ olduqda \end{cases}$$

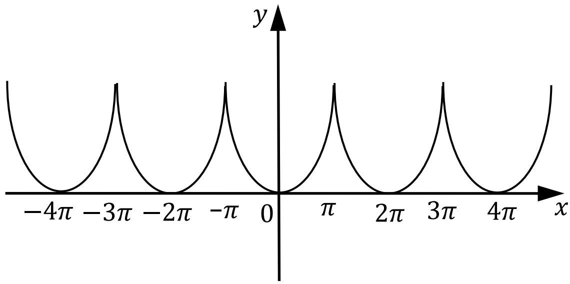
Həqiqətən də,

$$f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \cdots\right)$$

Alınmış bərabərlik $\forall x$ üçün doğrudur. Xüsusi halda $x = 0$ olduqda alırıq:

$$\frac{\pi^2}{3} = 4\left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3} + \cdots\right)$$

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3} + \cdots$$



Şəkil 2

İxtiyari periodlu funksiyaların Furye sırasına ayrılışı

Periodları 2π-dən fərqli olan funksiyaları da Furye sırasına ayırmaq olar.

Tutaq ki, $[-l; l]$ parçasında təyin olunmuş funksiyanın periodu $2l$-dir. $f(x + 2l) = f(x)$, l-ixtiyari müsbət ədəddir) və bu parçada Dirixle şərtlərini ödəyir. $x = \frac{l}{\pi}t$ əvəzləməsi apararaq $f(x)$ funksiyasını $\varphi(t) = f\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ ilə əvəz edək. Bu funksiya $[-\pi, \pi]$ parçasında təyin olunmuşdur və periodu $T = 2\pi$.

Həqiqətən də əgər $t=-\pi$ olarsa, $x=-l$; əgər $t=\pi$ olarsa $x=l$ olar.

$-\pi<t<\pi \Rightarrow l<x<l.$

$$\varphi(t+2l)=f\left(\frac{l}{\pi}(t+2\pi)\right)=f\left(\frac{l}{\pi}t+2l\right)=f\left(\frac{lt}{\pi}\right)=\varphi(t),$$

$$\varphi(t+2\pi)=\varphi(t)$$

$\varphi(t)$ funksiyasının $[-\pi,\pi]$ parçasında Furye sırasına ayrılışı belə olur:

$$\varphi(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nt+b_n\sin nt,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos ntdt,\qquad (n=0,1,2,3,\dots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin ntdt,\qquad (n=1,2,3,\dots).$$

x dəyişəninə keçərək və $t=\frac{\pi x}{l}, dt=\frac{\pi}{l}dx$ olduğunu nəzərə alaraq

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}+b_n\sin\frac{\pi nx}{l}\qquad(1)$$

burada

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx(n=0,1,2\dots.)\qquad(2)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx(n=1,2,\dots.)\qquad(3)$$

(2) və (3) düsturları ilə təyin olunan (1) sırası periodu $T=2\pi$ olan$f(x)$ funksiyasının Furye sırasına ayrılışı adlanır.

Əlavə

Yunan əlifbası

№	Böyük yunan	Kiçik yunan	Adı
1	Α	α	alfa
2	Β	β	beta
3	Γ	γ	qamma
4	Δ	δ	delta
5	Ε	ε	epsilon
6	Ζ	ζ	zeta
7	Η	η	eta
8	Θ	θ	teta
9	Ι	ι	yota
10	Κ	κ	kappa
11	Λ	λ	lyambda
12	Μ	μ	mü
13	Ν	ν	nü
14	Ξ	ξ	ksi
15	Ο	o	omikron
16	Π	π	pi
17	Ρ	ρ	ro
18	Σ	σ	siqma
19	Τ	τ	tau
20	ϒ	υ	ipsilon
21	Φ	φ	fi
22	Χ	χ	xi
23	Ψ	ψ	psi
24	Ω	ω	omeqa

Məntiqi riyazi işarələr:

$\forall$	ixtiyari
$\exists$	elə
$\wedge$	və
$\vee$	və ya

ƏDƏBİYYAT

1. Q.T.Əhmədov, K.Q.Həsənov, M.H.Yaqubov. Adi diferensial tənliklər. Bakı. 2015.
2. X.M.Quliyev, K.Q.Həsənov “Diferensial tənliklər. Məsələ və misallar həlləri ilə” Bakı 2001.
3. Д.Т. Письменный. Конспект лекций по высшей математике. Москва. 2009.
4. В.А Кудрявцев, Б.А.Демидович. Краткий курс высшей математики. Москва. 2001.
5. В.И. Смирнов "Курс высшей математики", том второй, издательство "Наука", Москва 1974.
6. Н.С. Пискунов "Дифференциальное и интегральное исчисление", том второй, издательство "Наука", Москва 1985
7. К.Н. Лунгу, В.П. Норин и др. "Сборник задач по высшей математике", второй курс, Москва: Айрис-пресс, 2007
8. К.Н. Лунгу, Д.Т.Письменный Сборник задач по высшей математике. Москва Айрис Пресс. 2009.
9. Н.Ш.Кремер. Высшая математика для экономистов. Москва. Изд. «ЮНИТИ-ДАНА». 2010.
10. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.

MÜNDƏRICAT

ƏLİYEVA GÜLÜSTAN NAĞI QIZI

ADİ DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR VƏ SIRALAR
(dərs vəsaiti)

Redaksiya-nəşriyyat şöbəsinin baş redaktoru **– *A.Q.Məsimov***

Redaktor: **L.S.İmanova**
Korrektor: **A.A.Əliyeva**

Kompüter operatoru: ***A.Ə.Qarayeva***

Kağız formatı 4\8 Kağız №1,
Uçot çap vərəqi 6,25 ç.v.Tiraj 100

Azərbaycan Dövlət AqrarUniversitetinin mətbəəsi

Rezoqrafiya üsulu ilə çap olunmuşdur.
Gəncə şəhəri, Ozan küçəsi, 102

Elektron ünvan: **www.adau.edu.az**
e-mail: **info@adau.edu.az**